

Keith R. Symon

منابع: ۱) مکانیک - کیت ر. سایمون - انتشارات شریف - اعظم نیریزنده زاده و غلامحسین محمدزایی

۲) مکانیک - فاولر - ۵) مکانیک - مارون

۳) مکانیک کلاسیک - آکامپ آریا -

۴) مکانیک کلاسیک - گلدستاین -

5

فصل اول - آشنایی با مکانیک نیوتنی

مقدمه - نگاه اول به تعاد - قوانین نیوتن و دستگاه مختصات و نا مخت - کاربردها از قوانین نیوتن - حرکت دایره ای و گرایش

مقدمه

10

مکانیک با اجماع در حال سکون و حرکت، و شرایط سکون و حرکت آنها تحت تأثیر نیروها داخلی و خارجی سروکار دارد. - از دنیای مکرر و گویا (اکترونیها و اتمها) تا دنیای ماکرو گویا (سیارات در فضا و حتی در زمین)

مکانیک توضیح نمی دهد که چرا اجماع حرکت می کنند، فقط نشان می دهد که یک جسم در وضعیت معین چگونه حرکت خواهد کرد و این حرکت را چگونه می توان توصیف کرد.

مکانیک را به دو بخش تقسیم می کنیم: سینماتیک: توصیف هندسی محض حرکت اجسام بدون توجه به نیروهای که باعث حرکت می شوند. (مثلاً x, y, z, t)

دینامیک: مطالعه نیروهای که موجب تغییر حرکت یا تغییر خواص دیگر (مثلاً $F, m, \dots$) می شوند. (مثلاً $F, m, \dots$)

در زمان ارسطو، فرآیند فکری مربوط به آن به سرعت گسترش یافت. وی از قرن ۱۷، توسط گالیله، هویگنس و نیوتن به درستی پایه گذاری شد. - آنها نشان دادند که اجماع طبق قواعدی حرکت می کنند و این قواعد به شکل قوانین + ۱۰۰ سال بعد، قوانین اکترونیست و مقادیر (جذب کار و کول)

قوانین نیوتن راه مستقیم و ساده ای به موضوع مکانیک کلاسیک می گشاید. روشهای دیگری نیز برای فرمول بندی اصول مکانیک کلاسیک وجود دارد. روش فرمول بندی لاگرانژ و هامیلتون مهم ترین روشها هستند.

همچنین روشهای دیگری نیز از انرژی به عنوان مفهوم پایه ای برگزیده اند. - مشکل زمانی بروز کرد که از این قوانین در وضعیتهای معین اجماع شد:

۱- اجماع بسیار سریع (تدریج به سرعت نور) ۲- اجماع با تعاد مکرر و گویا (اکترونیها و اتمها)

25

مکانیک کوانتومی

نسبت خاص ۱۹۰۵

۱۹۲۵

PAPCO

آخرین تعریف یکاها را (اصلی) :

زمان (T) ← ثانیه (s): مدت زمان $9.192.631.770$ دوره تناوب تابش قنطاری با گذر بین دو قله حقوق بین از حالت پایه 133Cs

طول (L) ← متر (m): فاصله طی شده نور در خلأ در مدت زمان $\frac{1}{299.792.458}$ ثانیه Δv_{cs}

جرم (M) ← کیلوگرم (kg): کیلوگرم بر حسب ثابت پلانک $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{Js}$ تعریف می شود که وابسته به تعریف m و s است m_s وابسته به m_s

شدت جریان (I) ← آمپر (A): شارش $\frac{1}{1.602176634 \times 10^{-19}}$ برابر بار الکترون (e) در واحد زمان e

دما (Θ) ← کلوین (K): کلوین با ثابت بولتزمن $k_B = 1.380649 \times 10^{-23} \text{J/K}$ تعریف می شود که وابسته به m و s است k_B

مقدار ماده (N) ← مول (mol): مقدار ماده ای معادل با تعداد $N_A = 6.02214076 \times 10^{23}$ ذره بنیادی 10 N_A

شدت تابندگی (J) ← کانلدا (cd): شدت تابندگی در یک راستا مشخص، از چشمه ای با تابش یک رنگ با فرکانس $5.4 \times 10^{14} \text{Hz}$

و دارای شدت تابش $\frac{1}{683}$ وات بر استرلین K_{cd}

قوانین نیوتن :

۱- هر جسم به حالت سکون یا حرکت یکضوافت خود در روی یک سطح مستقیم ادامه می دهد مگر اینکه یک نیروی خارجی حاصل به آن داده شود و آن حالت را تغییر دهد.

۲- آهنگ تغییر مکان خطی یک جسم مستقیماً با نیرو متناسب است و در جهت آن است.

۳- همیشه با هر کشش یک واکنش مساوی و مخالف همراه است یعنی وقتی جسمی بر جسم دیگر نیروی وارد می کند، جسم دوم نیز نیروی مساوی و مخالف آن به او وارد می کند (مقابل).

حرکت اجسام در محیط اطراف با سرعت حضور نیروهای اصطکاکی و گرانش پیچیده است.

یک جسم مترویی را که با سرعت ثابت در فضا حرکت می کند در نظر بگیرید. برای توصیف حرکت این جسم باید دستگاه مختصات رسم کنیم. $\frac{dF}{dt} = 0$ (در آن زمان هیچ نیروی خارجی نیست) که این جسم نسبت به آن با سرعت ثابتی حرکت کند (دستگاه مخت).

(*) عمده قانون اول نیوتن و همیشه می توان دستگاه مختصات پیدا کرد که یک جسم آزاد نسبت به آن با سرعت یکضوافت حرکت کند. یعنی قانون اول نیوتن مؤید وجود دستگاه مخت است.

(*) قانون دوم $\frac{dF}{dt} = 0$ وقتی بین اجسام هر کشش وجود دارد چه روی می دهد؟

چگونه یک هر کشش را می دهیم؟
لختی چیست و چگونه این خاصیت جسم را اندازه گیری می کنیم؟

لختی : خاصیتی از جسم است که مقاومت آن در مقابل حرکت را وقت با جسم دیگری برخوردش را تعیین می کند. اندازه گیری لختی با جرم نامیده می شود.

در جسم در نظر می گیریم که از همه اطراف کاملاً خنثی هستند و با یکدیگر برخورد می کنند. این برخوردش می تواند از اشکال آرایه به یکدیگر به وسیله یک لاستیک یا فنر نتیجه گرفته باشد. برخوردش منجر به تبادل این اجسام می شود.

تبادل این دو جسم در ضربه جهت یکدیگر است و نسبت تبادل به معنای ثابت است: $\frac{a_A}{a_B} = -k_{BA}$

$$\rightarrow k_{BA} = -\frac{a_A}{a_B} = \frac{1}{-\frac{a_B}{a_A}} = \frac{1}{k_{AB}} \Rightarrow k_{BA} = \frac{1}{k_{AB}}$$

با توجه به اینکه تبادل با جرم جسم تغییر می کند، می توان این نسبت را به جرم ها مرتبط ساخت:

$$k_{BA} = \frac{m_B}{m_A}$$

این نسبت باید مستقل از یکدیگر باشد و مستقل از چگونگی اندازه گیری آنها، همواره یکسان باشد. این یک تعریف عملیاتی از جرم است.

$$\frac{a_A}{a_B} = -\frac{m_B}{m_A} \rightarrow m_A a_A = -m_B a_B \equiv \text{ثابت} \equiv \sum F \quad (*)$$

این هم ضرب نیروها می شود و برای برخوردش است. پس در کل:

$$\boxed{\sum \vec{F} = m \vec{a}}$$

تعریف نیرو: نقطه در مکانی است که به طوری برقرار است.

تعریف نیرو از بیان قانون دوم نیوتن:

- جسمی به جرم m را در نظر بگیریم که با سرعت $\vec{v}$ حرکت می کند. گمانه ضعیف آن $\vec{p} = m\vec{v}$ است. طبق قانون دوم نیوتن:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \stackrel{\text{از جرم ثابت}}{\text{و ثابت}} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

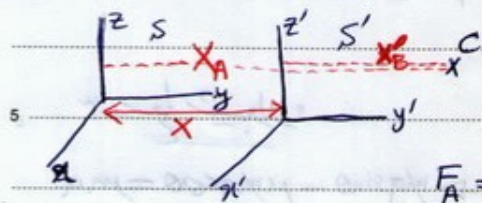
بیان قانون سوم نیوتن:

- از رابطه $(*)$ مشخص شد که $F_A = -F_B$ است. یعنی نیروها همواره به صورت زوج وارد دارند و این نیروها نتیجه برخوردش هستند.

در نگاه یک لحظه و ناگهانی:

- در یک لحظه قانون اول نیوتن یک دستگاه لحظه را محسوس می‌کند، یعنی دستگاه لحظه در آن قانون اول نیوتن برقرار است.

- ناظر A در مرجع لحظه S و ناظر B در مرجع ناگهانی S' که یک جسم مشترک C را که ممکن است حرکت مستقیم داشته باشد، مشاهده می‌کنند.



ناظر A نسبت به جسم C به جرم M را a_A و ناظر B نسبت به a_B اندازه می‌گیرد:

$$F_A = Ma_A \quad , \quad F_B = Ma_B$$

اگر که حرکت یکسان بود، $F_B = F_A$ می‌بود، رابطه بین F_A و F_B را بدست می‌آوریم:

$$x_A(t) = x_B(t) + x(t) \rightarrow \ddot{x}_B = \ddot{x}_A - \ddot{x} \rightarrow Ma_B = Ma_A - M\ddot{x} \rightarrow F_B = F_A - M\ddot{x}$$

$$F_A = F_{\text{true}} = M\ddot{x}_A$$

$$F_B = F_{\text{app}} = M\ddot{x}_B$$

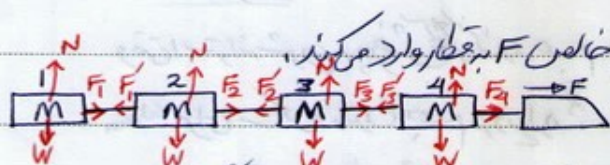
$$\left. \begin{array}{l} F_A = F_{\text{true}} = M\ddot{x}_A \\ F_B = F_{\text{app}} = M\ddot{x}_B \end{array} \right\} \rightarrow F_{\text{app}} = F_{\text{true}} - M\ddot{x}$$

ناظر B نیروی واقعی اندازه می‌گیرد مگر این که $\ddot{x} = 0$ باشد و با سرعت ثابت نسبت به A حرکت کند، یعنی که تیر یک مرجع لحظه باشد.

(*) $M\ddot{x}$ یک نیروی ناگهانی یا فضگی است و یک نیروی به معنای واقعی نیست، هرچندش آن را ایجاد می‌کند.

این جرم هرگز یک صاف ضرب جرم درشت است.

کاربردهای قوانین نیوتن:



$$a = \frac{F}{4M}$$

$$(1) \text{ واگن 1: } F_1 = Ma = M\left(\frac{F}{4M}\right) = \frac{F}{4}$$

$$(2) \text{ واگن 2: } F_2 - F_1' = Ma \rightarrow F_2 = \frac{F}{4} + M\left(\frac{F}{4M}\right) = \frac{2F}{4}$$

$$(3) \text{ واگن 3: } F_3 = 3\frac{F}{4}$$

(*) برای n واگن، نیروی کشنده هر واگن $\frac{F}{n}$ است و شتاب مجموع $a = \frac{F}{nm}$ است. پس نیروی خالص

$$F_k = k \frac{F}{n} \quad \text{رو به عقبی و در واگن k ام}$$

۲- ماشین آتوود:



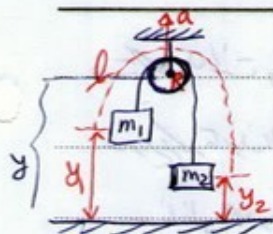
m_2 از m_1 بزرگتر است، قورقه بدون اصطکاک است، سرعت رو به بالا مثبت گرفته می‌شود.

$$(1): T - m_1g = m_1a$$

$$(2): m_2g - T = m_2a \rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g \quad , \quad T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g$$

(*) برای $m_1 = m_2$ ، $a = 0$ شده و تعادل (توازن) را داریم.

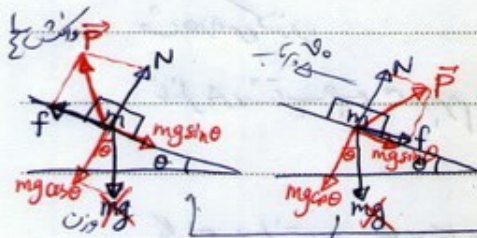
(*) $m_2 \gg m_1$ باشد، $a \approx g$ و $T \approx 2m_1g$ است.



(*) قوه باجه a به بالا می رود:

$$l = \pi R + (y - y_1) + (y - y_2) \quad \frac{d^2 l}{dt^2} = 0 = 2\ddot{y} - \ddot{y}_1 - \ddot{y}_2$$

$$a = \frac{1}{2}(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2)$$



۳- سطح شیب دار:

$$mg \sin \theta - f = ma \rightarrow mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta = ma$$

$$N - mg \cos \theta = 0$$

$$a = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) \quad (\star)$$

$$a = g(\sin \theta + \mu \cos \theta)$$

(*) فرض کنیم جسم روی سطح افقی است و زاویه سطح رشته افتادگی می یابد. در یک زاویه معین θ_f جسم شروع به لغزیدن می کند. در این وضعیت $a = 0$ است و:

$$\begin{cases} mg \sin \theta_f - f = ma \\ N - mg \cos \theta_f = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{f}{N} = \tan \theta_f$$

$$\mu_s = \tan \theta_f$$

$$\text{شرط سکون: } \tan \theta < \tan \theta_f = \mu_s$$

$$a > 0 \rightarrow \text{سریع افتادگی می یابد} \rightarrow \sin \theta - \mu \cos \theta > 0 \rightarrow \tan \theta > \mu \rightarrow \theta > \tan^{-1} \mu$$

$$\theta < \theta_f \rightarrow a < 0 \rightarrow \begin{cases} \text{جسم حرکت نمی کند} \\ \text{سریع جسم می افتد} \end{cases}$$



۴- استوانه در حال چرخش:

وقتی استوانه شروع به چرخش می کند، جسم در دیواره ساکن می ماند. شرایط سرعت زاویه ای ω_{min} برای ساکن ماندن جسم در دیواره؟

$$N - m a_r = 0$$

$$F_c = N \rightarrow m \frac{v^2}{R} = N \rightarrow a_r = \frac{v^2}{R} = R \omega^2$$

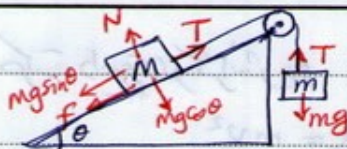
$$N = m a_r = m R \omega^2$$

اگر f نیروی اصطکاک ایستایی باشد، در آن سکانه سرعت زاویه ای جسم:

$$f \leq \mu_s N \rightarrow f \leq \mu_s m R \omega^2 \xrightarrow{f = mg} mg \leq \mu_s m R \omega^2 \rightarrow \omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}}$$

کمترین سرعت چرخش استوانه / کمترین سرعت چرخش موتور سوار در استوانه ساکن:

$$v_{min} = R \omega_{min} \Rightarrow v_{min} \geq \sqrt{\frac{R g}{\mu_s}}$$



۵- دو جسم m و M توسط نخ کنار زوی مقرونه ای گزیده است. به یکدیگر متصل شده اند. جسم m به طور قائم آویزان است و جسم M در روی سطح شیبی با زاویه θ قرار دارد. اگر ضریب اصطکاک جنبشی μ_k باشد، زاویه θ را که برای آن جرمها با سرعت یکسان حرکت کنند، بیابید. در مورد $m=M$ بحث کنید.

($a=0$)

$$\begin{cases} T - mg = 0 \\ N - Mg \cos \theta = 0 \\ T - Mg \sin \theta - f = 0 \end{cases} \rightarrow T - Mg \sin \theta - \mu_k Mg \cos \theta = 0$$

$$\rightarrow mg - Mg \sin \theta = \mu_k Mg \cos \theta = \mu_k Mg \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$$m^2 + M^2 \sin^2 \theta - 2mM \sin \theta = \mu_k^2 M^2 (1 - \sin^2 \theta) = \mu_k^2 M^2 - \mu_k^2 M^2 \sin^2 \theta$$

$$(1 + \mu_k^2) M^2 \sin^2 \theta - 2mM \sin \theta + (m^2 - \mu_k^2 M^2) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{حل} \rightarrow \sin \theta &= \frac{2mM \pm \sqrt{4m^2 M^2 - 4M^2(1+\mu_k^2)(m^2 - \mu_k^2 M^2)}}{2(1+\mu_k^2)M^2} \rightarrow \text{دو صورت} \\ &= \frac{m \pm \sqrt{m^2 - (1+\mu_k^2)(m^2 - \mu_k^2 M^2)}}{M(1+\mu_k^2)} \\ &\sim \frac{m \pm \mu_k \sqrt{M^2 - m^2}}{M(1+\mu_k^2)} \end{aligned}$$

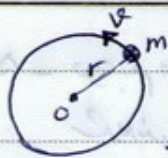
$$\text{برای } m=M: \sin \theta = \frac{2M^2 \pm \sqrt{4M^4 - 4M^4(1+\mu_k^2)(1 - \mu_k^2)}}{2(1+\mu_k^2)M^2} = \frac{2 \pm \sqrt{1 - \mu_k^4}}{2(1+\mu_k^2)} = \frac{1 \pm \mu_k^2}{1 + \mu_k^2}$$

$$\sin \theta = 1 \rightarrow \theta = \pi/2 \quad \text{مانند جسم آویزان (مقرونه)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1 - \mu_k^2}{1 + \mu_k^2} \\ 1 \end{array} \right. \quad \text{مثلاً: } \mu_k = 0.3 \rightarrow \sin \theta = \frac{1 - (0.3)^2}{1 + (0.3)^2} = 0.835 \rightarrow \theta = 56.6^\circ$$

قرین: برای مثال بالا، نسبت $\frac{M}{m}$ را طوری بیابید که برای $\theta = 45^\circ$ و $\mu_k = 0.3$ دو جسم با سرعت یکسان حرکت کنند.

$$\begin{aligned} \frac{M}{m} \equiv n, \theta = 45^\circ, \mu_k = 0.3 \rightarrow \sin \theta &= \frac{n \pm \sqrt{n^2 - n^2(1+\mu_k^2)(1 - n^2\mu_k^2)}}{n^2(1+\mu_k^2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{1 \pm \mu_k \sqrt{n^2(1+\mu_k^2)} - 1}{n(1+\mu_k^2)} \rightarrow 0.4957706n^2 - 1.54126n + 1.09 = 0 \\ n &\approx 2, 1; \quad \frac{2.02087}{1.0879} \end{aligned}$$



$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

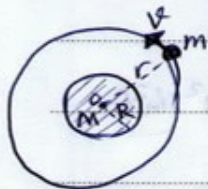
$$F_c = m a_c = m \frac{v^2}{r}$$

حرکت دایره‌ای و گرایش:

$$F_g = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$F_g = G \frac{Mm}{R^2} = mg \Rightarrow \begin{cases} g = G \frac{M}{R^2} \\ G = \frac{gR^2}{M} \end{cases}$$

فرض کنیم m ماهواره‌ای است که با سرعت v در دایره‌ای به شعاع r حول مرکز زمین می‌چرخد. نیروی گرایشی در



$$F_c = F_g$$

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$v = r\omega = \frac{2\pi r}{T}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{gR^2} r^3$$

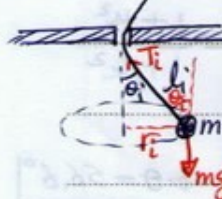
(قانون سوم کپلر)

مثال: فاصله ماه از زمین را بدست آورید. دوره حرکت ماه به دور زمین $27\frac{1}{3}$ روز، $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ و $R = 6368 \text{ km}$

$$r = 383000 \text{ km}$$

است.

مثال: جسم کوچک m در انتهای نخ به طول l که زاویه θ با راستای قائم می‌سازد، یک

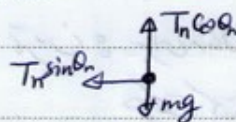


داره افق را طی می‌کند. نخ به طور مداوم از سوراخی که در یک گاهش تعبیه شده است بالا

کشیده می‌شود و کوتاه می‌شود تا طول نهایی آن l_f شده و زاویه نخ با عمود قائم θ_f شود.

رابطه‌ای برای l_f بدست آورید.

فرض کنیم در لحظه t طول نخ l_n و زاویه آن با عمود قائم θ_n باشد، فاصله آن از محور دوران r_n ،



سرعت آن v_n و تنش نخ T_n باشد.

$$T_n \sin \theta_n = m \frac{v_n^2}{r_n}$$

$$T_n \cos \theta_n = mg$$

$$\Rightarrow \tan \theta_n = \frac{v_n^2}{g r_n} \Rightarrow g r_n^3 \tan \theta_n = v_n^2 r_n^2$$

گفته و نیروی ضربه‌ای به سیستم وارد نمی‌شود لذا مکانیزم زاویه‌ای سیستم باید پایسته باشد:

$$L_1 = L_2 \Rightarrow m r_1 v_1 = m r_2 v_2 \Rightarrow r_1 v_1 = r_2 v_2 \Rightarrow r_n v_n = \text{ثابت}$$

$$r_i^3 \tan \theta_i = r_f^3 \tan \theta_f \leftarrow r_n^3 \tan \theta_n = \text{ثابت}$$

$$r_n = l_n \sin \theta_n \Rightarrow (l_i \sin \theta_i)^3 \tan \theta_i = (l_f \sin \theta_f)^3 \tan \theta_f$$

$$l_f = \left[\left(l_i^3 \frac{\sin^3 \theta_i}{\sin^3 \theta_f} \right) \frac{\tan \theta_i}{\tan \theta_f} \right]^{1/3}$$

تمرین: θ_f را برای $l_i = 1 \text{ m}$ ، $\theta_i = 30^\circ$ و $l_f = 0.5 \text{ m}$ محاسبه کنید. سرعت، زمان تناوب و تنش را در این لحظه بدست کنید:

$$\theta_f = 50.94^\circ$$

تمرینات 8

۱- سرعت امواج صوتی (v) در هوا تابع P و ρ چگالی هوا است. با به کارگیری روش آنالیز ابعادی، عبارتی برای v پیدا کنید.

۲- سرعت امواج در یک تار مرتعش (v) تابع تنش T و جرم واحد طول λ است. با آنالیز ابعادی عبارتی برای v پیدا کنید.

۳- زمان تناوب یک سیاره دور خورشید به جرم M با عبارت $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$ داده شده است که a شعاع مدار و

دامه سیاره است. الف) یکای G در I چیست؟ ب) عبارت T را به روش آنالیز ابعادی $T(a, M, G)$ بدست آورید.

۴- وقتی سیالی در یک لوله جریان پیدا می کند، اصطکاک بین سیال و سطح لوله به وسیله ضریب چسبایی η بیان

می شود. η با رابطه $\frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dy}$ تعریف می شود که F نیروی اصطکاک و A و $\frac{dv}{dy}$ گرادیان سرعت

بین لایه های سیال است. الف) یکای η چیست؟ ب) اگر ΔP اختلاف فشار و l و r و η متغیرهای

با Δl باشد، با استفاده از روش آنالیز ابعادی Δl (دهید):

۵- نیروی سطحی را پیدا کنید؛ جرم جسم C برابر با 100 kg است. شتاب اندازه گیری شده توسط ناظر در نگاه A

برابر 100 m/s^2 و شتاب اندازه گیری شده توسط ناظر در نگاه B برابر با 90 m/s^2 است. شتاب در نگاه ثالثی؟

تحت چه شرایطی B می تواند یک دستگاه مختصات واقعی شود؟

۶- در مثلث قطره اگر بین چرخش واکسن ها و ریل اصطکاک با ضریب μ وجود داشته باشد، چه تغییری روی می دهد؟

۷- جسمی به جرم m با سرعت اولیه v_0 به طرف بالای سطح شیبی θ (بزرگتر از زاویه اصطکاک) پرتاب

می شود. فاصله ای را که جسم بالا می رود، زمانی را که به این نقطه می رسد و زمان آنی که به مکان اولیه بر می گردد

پیدا کنید.

۸- ضریب اصطکاک بین m و سطح افقی برابر μ است. شتاب سیستم و تنش طناب را برای وقتی که جرم m :

الف) بین A و B حرکت می کند. ب) بین B و C حرکت می کند.

۹- مردی به جرم M یک سورتیه را که بر یک پای به جرم m در آن نشسته است می کشد. ضریب اصطکاک سورتیه

برف μ و بین پاهای مرد و برف μ_0 است. الف) نمودار روشنی رسم کنید که کدام نیروها وارد بر سورتیه

و مرد دارند؟ دهد. ب) مؤلفه های افقی و عمودی نیرو را وقتی که مرد و سورتیه با شتاب a حرکت

می کنند، محاسبه کنید. ب) شتاب بیشینه ای که مرد می تواند به خود و سورتیه بدهد چقدر است؟

۱۰- با میل AB ، تحت زاویه θ ، جعبه ای را هل می دهیم. ضریب اصطکاک جعبه μ

است. الف) نمودار نیروها. ب) مقدار F لازم برای اینکه جعبه را با سرعت

یکسان حرکت دهد. ب) نشان دهید اگر θ کمتر از زاویه اصطکاک باشد،

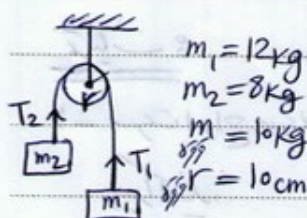
جعبه نمی تواند با تنها هل دادن حرکت کند.

۱۱- با میل AB ، تحت زاویه θ ، جعبه ای را هل می دهیم. ضریب اصطکاک جعبه μ

است. الف) نمودار نیروها. ب) مقدار F لازم برای اینکه جعبه را با سرعت

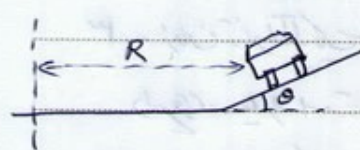
یکسان حرکت دهد. ب) نشان دهید اگر θ کمتر از زاویه اصطکاک باشد،

جعبه نمی تواند با تنها هل دادن حرکت کند.

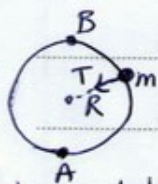


- ۱۱ - الف) گام‌نبردهای وارد (در سیستم) T_1 ، T_2 و a -
 قرقره را یک قرقره توپر فرض کنید ($I_{\text{disk}} = \frac{mr^2}{2}$)

۱۲ - در سوال ۱۱، قرقره را یک صلبه توخالی با همان جرم و شعاع در نظر بگیرید. ($I = mr^2$)



- ۱۳ - اتوبوس در سطح صاف، ضربه اصطکاکی بین چرخ‌ها و جاده می‌باشد.
 سرعت‌های کمینه و بیشینه را برای این که اتوبوس بدون سر خوردن به طرف
 کنارهای جاده بتواند به راه خود بزند، تعیین کنید.



- ۱۴ - چرخش جرم m در صفحه دایره‌ای قائم. الف) تنش نخ در پایین‌ترین و بالاترین (A) و (B) نقطه.
 ب) سرعت کمینه چرخ در نقطه بالایی B را برای این که نخ شل نشود، پیدا کنید.

- ۱۵ - ارتفاع و سرعت ماحول‌های را که همیشه بالای یک نقطه از زمین می‌ماند، تعیین کنید. مسیر دایره‌ای فرض کنید و ارتفاع را بر حسب شعاع زمین R تعیین کنید. چنین ماحول‌هایی به نام ماحول‌های جفرال، در هر ۲۴ ساعت یک بار دور مرکز زمین می‌گردد. بنابراین مکان آن نسبت به یک ایستگاه زمینی یکسان به نظر می‌رسد. یکی از این نوع ماحول‌های فضاپیمائی در نزدیکی گاه‌های نام دارد.



- ۱۶ - مخروطی را با نیم زاویه رأس θ در نظر بگیرید. در حالی که جرم m در داخل آن بدون اصطکاک
 روی یک مسیر دایره‌ای افقی با سرعت v می‌تغرد. نیروها را رسم کنید. شعاع مسیر دایره‌ای را

بر حسب θ ، v و g تعیین کنید.

- ۱۷ - سوال ۱۶ را برای حالتی که سطح دایره‌ای ضربه اصطکاکی می‌باشد، تکرار کنید.

- ۱۸ - جرم خورشید را با فرض اینکه زمین روی یک دایره به شعاع 1.4696×10^8 m حرکت می‌کند و در مدت یک سال یک دور کامل می‌چرخد، تعیین کنید.

فصل دوم: دینامیک در یک بعد

ذره‌ای با جرم m تحت تأثیر نیروهای $F_1, F_2, \dots, F_n$ قرار گرفته است. نیروی خالص وارده بر آن طبق اصل برهم‌ریزی:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

$$\text{حرکت ذره: } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{a}$$

تفاوتی که جرم m ثابت می‌ماند و می‌توان نوشت:

$$x(t) \xrightarrow{\text{حرف}} \dots \text{و } F_x = \sum F_{ix} = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \ddot{x} = m a_x$$

5 پس در یک بعد: $F(x, \dot{x}, t) = m \frac{d^2 x}{dt^2}$

حل این معادله سرقتضیه بسیار مشکل است. حالات ساده‌ای از این معادله را که فقط وابسته به یک متغیر باشد، در نظر خواهیم گرفت:

(1) نیروی اعمال شده ثابت است ($F = \text{const}$).
(2) نیروی اعمال شده تابعی از زمان است ($F = F(t)$).
(3) نیروی اعمال شده تابعی از سرعت است ($F = F(v)$).
(4) نیروی اعمال شده تابعی از مکان است ($F = F(x)$).

شکل‌های دیگر این معادله می‌تواند:

$$F = m \frac{dv}{dt}, \quad F = m v \frac{dv}{dx}$$

$$F = \frac{dp}{dt}$$

10 حالت کلی: $F = \frac{dp}{dt}$

$$p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt$$

اگر نیروی اعمال شده بین دو لحظه t_1 و t_2 عمل کند، با انتگرال گیری:

اگر فاصله t_1 تا t_2 بسیار کوتاه باشد، انتگرال است راست ضرب نیروی F در بازه t_1 تا t_2 است. یعنی تغییر مکانی حاصل برابر است با ضرب داده شده. (قضیه ضرب - مکان).

1) نیروی ثابت

15 چون F ثابت است، پس a نیز ثابت خواهد بود:

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = \text{const.}$$

اگر شرایط اولیه را بدانی، این اعداد به راحتی حل می‌شود و همان نتایج مکانیک مقدماتی را به دست می‌دهد.

فرض کنید در $t=0$ سرعت v_0 و در زمان t سرعت v است.

$$\frac{dv}{dt} = a \rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt \rightarrow v - v_0 = at \rightarrow v = at + v_0$$

با استفاده از $v = \frac{dx}{dt}$ و شرط اولیه $x = x_0, t = 0$:

$$\frac{dx}{dt} = v \rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t v dt = \int_0^t (at + v_0) dt \rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t$$

$$\hookrightarrow x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

از حذف کردن t بین این دو معادله:

اینها معادلات آشنای حرکت انتقالی یک ذره در یک بعد هستند.

(*) یکی از مثال‌های حرکت با نیروی ثابت، سقوط آزاد است. در این حالت g شتاب ناشی از گرانش با مقدار 9.8 m/s^2 و شتاب a می‌شود.

(2) نیروی وابسته به زمان

$$m \frac{dv}{dt} = F(t)$$

در این حالت، F تابع صریحی از t است. در نتیجه:

$$\int_{v_0}^v dv = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt \rightarrow v = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt$$

صورت $v_0 = \frac{dx(t_0)}{dt}$ است، با اینگرایی مجدد، x حاصل می شود. یعنی با فرض $x = x_0$ در $t = t_0$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt \rightarrow x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^t F(t) dt \right) dt$$

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} F(t'') dt''$$

مثال: انتشار امواج رادیویی با الکترونها در یونشرو بازتاب پس امواج رادیویی.

موج با طول موجی λ و الکترونها می توانند در یونشرو 200 km بازتاب آن شده و موج رادیویی با پهنای $E = E_0 \sin(\omega t + \varphi)$ با الکترونها با جرم m و بار e برخورد می کند. هدف از نوشتن موج الکترومغناطیس بر حسب φ و λ فاز اولیه است. این برخورد منجر به یک نیروی F روی الکترون می شود، $F = -eE = -eE_0 \sin(\omega t + \varphi)$ عبارت است از:

$$a = \frac{F}{m} \rightarrow a = \left(\frac{-eE_0}{m} \right) \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow \frac{dv}{dt} = \left(\frac{-eE_0}{m} \right) \sin(\omega t + \varphi)$$

فرض: $t = 0 \rightarrow v = 0$

$$\int_0^v dv = \int_0^t \left(\frac{-eE_0}{m} \right) \sin(\omega t + \varphi) dt \rightarrow v = \left(\frac{+eE_0}{m\omega} \right) \cos(\omega t + \varphi) \Big|_0^t$$

$$\rightarrow v = \left(\frac{eE_0}{m\omega} \right) \cos(\omega t + \varphi) - \left(\frac{eE_0}{m\omega} \right) \cos \varphi = \frac{dv}{dt}$$

فرض: $t = 0 \rightarrow x = 0$

$$\int_0^x dx = \left(\frac{-eE_0}{m\omega} \right) \cos \varphi \int_0^t dt + \left(\frac{eE_0}{m\omega} \right) \int_0^t \cos(\omega t + \varphi) dt$$

$$\rightarrow x = \left(\frac{-eE_0}{m\omega} \right) \cos \varphi t + \left(\frac{eE_0}{m\omega^2} \right) \sin(\omega t + \varphi) - \left(\frac{eE_0}{m\omega^2} \right) \sin \varphi$$

بیانگر حرکت رانشی الکترون با سرعت v و بعضی از شرایط اولیه

حرکت نوسانی با فاصله λ (در حقیقت از شرط اولیه است) و برابر با فرکانس موج ورودی است

حل سوال این است: این گونه نوسانات هم در الکترونها آزاد می تواند در مشخصات این امواج الکترومغناطیس ورودی دیده شود

بخش نوسانی x در قیاس با F که از میدان الکترونیکی امواج ورودی ناشی می شود، 180° اختلاف فاز دارد.

(*) در یک عایق، در فرکانسهای پایین، باها در جهت نیروی اعمال شده جابجا می شوند که این منجر به قطبیدگی باها به طور هم فاز با نیروی اعمالی می شود. در چنین حالتی $\epsilon > 1$ است. ولی در مورد یونشرو که قطبیدگی حاصل، 180° با میدان الکترونیکی اختلاف فاز دارد، $\epsilon < 1$ است.

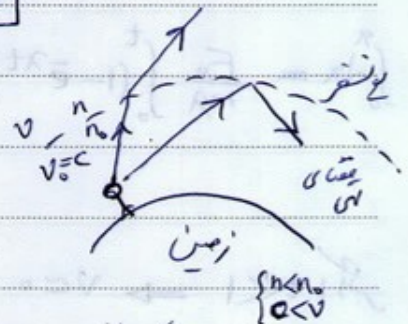
- 1- سرعت فاز (v) امواج الکترومغناطیس در یونسفر کمتر از سرعت نور (c) است.
- 2- ضریب شکست یونسفر برای امواج الکترومغناطیس فرودی کمتر از ضریب شکست فضا آزاد است که موجب انحراف آن می‌آید. ← منجر به بازتاب کل امواج می‌شود.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu}} = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^{1/2} \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{1/2} \rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon/\epsilon_0}}$$

تغییرپذیری این کمیت بستگی به محیط دارد

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0} = \sqrt{K} < 1 \Rightarrow c < v$$

ضریب شکست یونسفر



مثال 8 یک طناب مقبض بین دو گره A و B، هر گره ده تکرار، کشیده شده است. جرم متوسط هر بخش 70 kg است و هر کدام می‌توانند در شروع طناب را با نیروی 800 N بکشند. در شروع، دو گره جداگانه با یکدیگر برای حرکت می‌کنند. اما افراد خسته می‌شوند و نیروی کشش هر کدام به صورت $F = 800 e^{-t/20}$ کاهش می‌یابد. در آن زمان ضریب کشش می‌تواند است. برای گره A، $T_A = 20 \text{ s}$ و برای گره B، $T_B = 10 \text{ s}$ است. حرکت را توصیف کنید یعنی $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و نتایج را توضیح دهید.

$$F_A = 10 \times 800 e^{-t/20}, \quad F_B = 10 \times 800 e^{-t/10} \Rightarrow F_{\text{net}} = m \frac{dv}{dt}$$

$$8000(e^{-t/20} - e^{-t/10}) = 20 \times 70 \frac{dv}{dt}$$

$$\text{انتگرال گیری: } \frac{40}{7} (-20 e^{-t/20} + 10 e^{-t/10}) \Big|_0^t = v \Big|_0^t$$

$$57.1 (-20 e^{-t/20} + 20 + 10 e^{-t/10} - 10) = v$$

$$57.1 (1 + e^{-t/10} - 2 e^{-t/20}) = v \Rightarrow \frac{dx}{dt}$$

$$\text{انتگرال گیری: } x = 57.1 \int (1 + e^{-t/10} - 2 e^{-t/20}) dt = 57.1 (t - 10 e^{-t/10} + 40 e^{-t/20}) \Big|_0^t$$

$$x = 57.1 (t - 0 - 10 e^{-t/10} + 10 + 40 e^{-t/20} - 40)$$

$$x = 57.1 (t - 10 e^{-t/10} + 40 e^{-t/20} - 30)$$

مقادیر x و v را بعد از یک دقیقه محاسبه می‌کنیم:

$$t = 60 \text{ s} \rightarrow v = 51.6 \text{ m/s}$$

$$x = 1825 \text{ m}$$

ایمان کنید
چون مقدار کمی از نیرو کشش می‌کشد نمی‌تواند چنین نیروی

مسئله: توده‌ای به جرم m در روی یک سطح بدون اصطکاک در مدار دایره‌ای سکون است. در $t=0$ یک نیروی گاهشی به صورت $F = F_0 e^{-\lambda t}$ به آن اعمال می‌شود ($\lambda > 0$ و ثابت). $v(t)$ و $x(t)$ را محاسبه کنید. این

مقادیر را برای (الف) $t \ll 1$ و (ب) $t \gg 1$ پیدا کنید.

$$m \frac{dv}{dt} = F_0 e^{-\lambda t} \rightarrow \int_{v=0}^v dv = \int_0^t \frac{F_0}{m} e^{-\lambda t} dt \rightarrow v = \frac{F_0}{m} \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \Big|_0^t$$

$$v = -\frac{F_0}{m\lambda} e^{-\lambda t} + \frac{F_0}{m\lambda}$$

$$v = \frac{F_0}{m\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \quad \frac{dx}{dt}$$

$$\int_0^x dx = \frac{F_0}{m\lambda} \int_0^t (1 - e^{-\lambda t}) dt \rightarrow x = \frac{F_0}{m\lambda} \left(t - \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right) \Big|_0^t$$

$$x = \frac{F_0}{m\lambda} \left(t - 0 + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$x = \frac{F_0}{m\lambda^2} (e^{-\lambda t} - 1) + \frac{F_0}{m\lambda} t$$

اگر $t \ll 1 \Rightarrow v \approx 0$, $x \approx 0$

اگر $t \gg 1 \Rightarrow v \approx \frac{F_0}{m\lambda}$, $x \approx \frac{F_0}{m\lambda} t - \frac{F_0}{m\lambda^2}$

تمرین: توده‌ای به جرم m در مدار دایره‌ای سکون است. در $t=0$ یک نیروی $F = F_0(1 - te^{-\lambda t})$ به آن اعمال می‌شود. جهت، سرعت و مکان توده را برای زمان پیدا کنید.

3) نیروی وابسته به سرعت

در زندگی روزمره موارد زیادی وجود دارند که نیروی وارد بر جسم تابع سرعت است. مثلاً وقتی جسم در هوا سقوط می‌کند، علاوه بر نیروی گرانشی، نیروی مقاومت هوا نیز بر روی جسم اثر می‌کند که تابع سیمیدتی از سرعت جسم است. این است که در مورد اجسام متحرک در سیالات (مایعات و جامدات) نیز صدق می‌کند. چنین نیروها را مقابله کننده با حرکت اجسام را «نیروهای چسبناکی» یا «مقاومت» می‌گویند. می‌توان نوشت:

$$F(v) = m \frac{dv}{dt} \rightarrow F(v) = m \frac{dv}{dx} \times \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx}$$

با داشتن $F(v)$ ، هر کدام از این دو معادله را می‌توان برای تحلیل حرکت، حل کرد. به طوری که:

$$F(v) = m \frac{dv}{dt} \rightarrow dt = m \frac{dv}{F(v)} \xrightarrow{\text{انگزال گیری}} \int dt = m \int \frac{dv}{F(v)} \rightarrow v(t) = ?$$

پشت می‌آید.

$$F(v) = mv \frac{dv}{dx} \rightarrow dx = m v \frac{dv}{F(v)} \xrightarrow{\text{انگزال گیری}} \int dx = m \int \frac{v dv}{F(v)} \rightarrow v(t) = ?$$

پشت می‌آید.

ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که فقط نیروی اصطکاکی وجود داشته باشد و بعد حالات واقعی‌تر را لحاظ می‌کنیم. اتومبیل را در نظر می‌گیریم که روی یک سطح صاف بدون اصطکاک با سرعت v_0 حرکت می‌کند. ناگهان موتور آن خاموش می‌شود و مقاومتی به صورت $F_r(v) = -kv$ به آن اعمال می‌شود. با این فرض که در $t=0$ سرعت اتومبیل $v=v_0$ باشد، x و a را محاسبه خواهیم کرد.

$$F_r(v) = -kv \equiv m \frac{dv}{dt} \rightarrow -kv dt = m dv \rightarrow \int_0^t dt = -\frac{m}{k} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v}$$

از ریاضی: $\int \frac{dx}{x} = \ln(x)$

$$t - 0 = -\frac{m}{k} \ln(v) \Big|_{v_0}^v = -\frac{m}{k} \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) \rightarrow -\frac{kt}{m} = \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) \rightarrow v = v_0 e^{-kt/m}$$

یعنی سرعت به صورت نمایی با زمان کاهش می‌یابد.

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v dt \rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_0 e^{-kt/m} dt$$

$$x - x_0 = v_0 \left(-\frac{m}{k}\right) e^{-kt/m} \Big|_0^t$$

فرض $x_0 = 0$

$$x = \frac{mv_0}{k} (1 - e^{-kt/m})$$

در $t=0$: $v=v_0$ و $x=0$

در $t=\infty$: $v \approx 0$ و $x \approx \frac{mv_0}{k} \equiv x_{\text{نامرئی}}$

جسم هرگز دورتر از x نمی‌رود. از این روابط مشخص است که حرکت با x می‌تواند ادامه داشته باشد و اتومبیل با یک ضربه زودتر از $t=\infty$ به حال سکون می‌رسد.

یک واقعیت جالب تیر وجود دارد که برای دین آن باید عاقلانه در یک بازه زمانی کوتاه بعد از این که نیروی مقاوم شروع به اعمال روی جسم کند، بررسی کنیم. اما آن بسیار کم یعنی روابط v و x حاصل را به تیلور دهم:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$v = v_0 e^{-kt/m} \quad \text{ب} \rightarrow v = v_0 \left(1 - \frac{kt}{m} + \frac{k^2 t^2}{2m^2} + \dots \right)$$

$$v = v_0 - \frac{kv_0}{m} t + \frac{k^2 v_0}{2m^2} t^2 + \dots$$

$$v = v_0 + \left(\frac{F_r}{m} \right) t + \dots$$

$$v = v_0 + a_r t + \dots$$

$$x = \frac{mv_0}{K} (1 - e^{-kt/m}) \quad \text{ب} \rightarrow x = \frac{mv_0}{K} \left[1 - \left(1 - \frac{kt}{m} + \frac{k^2 t^2}{2m^2} + \dots \right) \right]$$

$$x = \frac{mv_0}{K} \left(\frac{kt}{m} - \frac{k^2 t^2}{2m^2} + \dots \right)$$

$$x = v_0 t - \frac{kv_0}{2m} t^2 + \dots$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} \left(\frac{F_r}{m} \right) t^2 + \dots$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + \dots$$

اگر از جهات مرتبط بالاتر صرف نظر کنیم، می‌سیم به حرکت ده‌ای که تحت تأثیر نیروی ثابت F_r (به شرط اینکه « t » حرکت می‌کند).

مثالی واقعی: وابستگی نیروی کند از به v معمولاً تابعی پیچیده است ولی در محل می‌توان از تقریب توانی

$$F_r = -kv^n$$

زیر برای توانهای مختلف سرعت استفاده کرد:

(*) اگر n فرد باشد، علامت منفی و اگر n زوج باشد، علامت مثبت و جهت قابل استنباط است.

ولی علامت + و - را باید طوری انتخاب کرد که F_r در خلاف جهت حرکت باشد.

(*) این اجماع کوچکی که با سرعتی کمتر از 25 m/s در هوا حرکت می‌کنند، تجربه نشان داده که $n \approx 1$

توافق خوبی با نتایج تجربی دارد، در حالی که برای سرعتی بالاتر از 25 m/s و کمتر از 32 m/s ،

$n \approx 2$ بهتر است.

حال سقوط جسم را در هوا بررسی می‌کنیم که نیروی مقاوم آن با v متناسب است؛ یعنی $F_r = -kv$.

پس نیروی خالص واد بر جسم: $F = F_g + F_r = -mg - kv$

$$\rightarrow m \frac{dv}{dt} = -mg - kv \quad \text{فرض: } t=0, v=v_0$$

$$\int dt = \int \frac{-m dv}{mg + kv}$$

$$\frac{m}{K} \ln \left(\frac{mg + kv}{mg} \right) = -\frac{m}{K} \ln \left(\frac{mg - kv}{mg} \right)$$

برای مثال اگر: $mg + Kv = u \rightarrow K dv = du$

پس: $-\int \frac{m du}{mg + Kv} = -\int \frac{m du}{Ku} = -\frac{m}{K} \int \frac{du}{u} = -\frac{m}{K} \ln u$

$t = -\frac{m}{K} \ln(mg + Kv) \Big|_{v_0}^v = -\frac{m}{K} \ln\left(\frac{mg + Kv}{mg + Kv_0}\right)$

برای t ، v یا v بدست می آید:

$-\frac{Kt}{m} = \ln\left(\frac{mg + Kv}{mg + Kv_0}\right) \xrightarrow{\ln}$ $e^{-Kt/m} = \frac{mg + Kv}{mg + Kv_0} \rightarrow mg + Kv = (mg + Kv_0)e^{-Kt/m}$

$v = -\frac{mg}{K} + \left(\frac{mg}{K} + v_0\right)e^{-Kt/m}$

$v = -\frac{mg}{K}(1 - e^{-Kt/m})$ اگر $v_0 = 0$ بود: (*)

$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v dt \rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t \left[-\frac{mg}{K} + \left(\frac{mg}{K} + v_0\right)e^{-Kt/m}\right] dt$

$x - x_0 = -\frac{mg}{K}t + \frac{m}{K}\left(\frac{mg}{K} + v_0\right)e^{-Kt/m} \Big|_0^t$

$x = x_0 - \frac{mg}{K}t + \left(\frac{m^2g}{K^2} + \frac{mv_0}{K}\right)(1 - e^{-Kt/m})$

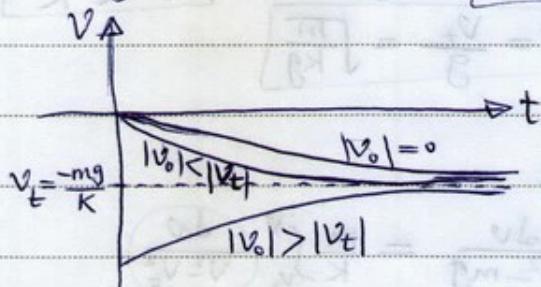
$t = 0: v = v_0, x = x_0$

$t = \infty: v = -\frac{mg}{K}, x = x_0 - \frac{mg}{K}t + \left(\frac{m^2g}{K^2} + \frac{mv_0}{K}\right)$
($t \gg \frac{m}{K}$)

سرعت حدی (v_t)

سرعت حدی: سرعت جسم در حالتی که نیروی کشش از نیروی وزن جسم موازنه شده باشد. در این حالت نیروی خالص وارد بر جسم صفر می شود و سرعت از این مقدار غلظت نمی رود.

$F_g + F_r = 0 \rightarrow -mg + Kv = 0 \rightarrow v = -\frac{mg}{K} = v_t$



سرعت برای $t \rightarrow \infty$

جسم در مقایسه با سرعت حدی

وجود دارد:

$\begin{cases} |v_0| = 0 \\ |v_0| < |v_t| \\ |v_0| > |v_t| \end{cases}$

$e^{-Kt/m} \rightarrow \frac{m}{K} \sim t$

از سرعت حدی: $\frac{m}{K} \sim \frac{v_t}{g} \Rightarrow \frac{m}{K} \sim t$

زمان مشخصه: در توان اکسپونانسیل، $\frac{m}{K}$ از

چند زمان است که به آن زمان مشخصه

معمولاً با τ نشان می دهند.

$\tau = \frac{m}{K}$ ✓

باز نویسی: $v = -v_t + (v_t + v_0)e^{-t/\tau}$

$x = x_0 - v_t t + (g\tau^2 + v_0\tau)(1 - e^{-t/\tau})$ $\xrightarrow{v_0=0} \begin{cases} v = -v_t(1 - e^{-t/\tau}) \\ x = x_0 - v_t t + g\tau^2(1 - e^{-t/\tau}) \end{cases}$

$$t = \tau \rightarrow v = -v_t(1 - e^{-1}) = 0.63 v_t$$

تقریباً زمان مشخصه: زمانی که طول مسیر را جسم به سرعت خود برسد.

$$t \ll \tau: e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

رشته سری روابط حاصل:

$$v = -v_t + (v_t + v_0) e^{-t/\tau} \sim -v_t + (v_t + v_0) \left(1 + \frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{2\tau^2} + \dots\right)$$

$$v \sim -v_t + (v_t + v_0) \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \sim \frac{v_0}{g}$$

$$v \sim v_0 - v_t \frac{t}{\tau} - v_t \frac{t^2}{2\tau^2}$$

$$v \sim v_0 - gt$$

$$x \sim x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

یعنی برای t کوچک، اثر مقاومت هوا قابل چشم پوشی است. از طرف دیگر برای t بزرگ $(t \gg \tau)$:

$$t \gg \tau: \begin{cases} v \sim -v_t \\ x \sim x_0 - v_t t + (g\tau^2 + v_0\tau) \Rightarrow x \sim x_0 + v_0\tau + (g\tau^2 - gt\tau) \end{cases}$$

exp منفرجه

برای اجسام کوچک، مترام و سنگین، تقریب بهتری وجود دارد که در آن نیروی کندش را با v^2 مناسب است.

$$F_r + F_g = m \frac{dv}{dt} \quad \text{بالا و زیر} \quad kv^2 - mg = m \frac{dv}{dt}$$

$$\text{سرعت صاف: } kv_t^2 = mg \rightarrow v_t = \sqrt{\frac{mg}{K}}$$

$$\text{زمان مشخصه: } \tau = \frac{v_t}{g} = \sqrt{\frac{m}{Kg}}$$

$$F = m \frac{dv}{dt} = kv^2 - mg$$

برای جسم سقوط کننده:

$$\int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{m dv}{kv^2 - mg} = \frac{m}{K} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2 - v_t^2}$$

$$\text{از اینجاست: } \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$t - 0 = \left(\frac{m}{K} - \frac{1}{v_t} \right) \tanh^{-1}\left(\frac{v}{v_t}\right) \Big|_{v_0}^v$$

$$t = -\tau \tanh^{-1}\left(\frac{v}{v_t}\right) + cte$$

$$-\frac{t - cte}{\tau} = \tanh^{-1}\left(\frac{v}{v_t}\right) \rightarrow \tanh\left(\frac{t - cte}{\tau}\right) = -\frac{v}{v_t}$$

$$v = -v_t \cdot \tanh\left(\frac{t - cte}{\tau}\right)$$

شرایط اولیه ای مناسب در نظر بگیریم. $x_0 = 0, v_0 = 0, t = 0$

$$v = -v_t \tanh\left(\frac{t - ct_0}{\tau}\right) \Rightarrow 0 = \tanh^{-1}\left(\frac{-ct_0}{\tau}\right) \Rightarrow ct_0 = 0$$

پس:
$$v = -v_t \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right) = -v_t \frac{e^{t/\tau} - e^{-t/\tau}}{e^{t/\tau} + e^{-t/\tau}}$$

رفتار عجیبی:

5 $t \gg \tau$: $v = -v_t = -\sqrt{\frac{mg}{K}}$

$t \ll \tau$: $v = -gt$

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int v dt = -v_t \int_0^t \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right) dt$$

از ریاضی: $\int \tanh x dx = \int \frac{\sinh x dx}{\cosh x} \xrightarrow{\cosh x = u} \int \frac{du}{u} = -\ln(\cosh x)$

پس: $x - x_0 = -\frac{m}{K} \ln(\cosh(\frac{t}{\tau})) \Big|_0^t$

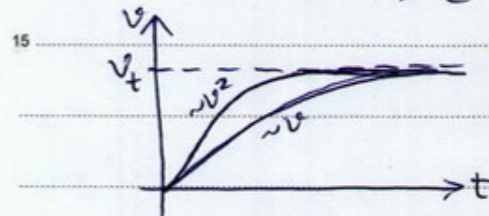
10 $t = 0 \rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow x = -\frac{m}{K} \ln(\cosh(\frac{t}{\tau}))$

رفتار عجیبی:

$t \ll \tau$: $x = -\frac{1}{2}gt^2$

$t \gg \tau$: $x = \frac{m}{K} \ln(2) - v_t t$

(*) مشخص است که اگر نیروی کندناز متناسب با v^2 باشد، جسم سریع تر به سرعت حدی خود می رسد.



مثال 8: گلوله ای به جرم m با سرعت v_0 در روی یک سطح افقی که نیروی کندناز آن با رابطه دوم سرعت خطای متناسب است، ترمز می شود. v_0 را بدست آورید در مورد هرگونه محدودیتی بحث کنید.

20 $F_r = -K\sqrt{v} \rightarrow m \frac{dv}{dt} = -Kv^{1/2} \rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^{1/2}} = \int_0^t \frac{-K}{m} dt$

$$2(v^{1/2} - v_0^{1/2}) = -\frac{K}{m}t$$

$$\rightarrow v = \left(v_0^{1/2} - \frac{K}{2m}t\right)^2$$

$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int v dt = \int \left(v_0^{1/2} - \frac{K}{2m}t\right)^2 dt = \int_0^t \left(v_0 - \frac{K}{m}v_0^{1/2}t + \frac{K^2}{4m^2}t^2\right) dt$

$$x - x_0 = v_0 t - \frac{Kv_0^{1/2}}{2m}t^2 + \frac{K^2}{12m^2}t^3$$

25

نقطه توقف: $v = 0 \rightarrow t = \frac{2m}{K} v_0^{1/2} \equiv t_{max}$

این معادلات t_{max} رفتار جسم را به خوبی توصیف می کنند و بعد از آن جسم سکن خواهد بود.

سرانه فاصله: $x = x_0 + \frac{2m}{3K} v_0^{3/2}$

تقریب: مثل قبل را برای $F = -kx^{3/2}$ تکرار کنید.

~~اینجا خطا است~~

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx^{3/2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

$$(dx)^{1/2} = \frac{dx}{dt}$$

$$\int \frac{dx}{x^{3/2}} = \int -kx^{3/2} dt$$



$$F = -kx^{3/2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

(4) نیروهای وابسته به مکان

وضعیتی که زیادی وجود دارد که در آن نیرو بستگی به مکان جسم دارد. از مثالهای نیروهای وابسته به مکان می توان از نیروی گرانشی، نیروی کوئلی و نیروهای کشسان (کشش و تراکم) نام برد.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x) \quad \text{یا} \quad m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx} = F(x) \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = F(x)$$

$$\frac{dK}{dx} = F(x) \xrightarrow{\text{انتگرال}} K_2 - K_1 = \int_{x_0}^x F(x) dx \quad (\star)$$

کار انجام شده در جابجایی x تا x_0

$$F(x) = - \frac{dV(x)}{dx}$$

در این مرحله مناسب است که یک تابع پتانسیل $V(x)$ معرفی کنیم که:

$$V(x) = - \int_{x_0}^x F(x) dx \quad \text{یعنی: } V(x) \text{ به نقطه } x \text{ از نقطه } x_0 \text{ به نقطه مرجع دخواه } x_0$$

پس طبق این تعریف، کار انجام شده در مسیر x تا x_0 عبارت است از:

$$10 - \int_{x_0}^x F(x) dx = - \int_{x_0}^x - \frac{dV(x)}{dx} dx = + \int_{x_0}^x dV(x) = + \int_{x_0}^{x_0} dV(x) + \int_{x_0}^x dV(x)$$

$$= -V(x_0) + V(x) = V(x) - V(x_0)$$

$$K - K_0 = -[V(x) - V(x_0)]$$

مقرر دادن در $(\star)$:

$$\boxed{K + V(x) = K_0 + V(x_0) \equiv E} \quad \text{ثابت}$$

$$\text{یعنی: } \boxed{\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) \equiv E}$$

بنیاد کند که اگر در فضای تحت تأثیر یک نیروی وابسته به مکان حرکت کند، مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل در طول حرکتش ثابت باقی می ماند.

انرژیهای پایدار

قانون پایستگی انرژی

(*) برای نیروهای پایدار، تابع انرژی پتانسیل وجود ندارد. مثلاً نیروی اصطکاک

$$F = F(x)$$

(*) از حل معادله پایستگی انرژی، می توان حرکت ذره را توصیف نمود:

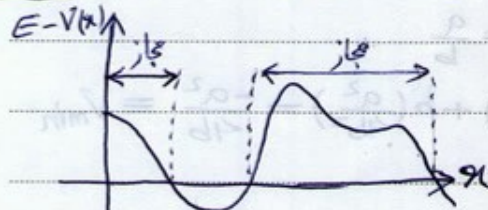
$$AA \quad v = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}$$

$$\Rightarrow t - t_0 = \int \frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}} \quad (AA\star)$$

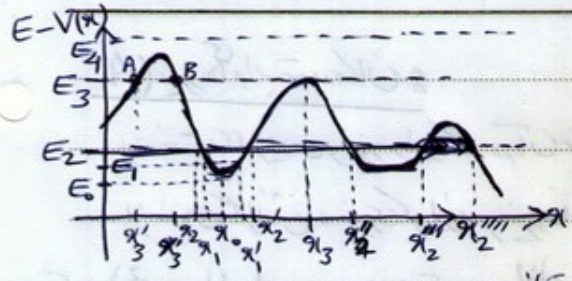
مقادیر از x امکانپذیر است که برای آنها $E - V(x)$ مثبت باشد.

(محدوده مجاز حرکت)

(*) تابع $\frac{1}{2} mv^2 + V(x)$ انتگرال انرژی معادله حرکت $m \frac{dv}{dt} = F(x)$ نامیده می شود و چنین انتگرالی یک ثابت حرکت نامیده می شود.



$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} - F(x) &= 0 \\ mv \frac{dv}{dt} - F(x) v &= 0 \\ \int mv \frac{dv}{dt} dt - \int F(x) \frac{dx}{dt} dt &= cte \\ \frac{1}{2} mv^2 + V(x) &= cte \end{aligned}$$



تفسیر نمودار:

$E = E_0$: تنها در نقطه x_0 است $E_0 - V(x) = 0$ است و از x_0 باز می آید.

تعادل پایدار

$V = 0$ است، یعنی ذره در $x = x_0$ ساکن است.

$E = E_1$: برای $x_1 < x_0$ و $x_1 > x_0$ سرعت ذره موجود است و ذره می تواند

در این ناحیه ها حضور داشته باشد. پس، ذره با انرژی E_1 می رود می شود که در چاه پتانسیل بین x_1 و x_2 حرکت کند. در ضمن حرکت، ذره در این نقاط مرزی، به طرف عقب باز می آید می شود. پس نقاط x_1 و x_2 را نقاط بازگشت می نامند که از حل $E_1 - V(x) = 0$ بدست می آیند. سرعت ذره در این نقاط صفر است.

تعادل خنثی

در این بازه قضایی، وقتی $V(x)$ تغییر کند، سرعت ذره نیز تغییر می کند.

$E = E_2$: دو بازه مجاز برای حرکت وجود دارد: بازه x_2 تا x_3 و بازه x_4 تا x_5 . البته در بازه x_2 تا x_3 حرکت با سرعت ثابت.

$E = E_3$: یک بازه حرکت قبل از نقطه A وجود دارد (0 تا x_3) و یک بازه حرکت تر بعد از نقطه B (x_3 تا ∞).

در این بازه، در نقطه x_3 ذره به تعادل موضعی می رسد که البته یک تعادل ناپایدار است.

در محدوده x_3 تا x_4 به ازای انرژی های $E_3 \leq E$ حرکت رفت و برگشتی وجود خواهد داشت.

اگر ذره به ناحیه سمت راست x_3 حرکت کند، حرکتی بدون بازگشت را تجربه خواهد کرد. بخوبی حرکت آن تیر چینه است: تا x_2 سرعت آن افزایش می یابد، از x_2 تا x_3 سرعت آن ثابت، تا مقده بعدی سرعت آن کاهش می یابد و بعد از آن مجدداً افزایش خواهد بود.

$E = E_4$: ذره ای با این انرژی می تواند در همه جا حرکت کند. وقتی از روی پشته ها عبور کند، کند می شود و در عبور از دره ها تند می شود.

مثال: ذره ای به جرم m تحت تأثیر نیروی $F = a - 2bx$ که a و b ثابت هستند، قرار دارد. الف) انرژی پتانسیل $V(x)$ را بیابید.

ب) نمودارهای $F(x)$ و $V(x)$ را ترسیم کنید. تفسیر حرکت برای مقادیر مختلف انرژی؟

الف) از روی F ، $V(x)$ را می توان یافت:

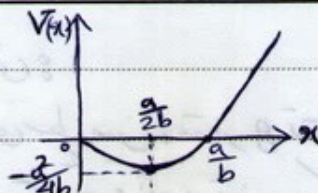
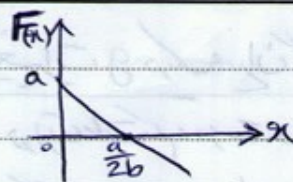
$$V(x) = - \int F dx = - \int (a - 2bx) dx$$

$$= -ax + bx^2$$

ب) می توان نقاطی با $V = 0$ را پیدا کرد:

$$V(x) = 0 \rightarrow bx^2 - ax = 0 \rightarrow x = 0, x = \frac{a}{b}$$

$$F(x) = 0 = \frac{dV(x)}{dx} \rightarrow x = \frac{a}{2b} \rightarrow V = -a\left(\frac{a}{2b}\right) + b\left(\frac{a^2}{4b^2}\right) = -\frac{a^2}{4b} \equiv V_{min}$$



$E < V_{\min}$: حرکت امکان ندارد.

$V_{\min} < E < 0$: حرکت بین $x=0$ و $x=a/b$ محدود است.

نقطه بازگشت وجود دارد.

$E > 0$: حرکت بین $x=0$ و $x=a/b$ مجاز وجود دارد که از رابطه $V(x)=E=-ax+bx^2$ بدست می آید.

مثال ۵: مثال را برای $F=a-2bx^2$ تکرار کنید؟

حرکت تحت اثر یک نیروی بازگرداننده خطی:

حرکت یک ذره را تحت تأثیر یک نیروی بازگرداننده خطی به شکل $F(x) = -kx$ در نظر می گیریم. این معادله بیان از قانون هوک است. همای از این حرکت، حرکت یکنواخت و متناوب و حرکت حاصل، هماهنگ ساده است.

مطالعه را با روش انرژی پیش می بریم. نقطه مرجع و تیر نقطه تعادل را در مبدأ $(x=0)$ در نظر می گیریم.

$$V(x) = -\int_0^x F(x) dx = -\int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2$$

انرژی کل یک ثابت حرکت است. زیرا:

$$mv \frac{dv}{dx} = F(x) = -kx \rightarrow mv dv = -kx dx$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = -\frac{1}{2} kx^2 + cte$$

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = cte \equiv E$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - \frac{1}{2} kx^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} (1 - \frac{k}{2E} x^2)}}$$

با شرط اولیه $x=x_0, t=0$:

$$\frac{\sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \theta d\theta}{\sqrt{\frac{2E}{m} \sqrt{1 - \sin^2 \theta}}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \sqrt{\frac{m}{k}} (\theta - \theta_0)$$

$$\sqrt{\frac{k}{2E}} x = \sin \theta \rightarrow \sqrt{\frac{k}{2E}} dx = \cos \theta d\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ تعریف}$$

$$t = \frac{1}{\omega} (\theta - \theta_0) \rightarrow \theta = \omega t + \theta_0$$

$$\sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x \right) = \omega t + \theta_0$$

$$\sqrt{\frac{k}{2E}} x = \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\omega t + \theta_0)$$

دامنه A

$$x_0 = A \sin \theta_0 \text{ و } E = \frac{1}{2} kA^2$$

تغییرات و درک میدان گرانشی

در ارتفاعات کم، درت در بالای سطح زمین، مقدار g تقریباً ثابت و برابر با 9.8 m/s^2 است ولی در فاصله‌های بزرگ در بالای سطح زمین، مقدار g با فاصله تغییر می‌کند و می‌تواند به روش (های) محاسبه شود. طبق قانون گرانش نیوتن، نیروی وزن یک جسم به جرم m در یک فاصله x از مرکز زمین (به جرم M) عبارت است از:

$$F(x) = -G \frac{Mm}{x^2}$$

$$m v \frac{dv}{dx} = -G \frac{Mm}{x^2} \rightarrow \int m v dv = -G M m \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{x} = \text{cte} \equiv E$$

$$V(x) = -G \frac{Mm}{x}$$

کردن: $V(x) = -\int_{x_s}^x F(x) dx = -\int_{\infty}^x -G \frac{Mm}{x^2} dx = -G \frac{Mm}{x}$
نقطه مرجع: ∞

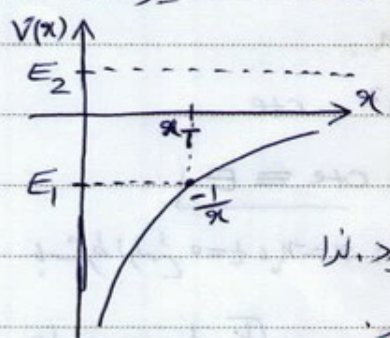
$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v dt$$

$$\int_0^t dt = \int_0^x \frac{dx}{v} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E + G \frac{Mm}{x})}}$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E + G \frac{Mm}{x})}$$

اوپر بالا
اوپر پایین

حسابه این معادله به این روش نیست. یک تعبیر نموداری فقط ارائه می‌کنیم.



$E < 0$: حرکت با یک نقطه بازگشت - مقید است. یعنی برای $E = E_1$

جسم تا ارتفاع $x = x_T$ بالا می‌رود، متوقف می‌شود و برمی‌گردد.

$E > 0$: نقطه بازگشتی وجود ندارد و جسم هرگز به طرف زمین بر نمی‌گردد. لذا

برای کمینه انرژی $E = 0$ ، سرعت مینماظر است با سرعت فرار.

نقطه بازگشت: $\begin{cases} v=0 \\ x=x_T \end{cases} \rightarrow E = -G \frac{Mm}{x_T} \rightarrow x_T = -G \frac{Mm}{E} > 0$

فرض کنیم جسم از ارتفاع $x = x_0$ با سرعت اولیه منفی می‌رود:

$$\frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{x} = \text{cte} \xrightarrow{v=0, x=x_0} -G \frac{Mm}{x_0} = \text{cte}$$

جایگزینی x_0 با x در $E = 0$: $\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - G \frac{Mm}{x} = -G \frac{Mm}{x_0} \rightarrow \dot{x}^2 = 2GM \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right)$

فرض کنیم g مقدار ثابت ناشی از گرانش در سطح زمین ($x=R$) باشد، پس:

$$F_G = F_g \quad \text{یا} \quad -G \frac{Mm}{R^2} = -mg$$

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} \quad \text{یا} \quad G = g_0 \frac{R^2}{M}$$

$x = R+r$, $\dot{x} = \dot{r}$, $x_0 = R+h$ معمولاً فاصله از سطح زمین مد نظر قرار می‌گیرد:

$$\dot{x}^2 = 2g_0 R^2 \left(\frac{1}{R+r} - \frac{1}{R+h} \right)$$

برای سطح زمین $r=0$ ، $v=v_0$ می گیریم و:

$$v_0^2 = 2gR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)$$

$$= 2gR \left(1 - \frac{R}{R+h} \right) = 2gR \left(1 - \left(1 + \frac{h}{R} \right)^{-1} \right)$$

اگر $h \ll R \rightarrow \left(1 + \frac{h}{R} \right)^{-1} \sim 1 - \frac{h}{R} \Rightarrow v_0^2 = 2gh$

می توانیم با قرار دادن $h = \infty$ ، سرعت فرار از جاذبه زمین را حساب کرد:

$$v^2 = 2gR \left(1 - \frac{R}{R+h} \right) \rightarrow v_e^2 = 2gR \equiv 2 \frac{GM}{R} = 11 \text{ km/s}$$

در سطح زمین $E=0 \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = V(h=0) \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R}$

$$\rightarrow v_e^2 = \frac{2GM}{R}$$

مسائل:

۱- نیروی F وارد بر ذره‌ای به جرم m با توابع زیر داده شده است:

(الف) $F(x,t) = f(x)g(t)$ (ب) $F(x,t) = f(x)g(t)$ (ج) $F(x,t) = f(x)g(t)$

معادلات دیفرانسیل توصیف کننده این وضعیت را بنویسید. کدام یک از معادلات دیفرانسیل می‌تواند حل شود و حرکت ذره را توصیف نماید؟

۲- ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروها داده شده قرار دارد. این معادلات را حل کنید و حرکت ذره را توصیف کنید.

(الف) $F(x,t) = k(x+t^2)$ که $t=0, x=x_0$ (ب) $F(x,t) = kx^2t$ که $t=0, x=x_0$

(ج) $F(x,t) = k(ax+t)$ که $t=0, v=v_0$ (د) $F(x,x) = \frac{ax^2}{x}$

(ه) $F(x,x,t) = k(x+x_t)$

۳- جرم به جرم m در روی یک سطح بدون اصطکاک در حال سکون است. در زمان $t=0$ نیروی فزاینده $F=kt^2$ به آن اعمال می‌شود. سرعت و جایگاه جسم را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید.

۴- جرم به جرم m در روی سطح بدون اصطکاک در عمود در حال سکون است. در لحظه $t=0$ یک نیروی $F=F_0 e^{-kt}$ به آن وارد می‌شود. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید. این مقادیر را وقتی که t خیلی کوچک و ب) خیلی بزرگ باشد پیدا کنید.

۵- ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروی $F = F_0 e^{\lambda t} \sin(\omega t + \phi)$ قرار دارد. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید. سرعت حدی در این مورد چقدر است؟

۶- گلوله‌ای به جرم m با سرعت v_0 در روی یک سطح افقی پرتاب می‌شود. نیروی کندساز متناسب با ریشه دوم سرعت لحظه‌ای است. سرعت و مکان گلوله را بر حسب زمان پیدا کنید. در باره مقادیر حدی بحث کنید.

۷- جرم به جرم m با سرعت v_0 در روی یک سطح شیب دار با زاویه شیب θ به طرف بالا پرتاب می‌شود. اگر نیروی کندساز به صورت $F = -kv$ باشد، قبل از به حال سکون در آمدن چه مسافتی را طی خواهد کرد.

اگر در برگشت تیر با همین نیروی معکوست رو به رو باشد، چه مدت طول می‌کشد تا به محل اول خود برگردد؟

۸- حرکت یک کشتی به وسیله یک نیروی اصطکاکی $F(v)$ کند می‌شود. سرعت آن طبق رابطه $v = k(t-t_0)^3$ می‌باشد. $F(v)$ را محاسبه کنید.

۹- موتور یک قایق وقتی سرعت آن v است خاموش می‌شود. از این به بعد حرکت قایق در اثر یک نیروی کندساز $F = C e^{kv}$ کند می‌شود. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید. چه مدتی زمان می‌برد تا قایق متوقف شود و چه فاصله‌ای را تا توقف طی می‌کند؟

۱۰- ذره‌ای به جرم m با سرعت اولیه v_0 در حالی که تحت تأثیر $F = m(kv + cv^3)$ قرار دارد، شروع به حرکت می‌کند. C و k مثبت اند. $x(t)$ را بیابید.

۱۱- جسمی به جرم m از ارتفاع h سقوط می کند. اگر الف) مقاومت هوا نباشد، ب) مقاومت هوا متناسب با سرعت لحظه ای باشد، ب) مقاومت هوا متناسب با مربع سرعت لحظه ای باشد، سرعت آن را وقتی به زمین می رسد، محاسبه کنید؟

۱۲- با استفاده از قانون پایستگی انرژی، معادلات عمومی حرکت برای اجسام با سقوط آزاد را بدست آورید.

۱۳- ذره ای به جرم m با نیرویی که با x معکوس مجذور فاصله متناسب است، یعنی $F = -\frac{k}{x^2}$ به طرف مبدأ جذب می شود. اگر این جسم از فاصله L رها شود، نشان دهید که زمان رسیدن آن به مبدأ با عبارت زیر داده می شود:

$$t = \pi \left(\frac{m L^3}{8k} \right)^{1/2}$$

۱۴- سرعت ذره ای به جرم m که تحت تأثیر نیرویی است، با فاصله به صورت $\frac{k}{x^n}$ تغییر می کند که در آن k ثابت است. با فرض $x=0$ در $t=0$ ، نیروی وارد بر ذره را به صورت تابعی از الف) فاصله x ، ب) ارتفاع بدست آورید. ب) مکان ذره را به صورت تابعی از زمان t محاسبه کنید.

۱۵- ذره ای به جرم m تحت تأثیر نیروی $F = -ax + bx^2$ قرار دارد. الف) انرژی پتانسیل $V(x)$ را بدست آورید. ب) نمودارهای $F(x)$ و $V(x)$ را رسم کنید. ب) حرکت ذره را برای مقادیر متفاوت انرژی مورد بحث قرار دهید و توضیح دهید که در آنها حرکت چگونه است نشان دهید.

۱۶- ذره ای به جرم m تحت تأثیر نیرویی که با تابع پتانسیل $V(x) = -ax^2 + bx^3$ نمایانده می شود قرار دارد. الف) $F(x)$ را محاسبه کنید. ب) نمودارهای $F(x)$ و $V(x)$ را رسم کنید. ب) حرکت ذره را برای مقادیر مختلف انرژی مورد بحث قرار دهید. در باره محدودیت های حرکت بحث کنید.

۱۷- نیروی بین دو ذره در یک مولکول (و اتمی) طوری است که می تواند با تابع پتانسیل $V(x) = -\frac{C_1}{x^6} + \frac{C_2}{x^{12}}$ نمایش داده شود. الف) $F(x)$ را بدست آورید. ب) نمودارهای $F(x)$ و $V(x)$ را بکشید. ب) فرض کنید که یکی از اتم ها در مولکول ضعیف شکن است و در مبدأ ساکن می ماند. حرکات ممکن اتم دیگر مولکول را مورد بحث قرار دهید.

