

احتمال

مقدمه

از نظر تاریخی، قدیمی‌ترین راه تعریف احتمالها؛ یعنی مفهوم احتمال کلاسیک، وقتی به کار می‌رود که نظیر آنچه در اکثر بازیهای شانسی پیش می‌آید، تمام برآمدهای ممکن همشانس باشند. در این صورت می‌توانیم بگوییم که اگر N امکان همشانس وجود داشته باشند که یکی از آنها باید رخ دهد و n تا از این امکانها به عنوان مساعد یا به عنوان «موفقیت» در نظر گرفته شوند، آنگاه احتمال یک «موفقیت» با نسبت $\frac{n}{N}$ داده می‌شود.

مقدمه

مثال ۱.۲

احتمال کشیدن یک کارت با شماره ۱ از یک دسته کارت ۵۲ تایی چقدر است؟

حل. چون $n = ۴$ کارت با شماره ۱ بین $N = ۵۲$ کارت وجود دارند، بنابراین احتمال کشیدن یک کارت ۱، $\frac{۴}{۵۲} = \frac{۱}{۱۳}$ است. (البته فرض بر این است که شانس انتخاب همه کارتها یکی است.) ▲

فضای نمونه

مجموعه تمام برآمدهای ممکن آزمایش را فضای نمونه‌ای می‌خوانند و معمولاً آن را با حرف S نشان می‌دهند. در فضای نمونه‌ای، هر برآمد را یک عنصر فضای نمونه‌ای یا صرفاً یک نقطه نمونه‌ای می‌نامند. اگر فضای نمونه‌ای دارای تعدادی متناهی از عناصر باشد، می‌توان این عناصر را با نماد معمولی مجموعه فهرست کرد؛ به عنوان مثال، فضای نمونه‌ای برای برآمدهای ممکن پرتاب یک سکه را می‌توان به صورت

$$S = \{H, T\}$$

فضای نمونه

برآمدهای ممکن یک آزمایش، مجموعهٔ اتومبیل‌هایی باشند که مجهز به رادیویی با موج اف-ام‌اند، فضای نمونه‌ای را می‌توان به صورت

$$S = \{x, \text{اتومبیلی است که رادیویی با موج اف-ام دارد} | x\}$$

فضای نمونه

اینکه یک فضای نمونه‌ای را برای وضعیت مفروضی چگونه فرمولبندی کنیم به مسئله‌ای که در دست داریم بستگی خواهد داشت. اگر آزمایش عبارت از ریختن تاسی باشد و توجه ما بر عددی باشد که رو می‌آید، باید فضای نمونه‌ای

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

را به کار ببریم. اما، اگر فقط به زوج یا فرد بودن عدد توجه داشته باشیم، باید فضای نمونه‌ای

$$S_2 = \{\text{فرد}, \text{زوج}\}$$

را به کار ببریم.

فضای نمونه

مثال ۲.۲

فضای نمونه‌ای را که ممکن است برای آزمایش ریختن یک جفت تاس، یکی قرمز و دیگری سبز، مناسب باشد توصیف کنید.

حل. فضای نمونه‌ای که بیشترین اطلاع را فراهم می‌کند عبارت است از ۳۶ نقطه که با

$$S_1 = \{(x, y) | x = 1, 2, \dots, 6; y = 1, 2, \dots, 6\}$$

داده می‌شوند، و در آن x ، عددی است که روی تاس قرمز ظاهر می‌شود و y عددی است که روی تاس سبز ظاهر می‌شود. فضای نمونه‌ای دومی را که مناسب برخی هدفهاست، (ولی به دلیل اینکه اطلاعات کمتری فراهم می‌کند مطلوبیت کمتری دارد)، می‌توان به صورت

$$S_2 = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$$

نوشت، که عناصر آن، حاصل‌جمعهای عددهای دو تاس را نشان می‌دهند. ▲

فضای نمونه

فضاهای نمونه‌ای، معمولاً برحسب تعداد عناصری که دارند، رده‌بندی می‌شوند. در مثال قبل، فضاهای نمونه‌ای S_1 و S_2 شامل تعدادی متناهی از عناصر بودند، اما اگر سکه‌ای آن قدر پرتاب شود تا برای اولین بار شیر بیاید، این برآمد می‌تواند در اولین، دومین، سومین، چهارمین، ... پرتاب رخ دهد و بینهایت امکان وجود دارد. برای این آزمایش، فضای نمونه‌ای

$$S = \{H, TH, TTH, TTTH, TTTTH, \dots\}$$

را با دنباله‌ای بی‌پایان از عناصر به دست می‌آوریم. اما در این مورد هم تعداد عناصر را می‌توان با همه اعداد صحیح، یک‌به‌یک نظیر کرد، که با این مفهوم، فضای نمونه‌ای را شمارا می‌نامند. اگر فضای نمونه‌ای شامل تعدادی متناهی از عناصر یا تعدادی نامتناهی ولی شمارا از عناصر باشد، آن را گسسته می‌گویند.

پیشامدها

پیشامد، زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است.

پیشامدها

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

مثال ۳.۲

با مراجعه به فضای نمونه‌ای S_1 در صفحه ۳۳، پیشامد A را، که تعداد نقطه‌های ظاهر شده در ریختن یک تاس بر ۳ تقسیمپذیر باشد، توصیف کنید.

حل. بین ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، تنها ۳ و ۶ بر ۳ تقسیمپذیرند. بنابراین، A به وسیله زیرمجموعه $\{3, 6\}$ در فضای نمونه‌ای S_1 نمایش داده می‌شود.



پیشامدها

مثال ۴.۲

با مراجعه به فضای نمونه‌ای S_1 در مثال ۲.۲، پیشامد B را، که تعداد کل نقطه‌های ظاهرشده در ریختن یک جفت تاس برابر ۷ باشد، توصیف کنید.

حل. بین ۳۶ امکان، تنها $(۱, ۶)$ ، $(۲, ۵)$ ، $(۳, ۴)$ ، $(۴, ۳)$ ، $(۵, ۲)$ ، و $(۶, ۱)$ مجموعی برابر با ۷ دارند. بنابراین، می‌نویسیم

$$B = \{(۱, ۶), (۲, ۵), (۳, ۴), (۴, ۳), (۵, ۲), (۶, ۱)\}$$

توجه کنید که در شکل ۱.۲، پیشامد ظاهر شدن مجموع ۷ برای دو تاس، به وسیله مجموعه نقاط داخل ناحیه‌ای نشان داده می‌شود که با نقطه‌چین محصور شده است. ▲

پیشامدها

مثال ۵.۲

اگر شخصی سه بار به هدفی تیراندازی کند و ما فقط علاقه مند باشیم به اینکه آیا در هر نشانه‌گیری تیر به هدف می‌خورد یا نه، یک فضای نمونه‌ای مناسب را توصیف کنید. عناصر پیشامد M را که شخص هر سه بار خطا کند و عناصر پیشامد N را که شخص یک بار به هدف بزند و دوبار خطا کند، مشخص کنید.

حل. اگر 0 و 1 به ترتیب معرف عدم اصابت و اصابت تیر به هدف باشد، هشت امکان $(0, 0, 0)$ ، $(0, 0, 1)$ ، $(0, 1, 0)$ ، $(0, 1, 1)$ ، $(1, 0, 0)$ ، $(1, 0, 1)$ ، $(1, 1, 0)$ و $(1, 1, 1)$ را می‌توان به صورت شکل ۲.۲ نشان داد. پس می‌توان دید که

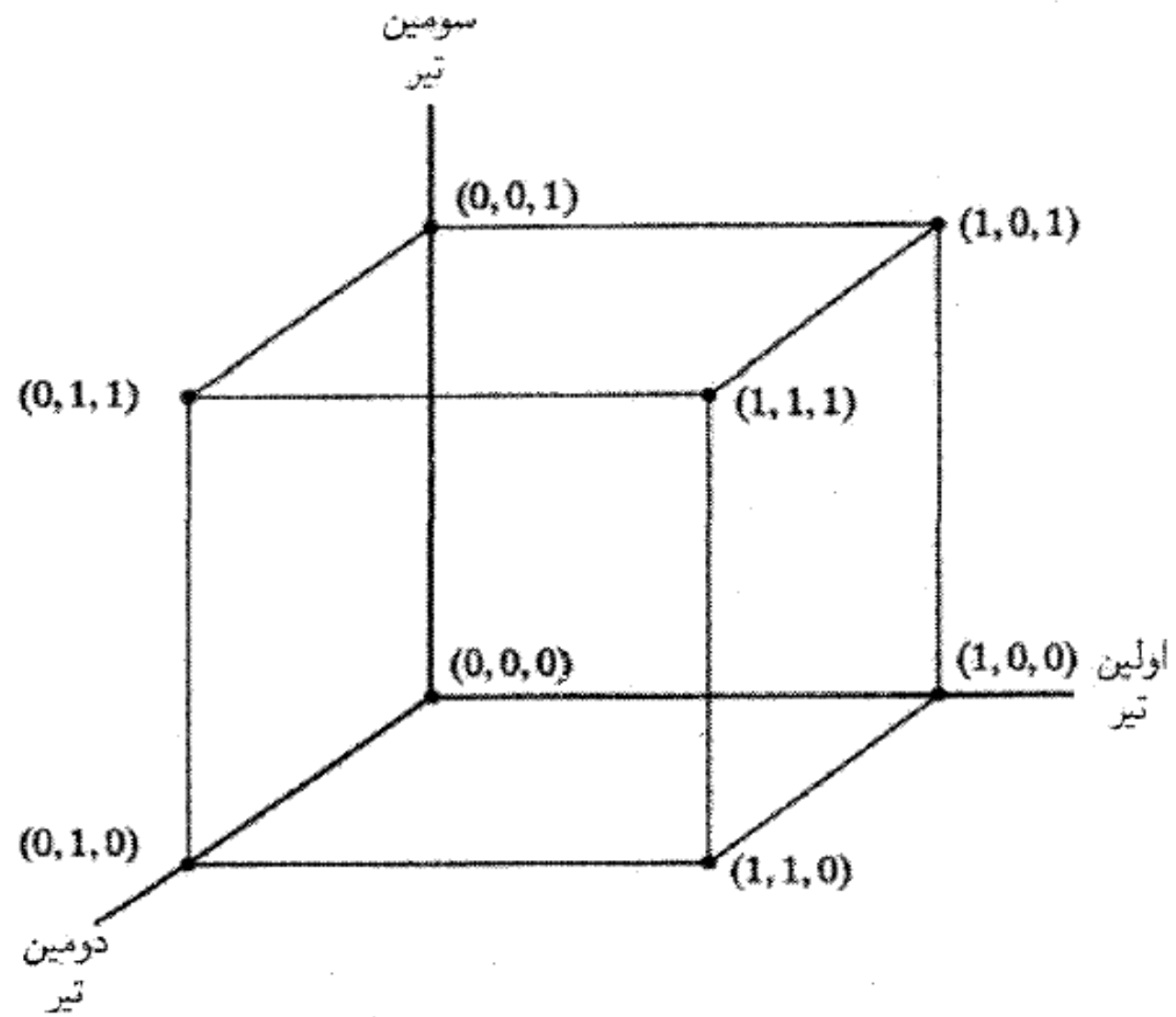
$$M = \{(0, 0, 0)\}$$

و

$$N = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$



پیشامدها



پیشامدها

مثال ۶.۲

برای طول عمر مفید یک وسیله الکترونیکی، یک فضای نمونه‌ای بنا کنید و زیرمجموعه‌ای را نشان دهید که نمایش پیشامد F را بدهد. پیشامد F عبارت از این است که وسیله الکترونیکی قبل از پایان ششمین سال از کار بیفتد.

حل. اگر t طول عمر مفید وسیله بر حسب سال باشد، می‌توان فضای نمونه‌ای را به صورت $S = \{t | t \geq 0\}$ نوشت، و زیرمجموعه $F = \{t | 0 \leq t < 6\}$ پیشامدی است که وسیله الکترونیکی قبل از پایان ششمین سال از کار بیفتد. ▲

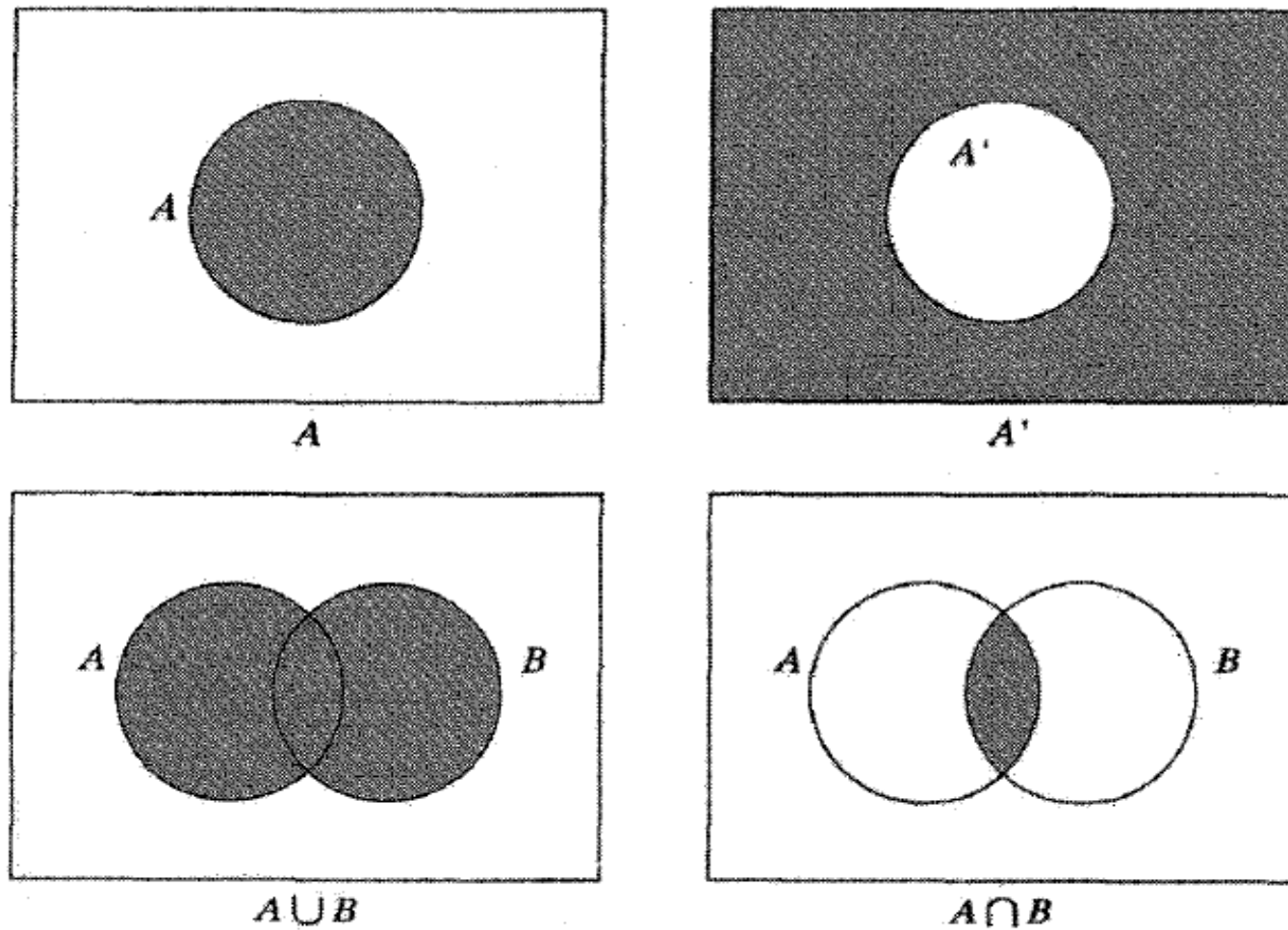
پیشامدها

ما در اکثر مسائل احتمال، علاقه‌مند به پیشامدهایی هستیم که در واقع ترکیبی از دو یا چند پیشامدند که با اختیار اجتماعها، اشتراکها، متممها تشکیل می‌شوند. هرچند خواننده مطمئناً با این اصطلاحها آشناست، مع‌هذا به اختصار یادآوری می‌شود که اگر A و B دو زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای S باشند، اجتماع آنها، $A \cup B$ ، زیرمجموعه‌ای از S است که شامل تمام عناصری است که در A ، در B ، یا در هر دو هستند؛ اشتراک آنها، $A \cap B$ ، زیرمجموعه‌ای از S است که شامل تمام عناصری است که هم در A و هم در B هستند، و متمم A یعنی A' ، زیرمجموعه‌ای از S است که شامل تمام عناصری از S است که در A نیستند. بعضی از قواعدی را که ناظر بر تشکیل اجتماعها، اشتراکها و متممها هستند می‌توان در تمرینهای ۱.۲ تا ۴.۲ یافت.

پیشامدها

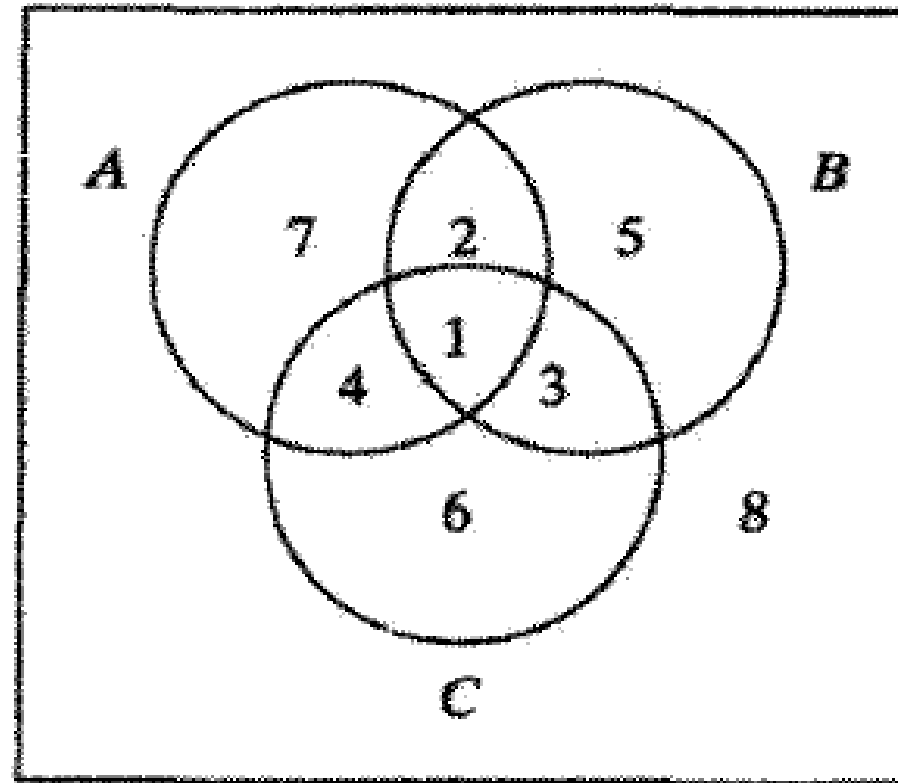
فضاهای نمونه‌ای و پیشامدها، به‌خصوص روابط بین پیشامدها، اغلب به‌وسیلهٔ نمودارهای ون مصور می‌شوند، که در آنها فضای نمونه‌ای با یک مستطیل، و پیشامدها با ناحیه‌هایی در داخل مستطیل، معمولاً با دایره‌ها یا قسمتهایی از دایره‌ها، نمایش داده می‌شوند. مثلاً ناحیه‌های هاشور خوردهٔ چهار نمودار ون شکل ۳.۲، به‌ترتیب پیشامد A ، متمم پیشامد A ، اجتماع پیشامدهای A و B ، و اشتراک پیشامدهای A و B را نشان می‌دهند. وقتی با سه پیشامد سروکار داریم، معمولاً سه دایره به‌صورت شکل ۴.۲ رسم می‌کنیم. در اینجا برای سهولت مراجعه، ناحیه‌ها را از ۱ تا ۸ شماره داده‌ایم.

پیشامدها



شکل ۳.۲ نمودارهای ون

پیشامدها

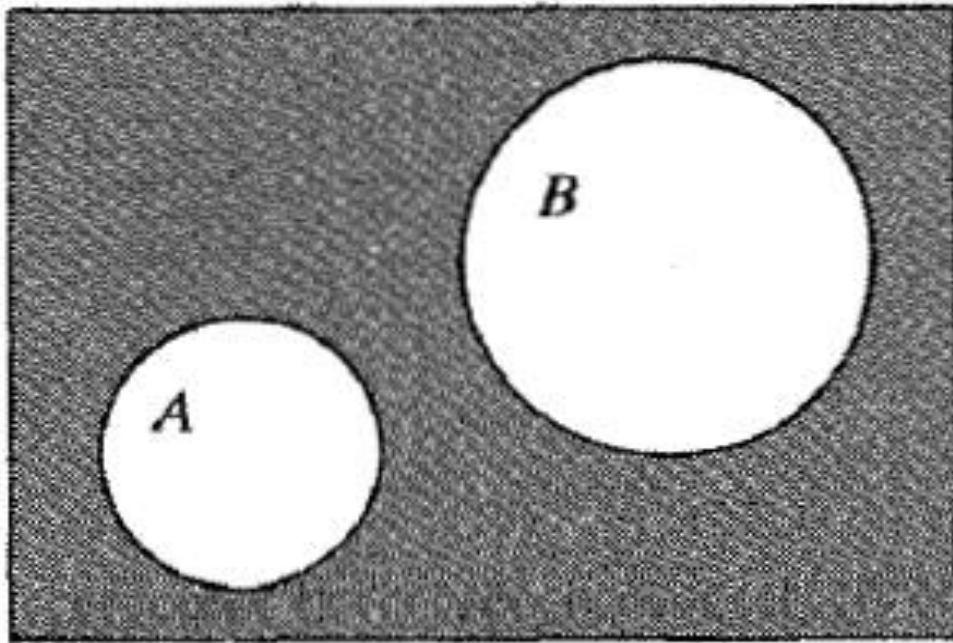


شکل ۴.۲ نمودار ون

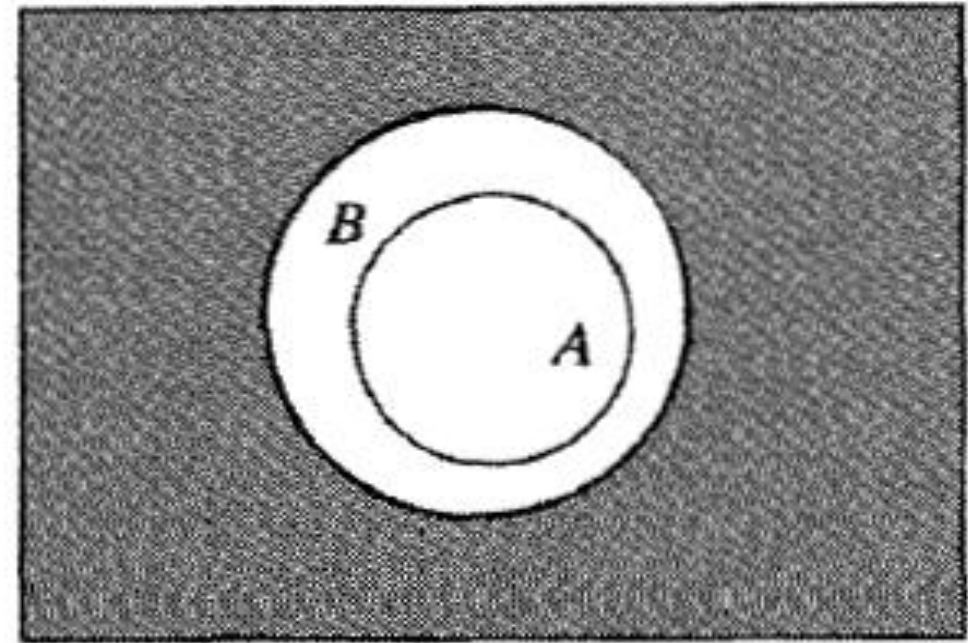
پیشامدها

برای نشان دادن رابطه خاص بین پیشامدها، غالباً نمودارها را نظیر نمودارهای شکل ۵.۲ رسم می‌کنیم. در اینجا نمودار سمت چپ، برای نشان دادن اینکه پیشامدهای A و B ناسازگارند؛ یعنی دو مجموعه عنصری مشترک ندارند (یا هر دو پیشامد نمی‌توانند با هم رخ دهند) به‌کار می‌رود. وقتی A و B ناسازگارند، می‌نویسیم $A \cap B = \emptyset$ که در آن $\emptyset$ ، مجموعه تهی را، که شامل هیچ عنصری نیست، نشان می‌دهد. نمودار سمت راست برای نشان دادن اینکه A مشمول در B است به‌کار می‌رود، و به‌صورت نمادی این مطلب را با نوشتن $A \subset B$ بیان می‌کنیم.

پیشامدها



A و B ناسازگارند



A مشمول در B است

شکل ۵.۲ نمودارهایی که روابط خاص بین پیشامدها را نشان می‌دهند

احتمال یک پیشامد

برای فرمولبندی اصول موضوع احتمال، از عمل نمایش پیشامدها با حروف بزرگ پیروی می‌کنیم و احتمال پیشامد A را به صورت $P(A)$ ، احتمال پیشامد B را به صورت $P(B)$ ، و قس علی‌هذا می‌نویسیم. مانند قبل، مجموعه تمام برآمدهای ممکن، یعنی فضای نمونه‌ای را، با حرف S نشان می‌دهیم.

اصول موضوع احتمال که ما در اینجا فرمولبندی می‌کنیم فقط وقتی به کار می‌روند که فضای نمونه‌ای S گسسته باشد.

احتمال یک پیشامد

اصل موضوع ۱ احتمال یک پیشامد، یک عدد حقیقی نامنفی است؛ یعنی، برای هر زیرمجموعه A از S ، $P(A) \geq 0$.

اصل موضوع ۲ $P(S) = 1$.

اصل موضوع ۳ اگر $A_1, A_2, A_3, \dots$ دنباله‌ای متناهی یا نامتناهی از پیشامدهای دوجه دو ناسازگار S باشند، آنگاه

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

احتمال یک پیشامد

مثال ۷.۲

یک آزمایش، چهار برآمد ممکن و دوبه دو ناسازگار A ، B ، C و D را دارد. برای هریک از موارد زیر، توضیح دهید که چرا راهی مجاز برای تخصیص احتمالات وجود ندارد.

(الف) $P(A) = 0.12$ ، $P(B) = 0.63$ ، $P(C) = 0.45$ ، $P(D) = -0.20$ ؛

(ب) $P(A) = \frac{9}{120}$ ، $P(B) = \frac{45}{120}$ ، $P(C) = \frac{27}{120}$ ، $P(D) = \frac{46}{120}$.

حل. (الف) $P(D) = -0.20$ ناقض اصل موضوع ۱ است.

(ب)

$$P(S) = P(A \cup B \cup C \cup D) = \frac{9}{120} + \frac{45}{120} + \frac{27}{120} + \frac{46}{120} = \frac{127}{120} \neq 1$$

که ناقض اصل موضوع ۲ است.



احتمال یک پیشامد

قضیه ۱.۲ اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای گسسته S باشد، آنگاه $P(A)$ برابر است با مجموع احتمالات برآمدهای فردی تشکیل‌دهنده A .

برهان. فرض می‌کنیم $O_1, O_2, O_3, \dots$ دنباله‌ای متناهی یا نامتناهی از برآمدهایی باشد که پیشامد A را تشکیل می‌دهند. پس

$$A = O_1 \cup O_2 \cup O_3 \cup \dots$$

و چون برآمدهای فردی، O ها، برحسب تعریف دوه‌دو ناسازگارند، اصل سوم احتمال نتیجه می‌دهد

$$P(A) = P(O_1) + P(O_2) + P(O_3) + \dots$$

و این رابطه، برهان را کامل می‌کند.



احتمال یک پیشامد

مثال ۸.۲

اگر سکه متعادلی را دوبار پرتاب کنیم، احتمال به دست آوردن حداقل یک شیر چقدر است؟

حل. فضای نمونه‌ای برای این آزمایش عبارت است از

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

که در آن، H و T به ترتیب شیر و خط را نشان می‌دهند. چون سکه متعادل است، می‌پذیریم که وقوع این برآمدها همشانس‌اند، و بنابراین به هر نقطه نمونه‌ای احتمال $\frac{1}{4}$ را نسبت می‌دهیم، اگر A پیشامدی باشد که حداقل یک شیر به دست آید، آنگاه $A = \{HH, HT, TH\}$ ، و

$$P(A) = P(HH) + P(HT) + P(TH)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$



احتمال یک پیشامد

مثال ۹.۲

تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد فرد دو برابر احتمال وقوع هر عدد زوج است. اگر در یک بار ریختن این تاس، G پیشامد وقوع عددی بزرگتر از ۳ باشد، $P(G)$ را بیابید.

حل. فضای نمونه‌ای عبارت است از $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. اگر به هر عدد زوج، احتمال w و به هر عدد فرد، احتمال $2w$ را نسبت دهیم، مطابق اصل موضوع ۲ به دست می‌آوریم

$$2w + w + 2w + w + 2w + w = 9w = 1 \text{ پس } w = \frac{1}{9} \text{ و}$$

$$P(G) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$



احتمال یک پیشامد

مثال ۱۰.۲

اگر $O_1, O_2, O_3, \dots$ دنباله‌ای نامتناهی از برآمدهای یک آزمایش مفروض باشد تحقیق کنید که

$$P(O_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

واقعاً یک اندازه احتمال است.

حل. چون احتمالها همگی مثبت‌اند، فقط باید نشان دهیم که $P(S) = 1$ داریم.

$$P(S) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

اگر فرمول تعیین مجموع جملات یک تصاعد هندسی نامتناهی را به کار ببریم، به دست می‌آوریم

$$P(S) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$



احتمال یک پیشامد

قضیه ۲.۲ اگر نتیجه آزمایشی بتواند یکی از N برآمد مختلف همشانس باشد، و اگر n تا از این برآمدها باهم پیشامد A را تشکیل دهند، آنگاه احتمال پیشامد A برابر است با

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

احتمال یک پیشامد

برهان. فرض می‌کنیم $O_1, O_2, \dots, O_N$ برآمدهای فردی S را نشان دهند که احتمال هر کدام $\frac{1}{N}$ است. اگر پیشامد A ، اجتماع n تا از این برآمدهای دوبه‌دو ناسازگار بوده، و مهم نباشد که کدام یک از آنها این پیشامد را تشکیل دهند، آنگاه

$$\begin{aligned} P(A) &= P(O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_n) \\ &= P(O_1) + P(O_2) + \dots + P(O_n) \\ &= \underbrace{\frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N}}_{n \text{ جمله}} \\ &= \frac{n}{N} \end{aligned}$$



احتمال یک پیشامد

مثال ۱۱.۲

در یک بازی با دسته کارت ۵۲ تایی، پنج کارت به تصادف اختیار می‌کنیم، اگر سه کارت دارای یک شماره و دو کارت دیگر هم دارای یک شماره باشند برنده بازی هستیم. احتمال برنده شدن در این بازی چقدر است؟

حل. تعداد راههایی که می‌توان سه کارت با یک شماره و دو کارت با یک شماره دیگر، مثلاً سه کارت با شماره ۷ و دو کارت با شماره ۱ انتخاب کرد برابر است با $\binom{4}{2} \binom{4}{3}$. چون ۱۳ شماره از هر رنگ داریم ۱۳ راه انتخاب سه کارت با یک شماره و سپس ۱۲ راه انتخاب دو کارت با یک شماره وجود دارند. کل راههای ممکن انتخاب چنین پنج کارتی

احتمال یک پیشامد

$$n = ۱۳ \cdot ۱۲ \cdot \binom{۴}{۳} \cdot \binom{۴}{۲}$$

از طرفی تعداد راههای ممکن انتخاب پنج کارت از ۵۲ کارت

$$N = \binom{۵۲}{۵}$$

و لذا از قضیه ۲.۲ نتیجه می شود که احتمال برد بازی عبارت است از

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{۱۳ \cdot ۱۲ \cdot \binom{۴}{۳} \cdot \binom{۴}{۲}}{\binom{۵۲}{۵}} = ۰٫۰۰۱۴$$



بعضی قواعد احتمال

قضیه ۳.۲ اگر A و A' پیشامدهای متمم در فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه

$$P(A') = 1 - P(A)$$

برهان. در دومین و سومین مرحله، در برهانی که ارائه می‌شود از تعریف متمم استفاده می‌کنیم، که طبق آن، A و A' دو به دو ناسازگارند و $A \cup A' = S$ ؛ پس می‌نویسیم

$$1 = P(S) \quad (\text{بنابه اصل موضوع ۲})$$

$$= P(A \cup A')$$

$$= P(A) + P(A') \quad (\text{بنابه اصل موضوع ۳})$$

بنابراین $P(A') = 1 - P(A)$.



بعضی قواعد احتمال

قضیه ۴.۲ برای هر فضای نمونه‌ای S ، $P(\emptyset) = 0$.

برهان. چون پیشامدهای S و $\emptyset$ ناسازگارند و مطابق تعریف مجموعه تهی $\emptyset$ ، $S \cup \emptyset = S$ ، نتیجه می‌شود که

$$P(S) = P(S \cup \emptyset)$$

$$= P(S) + P(\emptyset), \quad (\text{بنابه اصل موضوع ۳})$$

و در نتیجه $P(\emptyset) = 0$.



بعضی قواعد احتمال

قضیه ۵.۲ اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S باشند و $A \subset B$ ، آنگاه $P(A) \leq P(B)$.

برهان. چون $A \subset B$ ، می‌توانیم بنویسیم

$$B = A \cup (A' \cap B)$$

که درستی آن به آسانی به وسیله یک نمودار ون تحقیق می‌شود. در این صورت، چون A و $A' \cap B$ ناسازگارند، به دست می‌آوریم

$$P(B) = P(A) + P(A' \cap B) \quad (\text{بنابه اصل موضوع ۳})$$

$$\geq P(A) \quad (\text{بنابه اصل موضوع ۱})$$



بعضی قواعد احتمال

قضیه ۶.۲ برای هر پیشامد A ، $0 \leq P(A) \leq 1$.

برهان. با به کار بردن قضیه ۵.۲ و این واقعیت که برای هر پیشامد A در S ، $\emptyset \subset A \subset S$ ، داریم

$$P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(S)$$

در این صورت $P(\emptyset) = 0$ و $P(S) = 1$ به این نتیجه منجر می شود که

$$0 \leq P(A) \leq 1$$



بعضی قواعد احتمال

قضیه ۷.۲ اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه

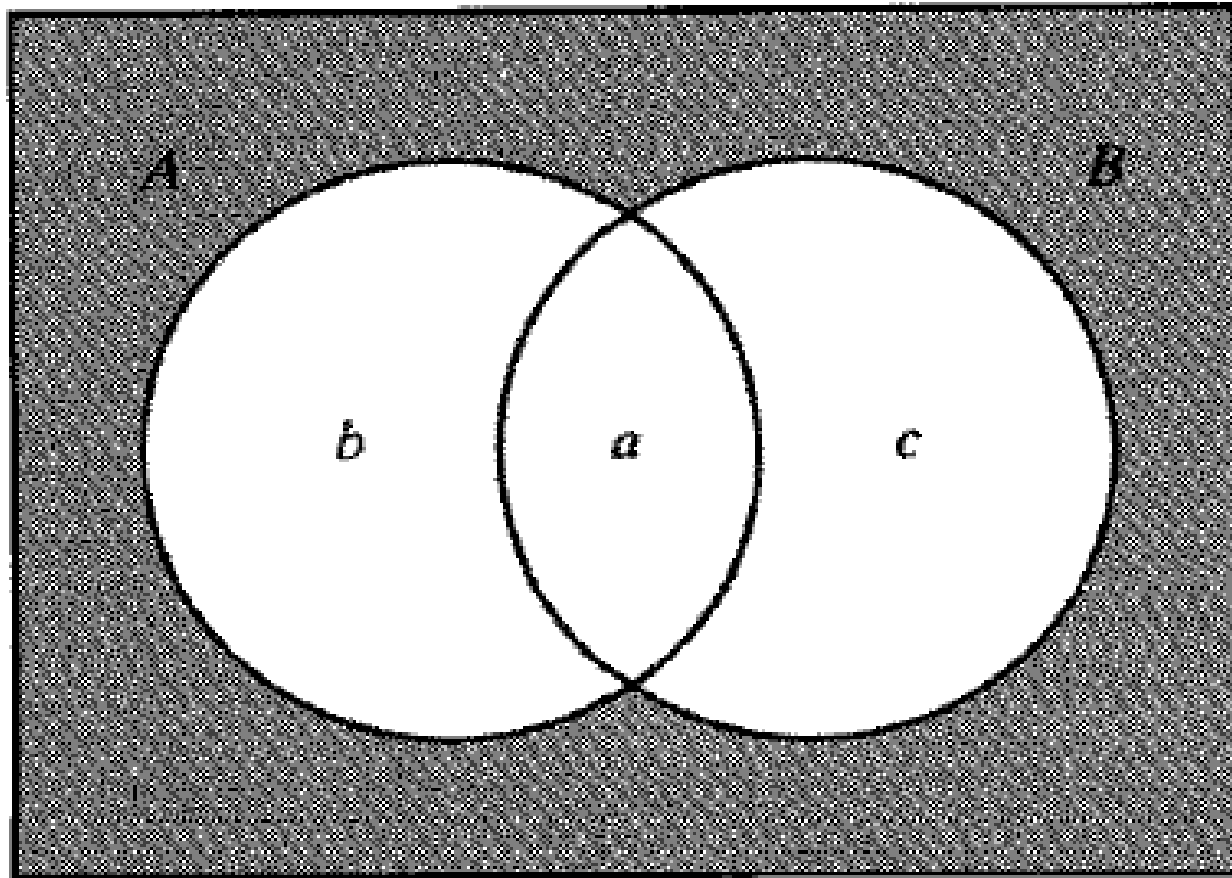
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

برهان. همان‌طور که در نمودار ون شکل ۶.۲ دیده می‌شود به پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار $A \cap B$ ، $A \cap B'$ و $A' \cap B$ ، احتمالهای a ، b و c را نسبت می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= a + b + c \\ &= (a + b) + (c + a) - a \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$



بعضی قواعد احتمال



شکل ۶.۲ نمودار ون برای اثبات قضیه ۷.۲

بعضی قواعد احتمال

مثال ۱۲.۲

اگر برای خانواده‌ای (که به منظور یک بررسی نمونه‌ای در یک ناحیه بزرگ شهری، به تصادف انتخاب شده است) احتمال دارا بودن یک دستگاه تلویزیون رنگی، یک دستگاه تلویزیون سیاه و سفید، یا هر دو نوع رنگی و سیاه و سفید، به ترتیب $\frac{1}{6}$ ، $\frac{3}{5}$ ، و $\frac{2}{9}$ باشد، احتمال اینکه این خانواده یکی از دو نوع یا هر دو نوع تلویزیون را داشته باشد چقدر است؟

بعضی قواعد احتمال

حل. اگر A ، این پیشامد باشد که خانواده مزبور دارای یک دستگاه تلویزیون رنگی است، و B ، این پیشامد باشد که دارای یک دستگاه تلویزیون سیاه و سفید است، داریم $P(A) = ۰٫۸۶$ ، $P(B) = ۰٫۳۵$ ، $P(A \cap B) = ۰٫۲۹$ ، و اگر این مقادیر را در فرمول قضیه ۷.۲ قرار دهیم، نتیجه می شود

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= ۰٫۸۶ + ۰٫۳۵ - ۰٫۲۹ \\ &= ۰٫۹۲ \end{aligned}$$



بعضی قواعد احتمال

مثال ۱۳.۲

کامیونی که در خروجی بزرگراهی متوقف شده است با احتمال 0.23 ترمزهای معیوب و با احتمال 0.24 فرسودگی شدید تایر دارد. همچنین با احتمال 0.38 ترمزهای معیوب یا فرسودگی شدید تایر یا هر دو را دارد. احتمال اینکه این کامیون، ترمزهایش معیوب بوده و فرسودگی شدید تایر داشته باشد چقدر است؟

بعضی قواعد احتمال

حل. اگر B این پیشامد باشد که اتومبیل مزبور ترمزهایش معیوب است، و T این پیشامد باشد که تایرهایش فرسودگی شدید دارند، داریم

$$P(B) = ۰٫۲۳, P(T) = ۰٫۲۴, P(B \cup T) = ۰٫۳۸$$

از قرار دادن این مقادیر در فرمول قضیهٔ ۷.۲ نتیجه می‌شود

$$۰٫۳۸ = ۰٫۲۳ + ۰٫۲۴ - P(B \cap T)$$

با حل این معادله نسبت به $P(B \cap T)$ ، به دست می‌آوریم

$$P(B \cap T) = ۰٫۲۳ + ۰٫۲۴ - ۰٫۳۸ = ۰٫۰۹$$



بعضی قواعد احتمال

قضیه ۸.۲ اگر A ، B ، و C ، سه پیشامد دلخواه در فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ & - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

بعضی قواعد احتمال

برهان. $A \cup B \cup C$ را به صورت $A \cup (B \cup C)$ می نویسیم و دوبار قضیه ۷.۲ را به کار می بریم، یک بار برای $P[A \cup (B \cup C)]$ و یک بار برای $P(B \cup C)$ ، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P[A \cup (B \cup C)] \\ &= P(A) + P(B \cup C) - P[A \cap (B \cup C)] \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P[A \cap (B \cup C)] \end{aligned}$$

بعضی قواعد احتمال

$$\begin{aligned}P[A \cap (B \cup C)] &= P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\&= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[(A \cap B) \cap (A \cap C)] \\&= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

و نتیجه آنکه

$$\begin{aligned}P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\&\quad - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$



بعضی قواعد احتمال

مثال ۱۴.۲

فرض می‌کنیم شخصی که به دندانپزشک خود مراجعه می‌کند احتمال اینکه دندانهایش را جرم‌گیری کند 0.44 ، احتمال اینکه دندان‌هایش را پر کردن داشته باشد، 0.24 ، احتمال آنکه دندان‌هایش را کشیدن داشته باشد، 0.21 ، احتمال آنکه دندانهایش را جرم‌گیری و دندان‌هایش را پر کند، 0.08 ، احتمال اینکه دندانهایش را جرم‌گیری کند و دندان‌هایش را بکشد 0.11 ، احتمال اینکه دندان‌هایش را کشیدن داشته باشد، 0.07 و احتمال اینکه دندانهایش را جرم‌گیری و دندان‌هایش را پر کند و دندان‌هایش را بکشد 0.03 باشد. احتمال اینکه دندانپزشک حداقل یکی از سه مورد را برای او انجام دهد چقدر است؟

بعضی قواعد احتمال

حل. اگر C ، این پیشامد باشد که شخص دندانهایش را جرم‌گیری کند، F ، این پیشامد باشد که دندانی را پر کند؛ و E ، این پیشامد باشد که دندانی را بکشد، داریم $P(C) = ۰٫۴۴$ ، $P(F) = ۰٫۲۴$ ، $P(E) = ۰٫۲۱$ ، $P(C \cap F) = ۰٫۰۸$ ، $P(C \cap E) = ۰٫۱۱$ ، $P(F \cap E) = ۰٫۰۷$ و $P(C \cap F \cap E) = ۰٫۰۳$ ، و با قرار دادن اینها در فرمول، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} P(C \cup F \cup E) &= ۰٫۴۴ + ۰٫۲۴ + ۰٫۲۱ - ۰٫۰۸ - ۰٫۱۱ - ۰٫۰۷ + ۰٫۰۳ \\ &= ۰٫۶۶ \end{aligned}$$

تمرین

۴.۲ برای تحقیق درستی موارد زیر، نمودارهای ون را به کار ببرید.

$$(الف) (A \cap B) \cup (A \cap B') = A$$

$$(ب) (A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B) = A \cup B$$

$$(ج) A \cup (A' \cap B) = A \cup B$$

۵.۲ با استفاده از قسمت‌های (الف) و (ب) تمرین ۴.۲ نشان دهید که

$$(الف) P(A) \geq P(A \cap B)$$

$$(ب) P(A) \leq P(A \cup B)$$

تمرین (راهنمایی)

$$(a) P[A] = P[(A \cap B) \cup (A \cap B')] = P(A \cap B) + P(A \cap B') \geq P(A \cap B)$$

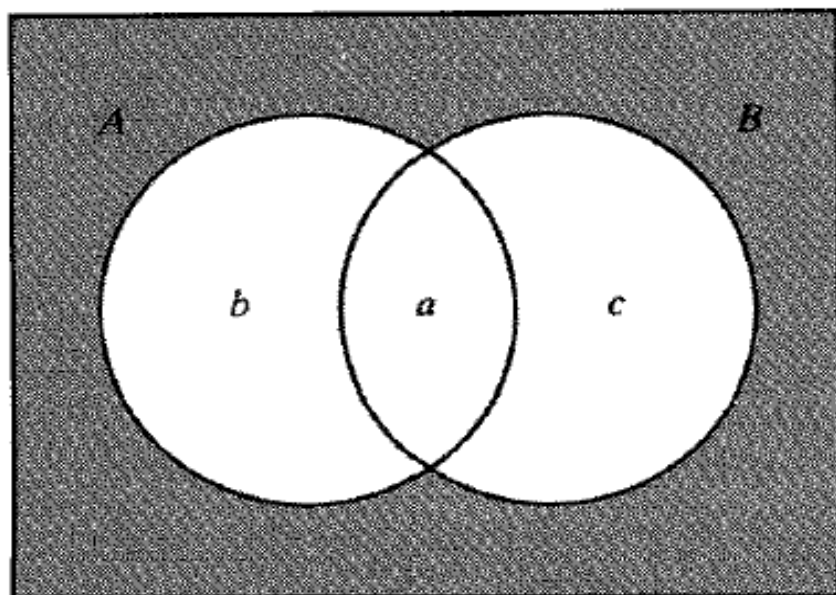
$$(b) A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B) = A \cup (A' \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(A' \cap B) \geq P(A)$$

تمرین

۶.۲ با رجوع به شکل ۶.۲، تحقیق کنید که

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$



شکل ۶.۲ نمودار ون برای اثبات قضیه ۷.۲

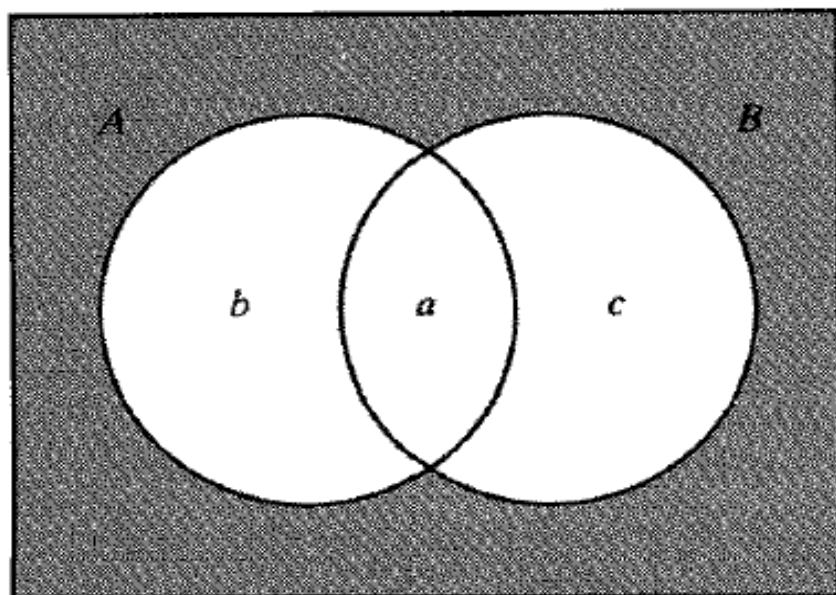
تمرین (راهنمایی)

$$P(A) - P(A \cap B) = (a + b) - a = b = P(A \cap B')$$

تمرین

۷.۲ با رجوع به شکل ۶.۲، و قرار دادن $P(A' \cap B') = d$ ، تحقیق کنید که

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$



شکل ۶.۲ نمودار ون برای اثبات قضیه ۷.۲

تمرین (راهنمایی)

$$\begin{aligned} 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) &= (a + b + c + d) - (a + b) - (a + c) + a = d \\ &= P(A' \cap B') \end{aligned}$$

احتمال شرطی

مثال ۱۵.۲

یک سازمان تحقیقاتی حمایت از مصرف‌کننده ۵۰ مرکز سرویس مجاز را مطالعه کرده است، و یافته‌های حاصل در جدول زیر خلاصه شده‌اند.

	سرویس مجاز ضعیف	سرویس مجاز خوب
باسابقه شغلی ده یا بیشتر از ده سال	۴	۱۶
با سابقه شغلی کمتر از ده سال	۲۰	۱۰

اگر فردی به تصادف یکی از این مراکز سرویس را انتخاب کند، احتمال اینکه مرکز سرویس مجاز خوبی باشد چقدر است؟ همچنین اگر شخصی به تصادف یکی از مراکزی را انتخاب کند که ده یا بیشتر از ده سال سابقه شغلی داشته باشد، احتمال اینکه مرکزی انتخاب شود که از مراکز مجاز خوب باشد چقدر است؟

احتمال شرطی

حل. منظور ما از «به تصادف» این است که در هر حالت، تمام انتخابهای ممکن همشانس‌اند، و بنابراین می‌توانیم فرمول قضیه ۲.۲ را به کار ببریم. اگر G ، انتخاب مرکزی را نشان دهد که سرویس خوب ارائه می‌دهد، و اگر فرض کنیم $n(G)$ تعداد عناصر G را نشان دهد، و $n(S)$ تعداد عناصر تمام فضای نمونه‌ای باشد، به دست می‌آوریم

$$P(G) = \frac{n(G)}{n(S)} = \frac{۱۶ + ۱۰}{۵۰} = ۰٫۵۲$$

این پاسخ اولین سؤال است.

احتمال شرطی

برای سؤال دوم، ما خود را به فضای نمونه‌ای کوچکتری که شامل سطر اول جدول است، یعنی به $20 = 16 + 4$ مرکزی که ده یا بیش از ده سال سابقه شغلی دارند محدود می‌کنیم. از این 20 مرکز، 16 مرکز سرویس خوب ارائه می‌دهند، و به دست می‌آوریم

$$P(G|T) = \frac{16}{20} = 0.8$$

که در آن T ، انتخاب مرکزی را نشان می‌دهد که ده یا بیش از ده سال سابقه شغلی دارد. این، پاسخ سؤال دوم است، و همان‌طور که انتظار داشتیم، $P(G|T)$ خیلی از $P(G)$ بزرگتر است. ▲

احتمال شرطی

چون صورت $P(G|T)$ برابر $n(T \cap G) = ۱۶$ یعنی تعداد مراکزی است که ده سال یا بیش از ده سال به‌کار اشتغال دارند و سرویس خوب ارائه می‌دهند، و مخرج برابر $n(T)$ ، یعنی تعداد مراکزی است که ده سال یا بیش از ده سال سابقه کار دارند، می‌توانیم به‌صورت نمادی بنویسیم

$$P(G|T) = \frac{n(T \cap G)}{n(T)}$$

احتمال شرطی

پس، اگر صورت و مخرج را به $n(S)$ ، تعداد کل مراکز در شهر موردنظر، تقسیم کنیم، به دست می آوریم

$$P(G|T) = \frac{\frac{n(T \cap G)}{n(S)}}{\frac{n(T)}{n(S)}} = \frac{P(T \cap G)}{P(T)}$$

و لذا احتمال شرطی $P(G|T)$ را برحسب دو احتمالی که برای تمام فضای نمونه‌ای S تعریف شده‌اند بیان کرده‌ایم.

احتمال شرطی

تعریف ۱.۲ اگر A و B دو پیشامد دلخواه در فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A) \neq 0$ ، احتمال شرطی B به شرط A برابر است با

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

احتمال شرطی

مثال ۱۶.۲

با مراجعه به مثال ۱۵.۲، احتمال اینکه یکی از فروشندگانی که کمتر از ده سال به کار اشتغال دارد سرویس خوبی ارائه دهد چقدر است؟

حل. چون $P(T' \cap G) = \frac{1}{5} = 0.2$ و $P(T') = \frac{1+2}{5} = 0.6$ ، اگر مقادیر را در فرمول قرار دهیم نتیجه می‌دهد که

$$P(G|T') = \frac{P(T' \cap G)}{P(T')} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$$



احتمال شرطی

مثال ۱۸.۲

یک سازنده قطعات یدکی هواپیما از تجربه‌های گذشته‌اش می‌داند که احتمال اینکه سفارشی به‌موقع برای بارگیری آماده شود برابر 80% است، و احتمال اینکه سفارشی به‌موقع برای بارگیری آماده شود و همچنین به‌موقع تحویل شود برابر 72% است. احتمال اینکه چنین سفارشی به‌موقع تحویل شود به شرط آنکه به‌موقع برای بارگیری آماده شده باشد چقدر است؟

احتمال شرطی

حل. اگر فرض کنیم که R نمایش پیشامدی باشد که سفارش به موقع برای بارگیری آماده، و D نمایش پیشامدی باشد که سفارش به موقع تحویل شود، داریم $P(R) = ۰٫۸۰$ و $P(R \cap D) = ۰٫۷۲$ ، و نتیجه می شود که

$$P(D|R) = \frac{P(R \cap D)}{P(R)} = \frac{۰٫۷۲}{۰٫۸۰} = ۰٫۹۰$$

بنابراین، ۹۰ درصد محموله ها به موقع تحویل می شوند به شرط آنکه به موقع بارگیری شوند. توجه کنید که $P(R|D)$ ، احتمال اینکه محموله ای که به موقع تحویل شده است برای بارگیری نیز به موقع آماده شده باشد، بدون اطلاعاتی اضافی قابل محاسبه نیست. برای این مقصود باید $P(D)$ را نیز بدانیم.



احتمال شرطی

قضیه ۹.۲ اگر A و B دو پیشامد دلخواه در فضای نمونه‌ای S باشند، و $P(A) \neq 0$ ، آنگاه

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

احتمال شرطی

در قالب کلمات، احتمال اینکه A و B با هم رخ دهند برابر حاصلضرب احتمال A در احتمال شرطی B به شرط A است. به صورتی دیگر، اگر $P(B) \neq 0$ ، احتمال آنکه A و B ، هر دو رخ دهند، برابر با حاصلضرب احتمال B و احتمال شرطی A به شرط B است؛ به صورت نمادی

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

برای به دست آوردن این قاعده حاصلضرب، در فرمول قضیه ۹.۲ جای A و B را عوض و از واقعیت $A \cap B = B \cap A$ استفاده می‌کنیم.

احتمال شرطی

مثال ۱۹.۲

اگر از محموله ۲۴۰ لامپ تلویزیون که ۱۵ تای آن معیوب است، به تصادف و به توالی دو لامپ تلویزیون برداریم، چقدر احتمال دارد که هردو معیوب باشند؟

حل. اگر احتمال انتخابها را برابر فرض کنیم (که منظور ما همان انتخاب «به تصادف» لامپهاست)،

احتمال اینکه اولین لامپ معیوب باشد $\frac{15}{240}$ ، و احتمال اینکه دومین لامپ، به شرط معیوب

بودن اولین لامپ، معیوب باشد برابر $\frac{14}{239}$ است. لذا احتمال اینکه هردو لامپ معیوب باشند

$\frac{7}{1912} = \left(\frac{15}{240}\right)\left(\frac{14}{239}\right)$ است. البته فرض بر این است که نمونه‌گیری بدون جایگذاری است؛ یعنی

اینکه قبل از انتخاب لامپ دوم، لامپ اول به جای خود گذاشته نمی‌شود. ▲

احتمال شرطی

مثال ۲۰.۲

پیدا کنید احتمال اینکه به تصادف، دو یک به توالی از یک دسته کارت ۵۲ تایی کشیده شوند اگر

(الف) بدون جایگذاری نمونه بگیریم،

(ب) با جایگذاری نمونه بگیریم.

حل. (الف) اگر قبل از کشیدن کارت دوم، کارت اول را به جای خود برگردانیم، احتمال به دست آوردن متوالی دو یک برابر است با

$$\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$$

(ب) اگر قبل از کشیدن کارت دوم، کارت اول را به جای خود برگردانیم، احتمال متناظر برابر

است با

$$\frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$



احتمال شرطی

قضیه ۱۰.۲ اگر A, B, C سه پیشامد دلخواه در فضای نمونه‌ای S باشند، به قسمی که $P(A) \neq 0$ و $P(A \cap B) \neq 0$ ، آنگاه

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

برهان. با نوشتن $A \cap B \cap C$ به صورت $(A \cap B) \cap C$ و با دوبار استفاده از فرمول ۹.۲، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P[(A \cap B) \cap C] \\ &= P(A \cap B) \cdot P(C|A \cap B) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B) \end{aligned}$$



احتمال شرطی

مثال ۲۱.۲

بسته‌ای فیوز شامل ۲۰ فیوز است که ۵ تای آنها معیوب‌اند. اگر به تصادف ۳ فیوز متوالیاً و بدون جایگذاری از بسته مزبور انتخاب کنیم، احتمال اینکه هر ۳ فیوز معیوب باشند چقدر است؟

حل. اگر A پیشامد معیوب بودن فیوز اول، B پیشامد معیوب بودن فیوز دوم، و C پیشامد معیوب بودن فیوز سوم باشد، آنگاه $P(A) = \frac{5}{20}$ ، $P(B|A) = \frac{4}{19}$ ، $P(C|A \cap B) = \frac{3}{18}$ ، و اگر آنها را در فرمول قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{3}{18} \\ &= \frac{1}{114} \end{aligned}$$



پیشامدهای مستقل

با بیانی غیررسمی، دو پیشامد A و B را مستقل می‌گویند اگر رخ دادن یا رخ ندادن هر یک از آنها در احتمال رخ دادن دیگری تأثیری نداشته باشد. مثلاً اگر در مثال قبل هر فیوز را قبل از بیرون کشیدن فیوز بعدی به جای خود برگردانیم، برآمدهای انتخابهای متوالی همگی مستقل‌اند؛ یعنی احتمال به دست آوردن یک فیوز معیوب در هر حالت برابر $\frac{5}{4}$ باقی می‌ماند.

پیشامدهای مستقل

به طور نمادی، دو پیشامد A و B مستقل اند اگر

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B|A) = P(B)$$

و موقعی که هر دو احتمال شرطی موجود باشند، یعنی وقتی $P(A)$ و $P(B)$ صفر نباشند، می توان نشان داد که هریک از این برابریها، دیگری را نتیجه می دهد (تمرین ۲۱.۲ را ببینید).

حال اگر در فرمول قضیه ۹.۲، $P(B)$ را به جای $P(B|A)$ قرار دهیم، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B|A) \\ &= P(A) \cdot P(B) \end{aligned}$$

و این نتیجه را به عنوان تعریف صوری استقلال به کار خواهیم برد.

پیشامدهای مستقل

تعریف ۲.۲ دو پیشامد A و B مستقل اند اگر و تنها اگر

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

با عکس کردن مراحل، می‌توانیم نشان دهیم که تعریف ۲.۲ نیز تعریفی از استقلال را که قبلاً ارائه دادیم نتیجه می‌دهد.

اگر دو پیشامد مستقل نباشند، می‌گویند وابسته‌اند. در به‌دست آوردن فرمول تعریف ۲.۲، فرض کردیم که $P(B|A)$ وجود دارد و لذا فرض کردیم که $P(A) \neq 0$. برای سهولت در انجام اعمال ریاضی، فرض می‌کنیم که تعریف بالا وقتی $P(A) = 0$ و (یا) $P(B) = 0$ ، نیز به‌کار می‌رود.

پیشامدهای مستقل

مثال ۲۲.۲

سکه‌ای سه بار پرتاب و فرض می‌شود که ۸ برآمد ممکن HTT, TTH, HTH, HHT, HHH ، TTT, TTH, THT و TTT همشانس باشند. اگر A پیشامد رخ دادن شیر در هریک از دو پرتاب اول، B پیشامد رخ دادن خط در پرتاب سوم، و C پیشامد رخ دادن دقیقاً دو خط در سه پرتاب باشد، نشان دهید که

(الف) پیشامدهای A و B مستقل‌اند؛

(ب) پیشامدهای B و C وابسته‌اند.

پیشامدهای مستقل

حل. چون

$$A = \{HHH, HHT\}$$

$$B = \{HHT, HTT, THT, TTT\}$$

$$C = \{HTT, THT, TTH\}$$

$$A \cap B = \{HHT\}$$

$$B \cap C = \{HTT, THT\}$$

فرض همشانس بودن همه هشت پیشامد نتیجه می‌دهد که $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{3}{8}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ و $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$.

(الف) چون $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \neq P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, پیشامدهای A و B مستقل اند.

(ب) چون $P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{32} \neq P(B \cap C) = \frac{1}{4}$, پیشامدهای B و C مستقل

نیستند.



پیشامدهای مستقل

قضیه ۱۱.۲ اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، آنگاه دو پیشامد A و B' نیز مستقل اند.

برهان. چون همان طور که در قسمت (الف) تمرین ۴.۲ از خواننده خواسته بودیم که اثبات کند $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$ ، پس $A \cap B$ و $A \cap B'$ ناسازگارند و چون A و B بنابر فرض مستقل اند، داریم

پیشامدهای مستقل

$$\begin{aligned}P(A) &= P[(A \cap B) \cup (A \cap B')] \\&= P(A \cap B) + P(A \cap B') \\&= P(A) \cdot P(B) + P(A \cap B')\end{aligned}$$

نتیجه می شود که

$$\begin{aligned}P(A \cap B') &= P(A) - P(A) \cdot P(B) \\&= P(A) \cdot [1 - P(B)] \\&= P(A) \cdot P(B')\end{aligned}$$

و لذا A و B' مستقل اند.

پیشامدهای مستقل

تعریف ۳.۲ پیشامدهای $A_1, A_2, \dots, A_k$ مستقل اند اگر و تنها اگر احتمال اشتراک هر $2, 3, \dots, k$ یا k تا از این پیشامدها مساوی حاصلضرب احتمالات مربوط به هر پیشامد باشد.

پیشامدهای مستقل

به عنوان مثال، برای استقلال سه پیشامد A ، B و C لازم است که

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

و

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

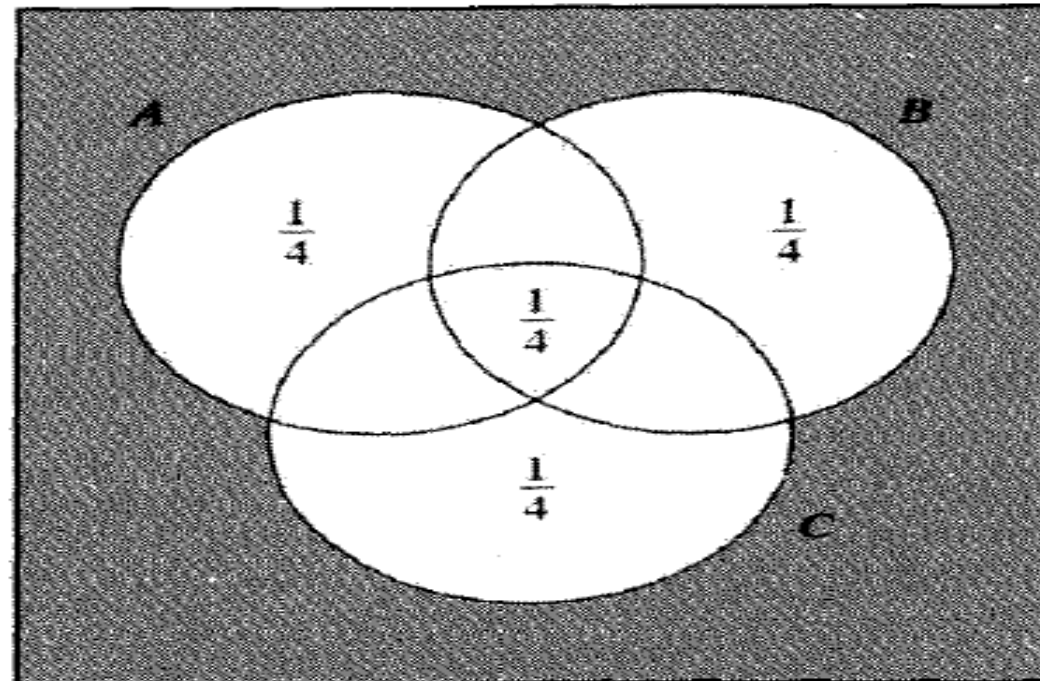
قابل توجه است که سه یا چند پیشامد می توانند دوبه دو مستقل باشند بدون آنکه کلاً مستقل

باشند.

پیشامدهای مستقل

مثال ۲۳.۲

شکل ۸.۲ نمودار ونی را با احتمالهای منسوب به ناحیه‌های مختلف آن نشان می‌دهد. تحقیق کنید که A و B مستقل‌اند، A و C مستقل‌اند، B و C مستقل‌اند، اما A ، B و C مستقل نیستند.



پیشامدهای مستقل

حل. همان‌طور که از نمودار دیده می‌شود، $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$.
 $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$ و $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$.
پس $P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{4} = P(A \cap C)$ ، $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} = P(A \cap B)$
▲ $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8} \neq P(A \cap B \cap C)$ و $P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{4} = P(B \cap C)$

پیشامدهای مستقل

مثال ۲۴.۲

مطلوب است احتمال به دست آوردن

(الف) سه شیر در سه پرتاب تصادفی یک سکه همگن؛

(ب) چهار شش و سپس عددی دیگر در پنج بار ریختن یک تاس ناهمگن.

حل. (الف) از ضرب احتمالات مربوط، به دست می آوریم

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

(ب) از ضرب احتمالات مربوط، به دست می آوریم

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{7776}$$

قضیه بیز

مثال ۲۵.۲

کار تکمیل بنای بزرگراهی ممکن است به علت اعتصاب به تأخیر افتد. فرض کنید احتمال اینکه اعتصابی رخ دهد 60% ، احتمال اینکه اگر اعتصابی نباشد کار به موقع انجام شود 85% ، و احتمال اینکه اگر اعتصابی باشد کار به موقع انجام شود، 35% باشد. احتمال اینکه کار به موقع انجام شود چقدر است؟

قضیه بیز

حل. اگر A پیشامد تکمیل به موقع کار، و B پیشامد وقوع اعتصاب باشد، اطلاعات داده شده را می توان چنین نوشت:

$$P(B) = ۰٫۶۰, P(A|B) = ۰٫۳۵, P(A|B') = ۰٫۸۵$$

با استفاده از فرمول قسمت (الف) تمرین ۴.۲، و این واقعیت که $A \cap B$ و $A \cap B'$ ناسازگارند، و صورت دیگر قاعده ضرب، می توانیم بنویسیم

قضیه بیز

$$\begin{aligned}P(A) &= P[(A \cap B) \cup (A \cap B')] \\&= P(A \cap B) + P(A \cap B') \\&= P(B) \cdot P(A|B) + P(B') \cdot P(A|B')\end{aligned}$$

در این صورت، با قرار دادن مقادیر عددی، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}P(A) &= (0.60)(0.35) + (1 - 0.60)(0.85) \\&= 0.55\end{aligned}$$

قضیه بیز

قضیه ۱۲.۲ اگر پیشامدهای $B_1, B_2, \dots, B_k$ و B_k افزایشی از فضای نمونه‌ای S را تشکیل دهند و به‌ازای $i = 1, 2, \dots, k$ ، $P(B_i) \neq 0$ ، آنگاه برای هر پیشامد A در S

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

قضیه بیز

مثال ۲۶.۲

اعضای یک شرکت مشاور از سه آژانس، اتومبیل کرایه می‌کنند: از آژانس ۱ به میزان ۶۰ درصد، از آژانس ۲ به میزان ۳۰ درصد، و از آژانس ۳ به میزان ۱۰ درصد. اگر ۹ درصد از اتومبیل‌های آژانس ۱، ۲۰ درصد از اتومبیل‌های آژانس ۲، و ۶ درصد از اتومبیل‌های آژانس ۳ به تنظیم موتور نیاز داشته باشند، احتمال اینکه یک اتومبیل کرایه‌ای که به شرکت مشاور تحویل شده است به تنظیم موتور نیاز داشته باشد چقدر است؟

قضیه بیز

حل. اگر A پیشامد نیاز داشتن اتومبیلی به تنظیم موتور باشد و اگر B_1, B_2, B_3 به ترتیب پیشامدهای تعلق یک اتومبیل کرایه شده به آژانسهای ۱، ۲ یا ۳ باشند، داریم $P(B_1) = 0.60$ ، $P(B_2) = 0.30$ ، $P(B_3) = 0.10$ ، $P(A|B_1) = 0.90$ ، $P(A|B_2) = 0.20$ و $P(A|B_3) = 0.06$. اگر این مقادیر را در فرمول قضیه ۱۲.۲ قرار دهیم، نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} P(A) &= (0.60)(0.90) + (0.30)(0.20) + (0.10)(0.06) \\ &= 0.12 \end{aligned}$$

▲ پس، ۱۲ درصد از اتومبیلهایی که به شرکت تحویل می شوند به تنظیم موتور نیاز دارند.

قضیه بیز

با رجوع به مثال قبلی، فرض کنیم سؤال زیر مورد نظر باشد: اگر یک اتومبیل کرایه که به شرکت مشاور تحویل شده است نیاز به تنظیم موتور داشته باشد، چقدر احتمال دارد که متعلق به آژانس ۲ باشد؟ برای پاسخ دادن به این نوع سؤالات، به قضیه زیر که قضیه بیز نامیده می شود نیاز داریم:

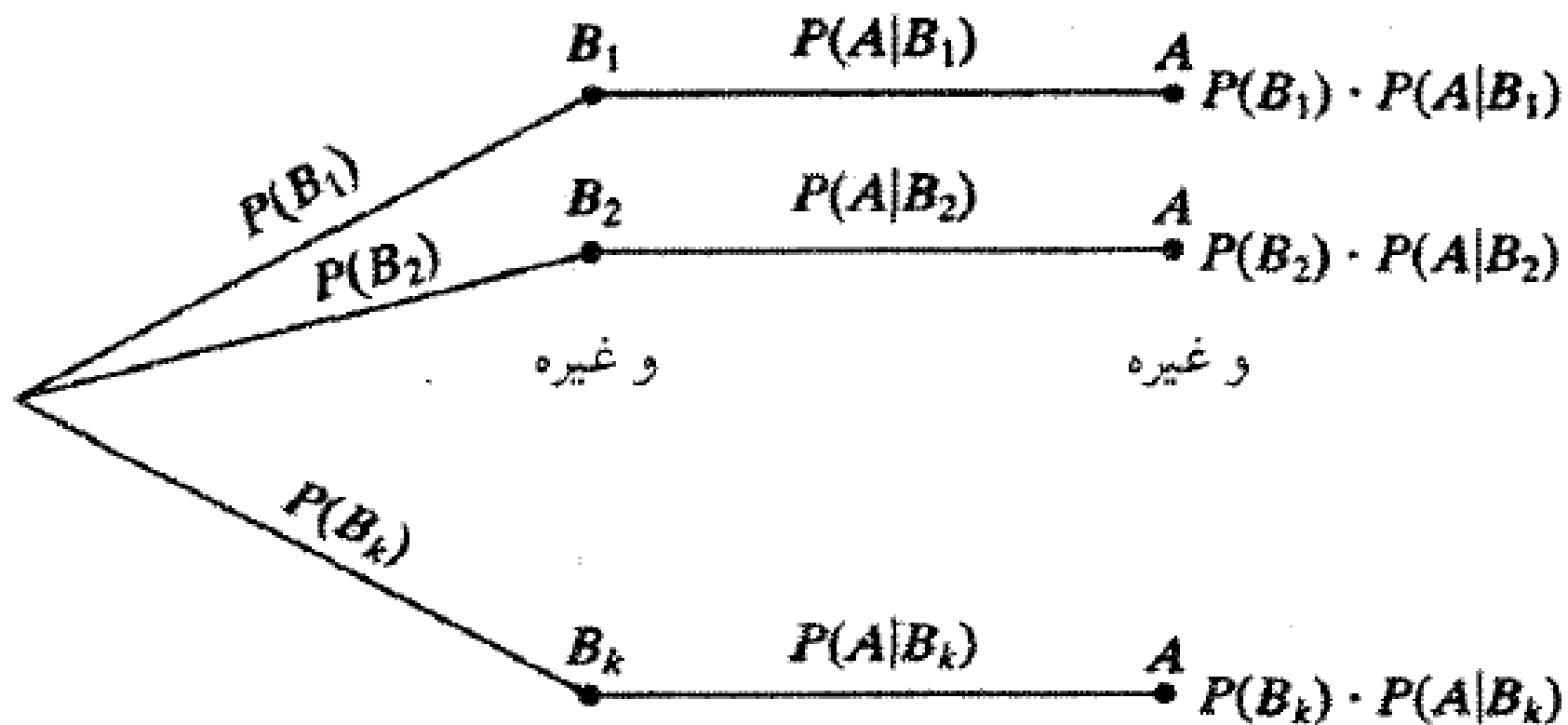
قضیه بیز

قضیه ۱۳.۲ اگر پیشامدهای $B_1, B_2, \dots, B_k$ و B_k افرازی از فضای نمونه‌ای S را تشکیل دهند و به ازای $i, i = 1, 2, \dots, k$ ، $P(B_i) \neq 0$ ، آنگاه برای هر پیشامد A در S ، به قسمی که $P(A) \neq 0$

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r) \cdot P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i) \cdot P(A|B_i)}, \quad r = 1, 2, \dots, k$$

در قالب کلمات، احتمال اینکه از راه شاخه r ام نمودار درختی شکل ۹.۲ به پیشامد A برسیم، به شرط آنکه از راه یکی از k شاخه نمودار به A رسیده باشیم، برابر نسبت احتمال مربوط به r امین شاخه به مجموع احتمالهای مربوط به کل k شاخه درخت است.

قضیه بیز



شکل ۹.۲ نمودار درختی برای قضیه بیز

قضیه بیز

برهان. مطابق تعریف احتمال شرطی، می‌نویسیم $P(B_r|A) = \frac{P(A \cap B_r)}{P(A)}$. لازم است فقط به جای $P(A \cap B_r)$ مقدار $P(B_r) \cdot P(A|B_r)$ ، و به جای $P(A)$ ، عبارت فرمول قضیه ۱۲.۲ را قرار دهیم.



قضیه بیز

مثال ۲۷.۲

با مراجعه به مثال ۲۶.۲، اگر اتومبیل کرایه‌ایی که به شرکت مشاور تحویل شده است به تنظیم موتور نیاز داشته باشد، احتمال اینکه متعلق به آژانس ۲ باشد چقدر است؟

حل. احتمالهای مذکور در صفحه قبل را در فرمول قضیه ۱۳.۲ قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} P(B_2|A) &= \frac{(0.30)(0.20)}{(0.60)(0.09) + (0.30)(0.20) + (0.10)(0.06)} \\ &= \frac{0.060}{0.120} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

قضیه بیز

توجه کنید که گرچه فقط ۳۰ درصد اتومبیل‌هایی که به شرکت تحویل می‌شوند متعلق به آژانس ۲ است، ولی ۵۰ درصد اتومبیل‌هایی که به تنظیم نیاز دارند متعلق به این آژانس‌اند. ▲

قضیه بیز

مثال ۲۸.۲

در استان معینی، دودزایی ۲۵ درصد تمام اتومبیلها بیش از حد عادی است. اگر در آزمون دودزایی وسایل نقلیه استان، اتومبیلی که بیش از حد دود تولید می کند با احتمالی برابر ۹۹٪ مردود شود و اگر اتومبیلی که دودزایی آن بیش از حد عادی نیست با احتمال ۱۷٪ در این آزمون رد شود، احتمال اینکه اتومبیلی که در آزمون رد می شود واقعاً اتومبیلی باشد که دودزایی آن بیش از حد عادی است چقدر است؟

قضیه بیز

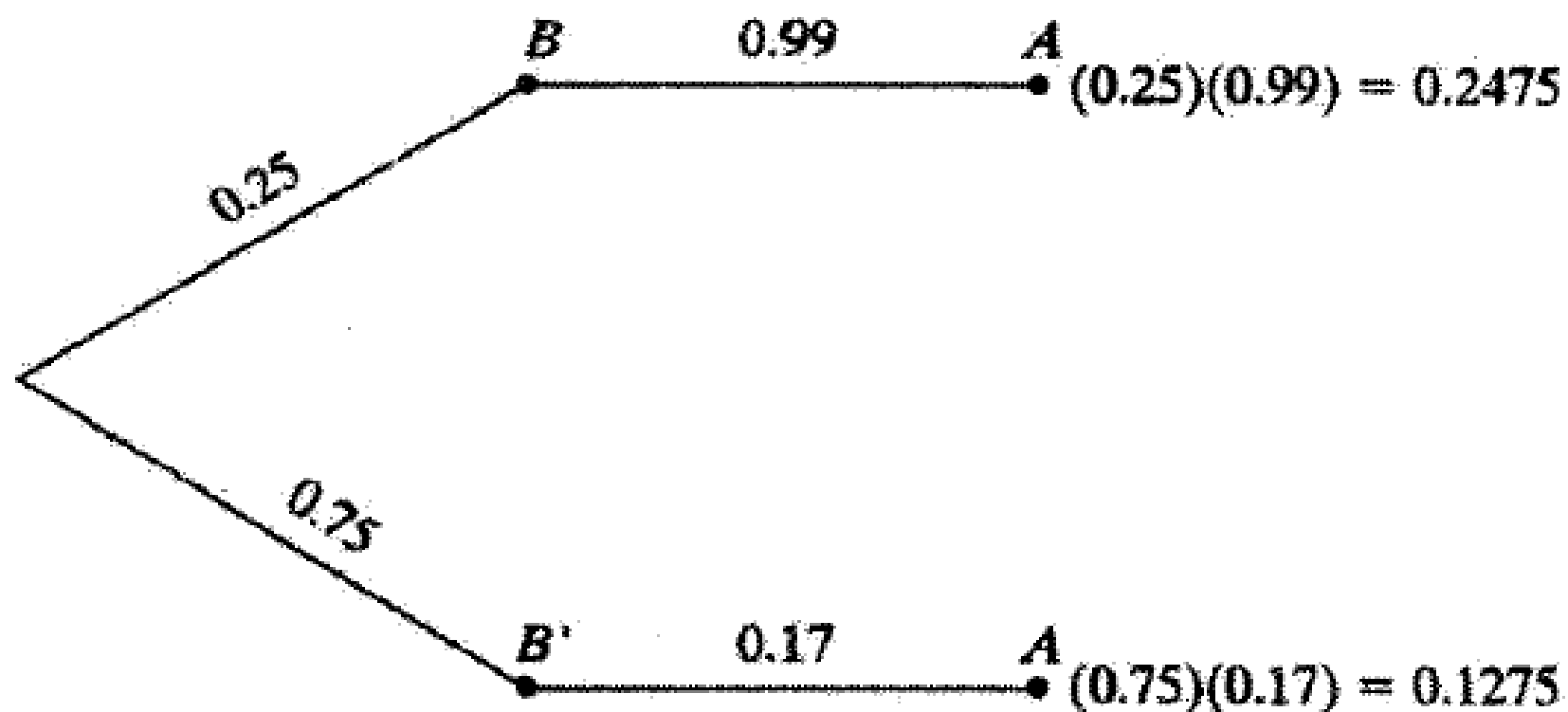
حل. نمودار این وضعیت را به صورت شکل ۱۰.۲ رسم می‌کنیم، درمی‌یابیم که احتمالهای مربوط به دو شاخه نمودار درختی عبارت‌اند از $0.2475 = (0.99)(0.25)$ و $0.1275 = (0.17)(1 - 0.25)$. پس احتمال اینکه اتومبیلی که در آزمون رد می‌شود واقعاً اتومبیلی باشد که بیش از حد دود ایجاد می‌کند برابر است با

$$\frac{0.2475}{0.2475 + 0.1275} = 0.66$$

البته می‌توانستیم این نتیجه را از قرار دادن مستقیم در فرمول قضیه بیز، بدون نمودار درختی نیز به دست آوریم.



قضیه بیز



شکل ۱۰.۲ نمودار درختی مثال ۲۸.۲

تمرین

۱۷.۲ نشان دهید که احتمالاتی شرطی در سه اصل موضوع احتمال صادق‌اند؛ به عبارت دیگر نشان دهید که اگر $P(B) \neq 0$ ، آنگاه

$$(الف) \quad P(A|B) \geq 0$$

$$(ب) \quad P(B|B) = 1$$

(ج) برای هر دنباله از پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار $A_1, A_2, \dots$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B) + \dots$$

راهنمایی تمرین

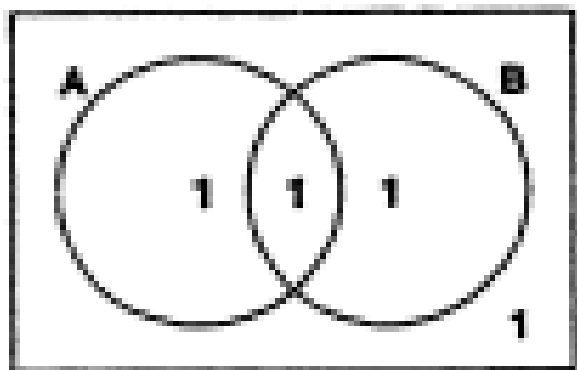
$$(a) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0; \quad (b) P(B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$$\begin{aligned} (c) P(A_1 \cup A_2 \cup \dots | B) &= \frac{P[(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \cap B]}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} + \dots \\ &= P(A_1|B) + P(A_2|B) + \dots \end{aligned}$$

تمرین

۱۸.۲ به کمک مثالهای عددی نشان دهید که $P(B|A) + P(B|A')$ (الف) ممکن است مساوی ۱ باشد؛
(ب) لازم نیست مساوی ۱ باشد.

راهنمایی تمرین

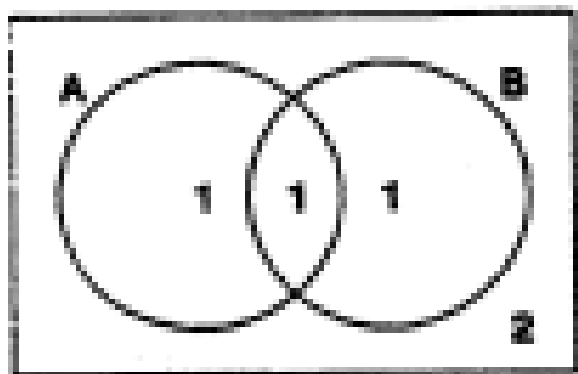


For example

$$(a) \text{ If } P(A \cap B) = P(A \cap B') = P(A' \cap B) = P(A' \cap B') = \frac{1}{4} \text{ so that}$$

$$P(B|A) = \frac{1}{2}, P(B|A') = \frac{1}{2}, \text{ and}$$

$$P(B|A) + P(B|A') = 1$$



$$(b) \text{ If } P(A \cap B) = P(A \cap B') = P(A' \cap B) = \frac{1}{5}$$

$$\text{and } P(A' \cap B') = \frac{2}{5}$$

$$P(B|A) = \frac{1}{2}, P(B|A') = \frac{1}{3}, \text{ and}$$

$$P(B|A) + P(B|A') = \frac{5}{6}$$

تمرین

۱۹.۲ با تکرار برهان قضیه ۱۰.۲، نشان دهید که به شرط $P(A \cap B \cap C) \neq 0$

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B) \cdot P(D|A \cap B \cap C)$$

راهنمایی تمرین

$$\begin{aligned}P(A \cap B \cap C \cap D) &= P(A \cap B \cap C)P(D|A \cap B \cap C) \\&= P(A \cap B)P(C|A \cap B)P(D|A \cap B \cap C) \\&= P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)P(D|A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

تمرین

۲۰.۲ برای سه پیشامد A ، B و C ، $P(A \cap B \cap C) \neq 0$ و $P(C|A \cap B) = P(C|B)$ نشان دهید که $P(A|B \cap C) = P(A|B)$.

راهنمایی تمرین

$$\begin{aligned} P(C|A \cap B) &= P(C|B) \rightarrow \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} \rightarrow \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &\rightarrow P(A|B \cap C) = P(A|B) \end{aligned}$$

تمرین

۲۱.۲ نشان دهید که اگر $P(B|A) = P(B)$ و $P(B) \neq 0$ ، آنگاه $P(A|B) = P(A)$.

راهنمایی تمرین

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \rightarrow P(A|B) = P(A)$$

تمرین

۲۲.۲ نشان دهید که اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، آنگاه

(الف) دو پیشامد A' و B مستقل اند؛

(ب) دو پیشامد A' و B' مستقل اند.

راهنمایی تمرین

$$(a) P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) = P(A)P(B) + P(A' \cap B)$$

$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)[(1 - P(A))] = P(B)P(A') \quad \text{QED}$$

$$(b) P(B') = P(A \cap B') + P(A' \cap B') = P(A' \cap B') + P(B')P(A)$$

$$P(A' \cap B') = P(B') - P(B')P(A|B') = P(B')[1 - P(A)] = P(B')P(A') \quad \text{QED}$$

تمرین

۲۳.۲ نشان دهید که اگر پیشامدهای A و B وابسته باشند، آنگاه پیشامدهای A و B' وابسته اند.

راهنمایی تمرین

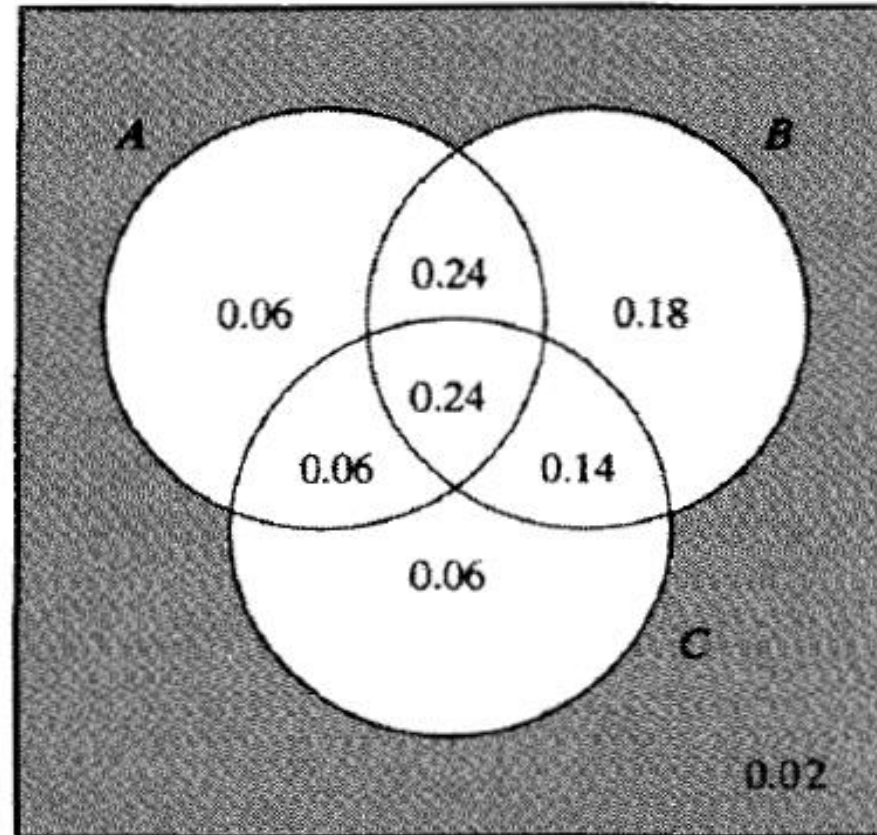
Assume that A and B' are independent and show that this leads to contradiction.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') = P(A \cap B) + P(A)P(B')$$

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B') = P(A)[1 - P(B')] = P(A)P(B) \text{ and } A \text{ and } B \text{ are independent}$$

تمرین

۲۴.۲ با رجوع به شکل ۱۱.۲ نشان دهید که $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ الزاماً نتیجه نمی‌دهد که پیشامدهای A ، B ، و C همگی دوبه‌دو مستقل‌اند.



راهنمایی تمرین

$$P(A) = 0.60, P(B) = 0.80, P(C) = 0.50, P(A \cap B) = 0.48, P(A \cap C) = 0.30$$

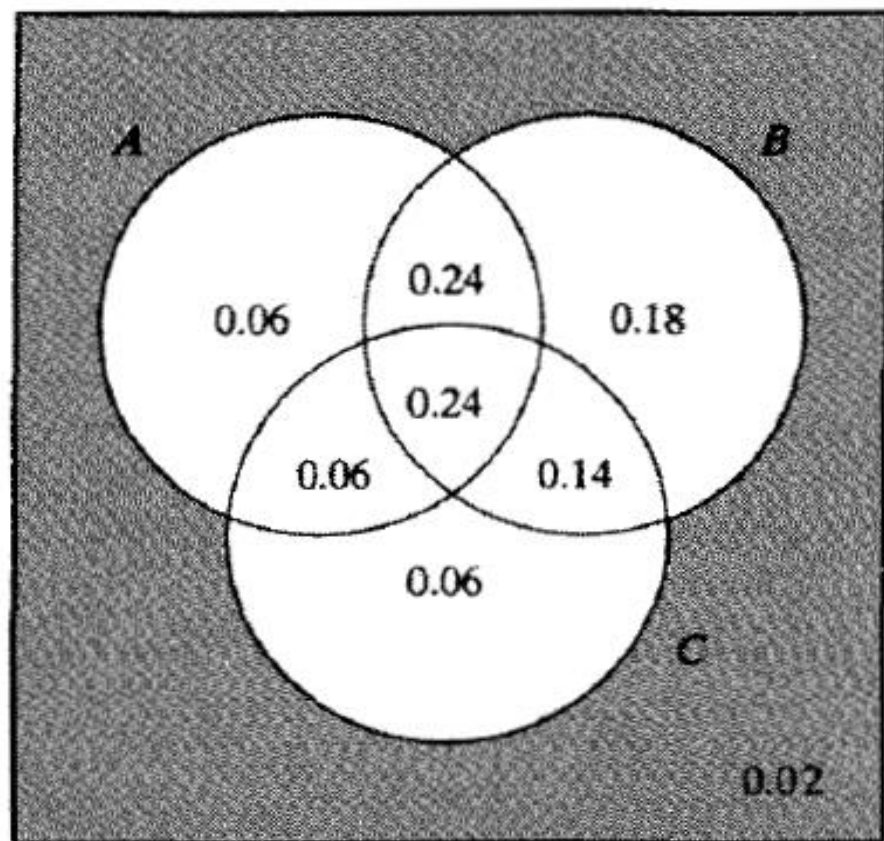
$$P(B \cap C) = 0.38, P(A \cap B \cap C) = 0.24$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0.24, P(A)P(B)P(C) = (0.6)(0.8)(0.5) = 0.24$$

$$P(B \cap C) = 0.38, P(B)P(C) = (0.8)(0.5) = 0.40 \quad B \text{ and } C \text{ not independent}$$

تمرین

۲۵.۲ با رجوع به شکل ۱۱.۲ نشان دهید که اگر A از B مستقل و A از C مستقل باشد، آنگاه B الزاماً از C مستقل نیست.



راهنمایی تمرین

Refer to 2.21

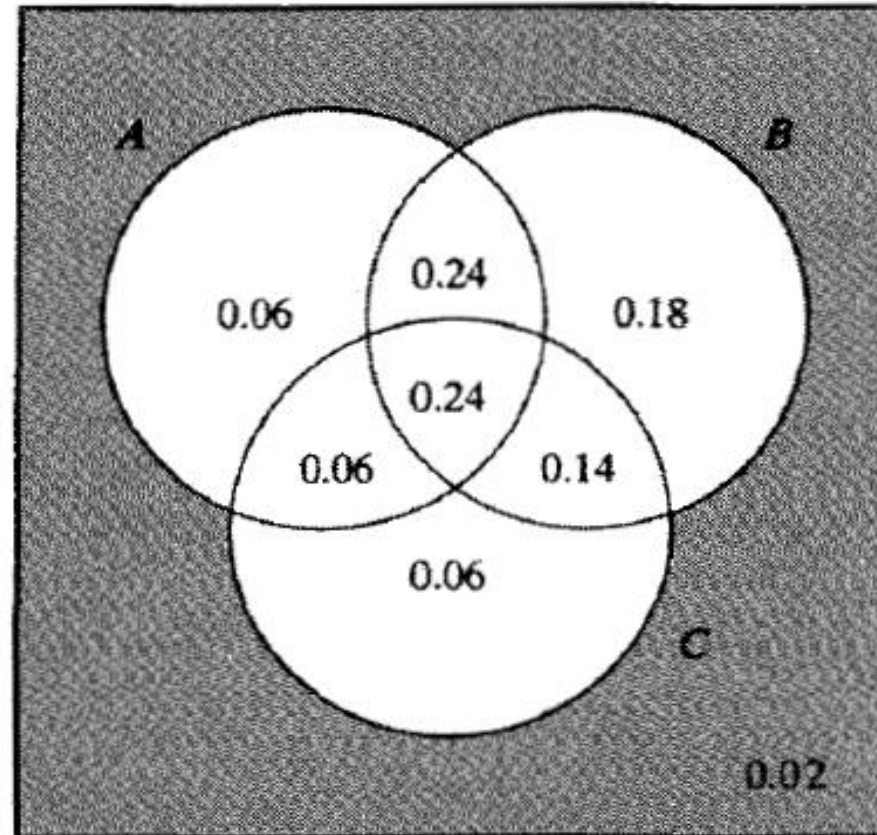
$P(A \cap B) = 0.48$, $P(A)P(B) = (0.6)(0.8) = 0.48$ *A and B independent*

$P(A \cap C) = 0.30$, $P(A)P(C) = (0.6)(0.5) = 0.30$ *A and C independent*

$P(B \cap C) = 0.38$, $P(B)P(C) = (0.8)(0.5) = 0.40$ *B and C not independent*

تمرین

۲۶.۲ با رجوع به شکل ۱۱.۲ نشان دهید که اگر A از B مستقل و A از C مستقل باشد، آنگاه A الزاماً از $B \cup C$ مستقل نیست.



راهنمایی تمرین

(Refer to 2.21 and 2.22) Already showed that A and B independent,

A and C independent

$$P[A \cap (B \cup C)] = 0.54, P(A) = 0.60, P(B \cup C) = 0.92, (0.6)(0.92) = 0.552 \\ \neq 0.54$$

تمرین

۲۷.۲ اگر پیشامدهای A ، B ، و C مستقل باشند، نشان دهید که

(الف) A و $B \cap C$ مستقل اند.

(ب) A و $B \cup C$ مستقل اند.

راهنمایی تمرین

$$(a) \ P[A \cap (B \cap C)] = P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = P(A)P(B \cap C) \quad \text{QED}$$

$$\begin{aligned}(b) \ P[A \cap (B \cup C)] &= P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\&= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\&= P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\&= P(A)[P(B) + P(C) - P(B \cap C)] \\&= P(A)P(B \cup C) \quad \text{QED}\end{aligned}$$

تمرین

۲۸.۲ اگر $P(A|B) < P(A)$ ، ثابت کنید که $P(B|A) < P(B)$.

راهنمایی تمرین

$$\begin{aligned} P(A|B) < P(A) &\rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} < P(A) \rightarrow P(A|B) < P(A) \cdot P(B) \\ &\rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} < P(B) \rightarrow P(B|A) < P(B) \quad \text{QED.} \end{aligned}$$

تمرین

۲۹.۲ اگر $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی مستقل باشند، ثابت کنید که

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - \{1 - P(A_1)\} \cdot \{1 - P(A_2)\} \cdots \{1 - P(A_n)\}$$

راهنمایی تمرین

Proof by induction: If $n = 2$, then $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2)$

and $1 - [1 - P(A_1)] \cdot [1 - P(A_2)] = 1 - 1 + P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2)$.

Assuming $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - [1 - P(A_1)] \cdot [1 - P(A_2)] \cdot \dots \cdot [1 - P(A_n)]$,

we can write

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n \cup A_{n+1}) &= P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) + P(A_{n+1}) \\ &\quad - P(A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n) \cdot P(A_{n+1}) \\ &= P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cdot [1 - P(A_{n+1})] + P(A_{n+1}) \\ &= \{1 - [P(A_1)] \cdot [1 - P(A_2)] \cdot \dots \cdot [1 - P(A_n)]\} \cdot [1 - P(A_{n+1})] + P(A_{n+1}) \\ &= 1 - [P(A_{n+1}) + P(A_{n+1})] + [1 - P(A_1)] \cdot [1 - P(A_2)] \cdot \dots \cdot [1 - P(A_{n+1})] \quad \text{QED} \end{aligned}$$

تمرین

۳۰.۲ نشان دهید برای اینکه k پشامد مستقل باشند باید $۲^k - k - ۱$ شرط برقرار باشند.

راهنمایی تمرین

Two at time $\binom{k}{2}$

Three at time $\binom{k}{3}$

k at time $\binom{k}{k}$

$$\binom{k}{2} + \binom{k}{3} + \dots + \binom{k}{k} = 2^k - \binom{k}{0} - \binom{k}{1} = 2^k - 1 - k$$

تمرین

۳۱.۲ برای هر پیشامد A ، نشان دهید که A و $\emptyset$ مستقل اند.

راهنمایی تمرین

$$P(A \cap \emptyset) = P(A) \cdot P(\emptyset|A) = P(A) \cdot P(\emptyset), \text{ since } P(\emptyset|A) = P(\emptyset) = 0.$$