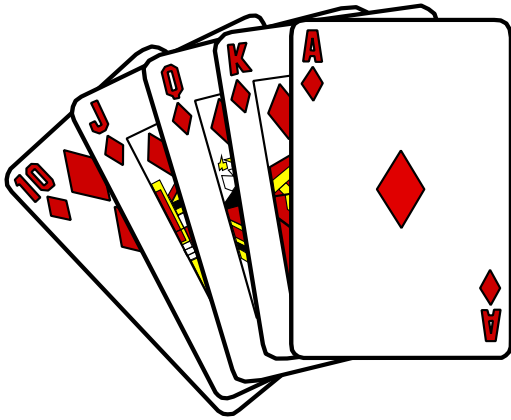


معرفی احتمال

# معرفی احتمال

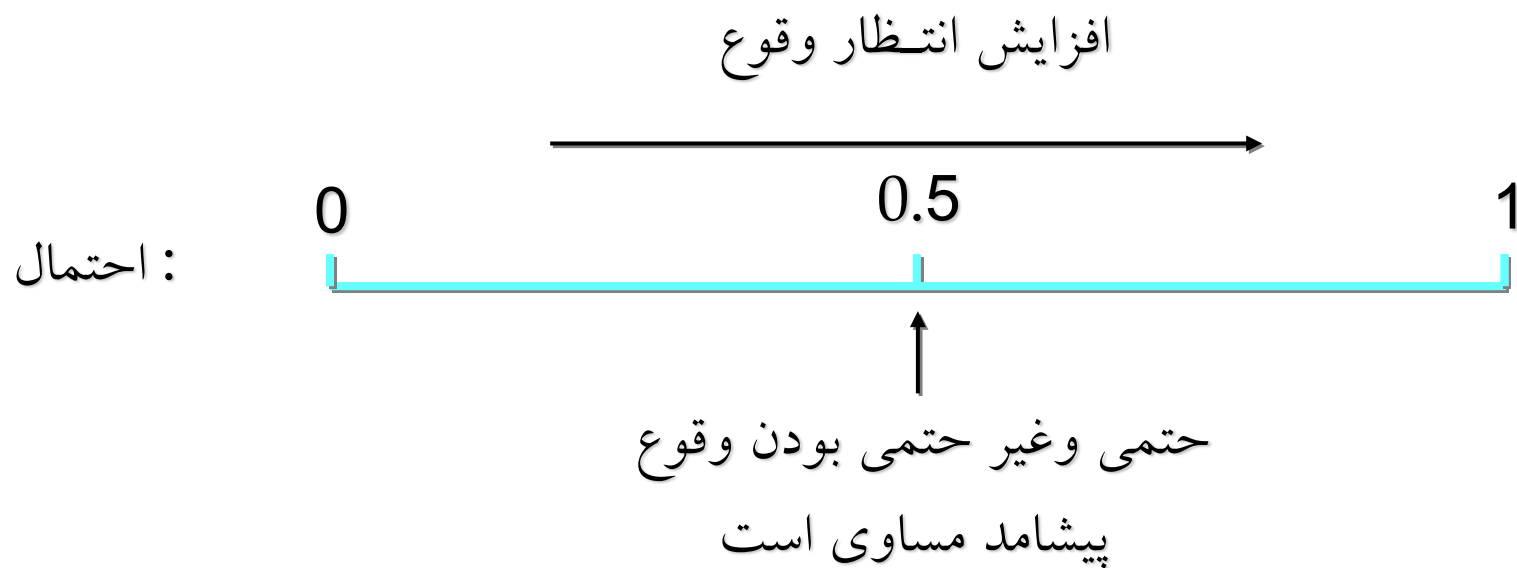
- آزمایش ها، قواعد شمارش، و تعیین احتمالات
- پیشامد ها و احتمالات آنها
- برخی روابط اساسی احتمال
- احتمال شرطی
- قضیه بیز



# احتمال

- احتمال مقدار عددی از میزان انتظار ما برای وقوع هر پیشامد است.
- مقادیر احتمال همیشه باید عددی بین صفر و یک باشند.
- احتمال نزدیک صفر، پیشامدی را نشان می دهد که وقوع آن بسیار غیر محتمل است.
- احتمال نزدیک یک، پیشامدی را نشان می دهد که وقوع آن تقریباً حتمی است.
- احتمال 0.5 پیشامدی را نشان می دهد که وقوع و عدم وقوع آن به یک اندازه مورد انتظار است.

احتمال به عنوان اندازه ای عددی از انتظار رخداد



# یک آزمایش و فضای نمونه ای آن

- یک آزمایش فرآیندی است که نتایج تعریف شده را ایجاد میکند.
- فضای نمونه هر آزمایش مجموعه تمام نتایج آزمایش است.
- نقطه نمونه عضوی از فضای نمونه و یکی از نتایج آزمایش ویژه است.

## مثال: سرمایه گذاری های

سهام گذاری در دو سهام نفت و معدن سرمایه گذاری کرده است. سهام گذار نتایج ممکن این سرمایه گذاری ها را از اکنون برای سه ماه به صورت زیر تعیین کرده است.

سود یا زیان سرمایه گذاری  
در 3 ماه (در واحد 1000)

| نفت | معدن |
|-----|------|
| 10  | 8    |
| 5   | -2   |
| 0   |      |
| -20 |      |

# قاعده شمارش

## آزمایشهای چند مرحله ای

- اگر عملی  $n_1$  طریق و برای هر کدام از آنها، عمل دومی به  $n_2$  طریق و ... عمل  $k$  امی به  $n_k$  انجام شود. این  $k$  عمل با هم به

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$$

طریق صورت می پذیرند.

- نمایش نموداری مفید برای آزمایش چند مرحله ای نمودار درختی است.

## مثال: سرمایه گذاری

- قاعده شمارش آزمایشهای چند مرحله ای
- سرمایه گذاری را میتوان به صورت یک آزمایش دو مرحله ای در نظر گرفت که شامل دو سهام هر یک با مجموعه ای از برآمدهای آزمایش است.

$$n_1 = 4$$

نفت:

$$n_2 = 2$$

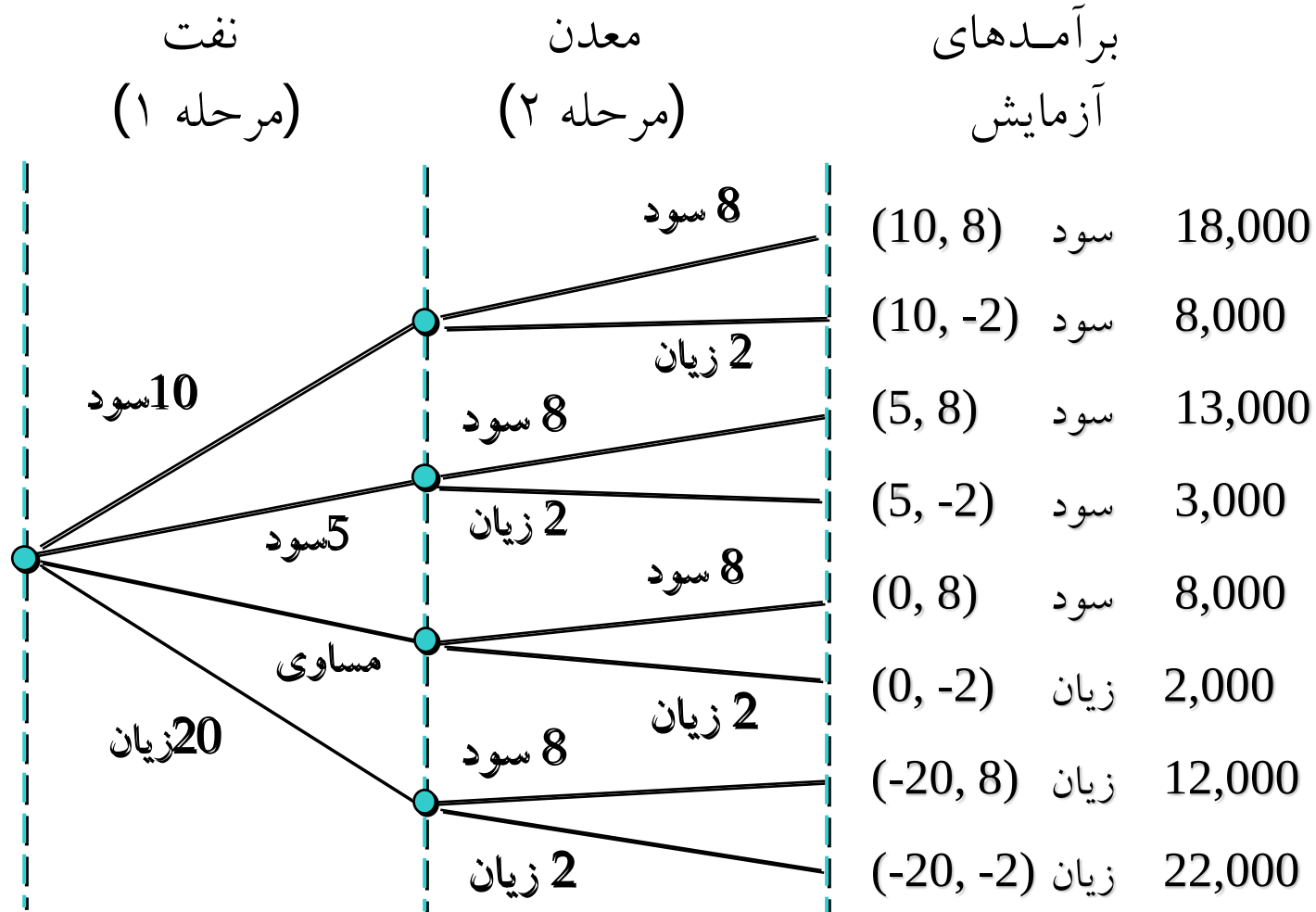
معدن:

تعداد کل      برآمدهای آزمایش:

$$n_1 n_2 = (4)(2) = 8$$

# مثال: سرمایه گذاری

- نمودار درختی



## قاعده شمارش ترکیب

انتخاب  $n$  شی از  $N$  شی ( $n \leq N$ ) به طوریکه ترتیب آنها مهم نباشد عبارت است از:

$$C_n^N = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

که

$$N! = N(N-1)(N-2) \dots (2)(1)$$

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots (2)(1)$$

$$0! = 1$$

## قاعده شمارش جایگشت

انتخاب  $n$  شی از  $N$  شی ( $n \leq N$ ) به طوریکه ترتیب آنها مهم باشد عبارت است از:

$$P_n^N \equiv n! \binom{N}{n} \equiv \frac{N!}{(N-n)!}$$

# تعیین احتمالات

- روش کلاسیک  
تعیین احتمالات مبتنی بر فرض تساوی احتمال نتایج است.
- روش فراوانی نسبی  
تعیین احتمالات مبتنی بر داده های آزمایشی یا تاریخی است.
- روش ذهنی  
تعیین احتمالات مبتنی بر نظر شخصی تعیین کننده است.

# روش کلاسیک

اگر آزمایشی  $n$  نتیجه ممکن داشته باشد این روش احتمال  $1/n$  هر نتیجه را تعیین می کند.

• مثال

آزمایش: پرتاب تاس

فضای نمونه:  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

احتمالات: هر نقطه نمونه  $1/6$  شانس وقوع دارد.

## مثال: ابزار اجاره ای

- روش فراوانی نسبی  
مدیر فروشگاه مایل است احتمال تعداد جلا دهنده کف هایی که در هر روز اجاره داده می شوند را تعیین کند. اسناد اداره، فراوانی های زیر را برای اجاره نامه های روزانه، ۴۰ روز را نشان می دهد.

| تعداد                      | تعداد |
|----------------------------|-------|
| جلا بخش های اجاره داده شده | روزها |
| 0                          | 4     |
| 1                          | 6     |
| 2                          | 18    |
| 3                          | 10    |
| 4                          | 2     |

## مثال: ابزار اجاره ای

- روش فراوانی نسبی

دراین روش، احتمالات با تقسیم فراوانی های تعداد روزانه بر فراوانی کل (تعداد کل روزها) به دست می آید.

| تعداد                       | تعداد    | احتمالات      |
|-----------------------------|----------|---------------|
| جواب بخش های اجاره داده شده | روزها    |               |
| 0                           | 4        | $0.10 = 4/40$ |
| 1                           | 6        | $0.15 = 6/40$ |
| 2                           | 18       | 0.45 etc.     |
| 3                           | 10       | 0.25          |
| 4                           | <u>2</u> | <u>0.05</u>   |
|                             | 40       | 1.00          |

## روش ذهنی

- هنگامی که وضعیت اقتصادی و موقعیت شرکت تغییر میکند تعیین احتمالات تنها براساس داده های تجربی، ممکن است، نامناسب باشد.
- می توانیم هر اطلاعات موجود را به همان خوبی تجربه و مشاهده به کار ببریم. اما سرانجام یک مقدار احتمال، درجه اطمینان ما از وقوع برآمد آزمایش را بیان می کند.
- با ترکیب نتایج فراوانی نسبی یا کلاسیک با نتایج ذهنی بهترین احتمال برآوردگر به دست می آید.

## مثال: سرمایه گذاری

با به کارگیری روش ذهنی یک تحلیلگر احتمالات زیر را ممکن است به دست آورد:

| احتمال | سود / زیان خالص | برآمد آزمایش |
|--------|-----------------|--------------|
| 0.20   | سود 18,000      | ( 10, 8)     |
| 0.08   | سود 8,000       | ( 10, -2)    |
| 0.16   | سود 13,000      | ( 5, 8)      |
| 0.26   | سود 3,000       | ( 5, -2)     |
| 0.10   | سود 8,000       | ( 0, 8)      |
| 0.12   | زیان 2,000      | ( 0, -2)     |
| 0.02   | زیان 12,000     | (-20, 8)     |
| 0.06   | زیان 22,000     | (-20, -2)    |

# پیشامدها و احتمال آنها

- پیشامد مجموعه ای از نقاط نمونه است.
- احتمال هر پیشامد برابر با مجموع احتمالات نقاط نمونه است.
- اگر بتوانیم تمام نقاط نمونه یک آزمایش را شناسایی و برای هر کدام احتمالی تعیین کنیم، میتوانیم احتمال هر پیشامد را محاسبه کنیم.

## مثال: ابزار اجاره ای

- پیشامدها و احتمالات آنها

پیشامد  $M$  = سود دهی نفت

$$M = \{(10, 8), (10, -2), (5, 8), (5, -2)\}$$

$$\begin{aligned} P(M) &= P(10, 8) + P(10, -2) + P(5, 8) + P(5, -2) \\ &= 0.2 + 0.08 + 0.16 + 0.26 \\ &= 0.70 \end{aligned}$$

پیشامد  $C$  = سود دهی معدن کولین

$$P(C) = 0.48 \quad (\text{به روش مشابه به دست می آید})$$

## برخی روابط اساسی احتمال

- در احتمال روابطی وجود دارند که برای محاسبه احتمال هریک از پیشامدها بدون اطلاع از احتمالات تمام نقاط نمونه قابل استفاده اند.

— متمم پیشامد

— اجتماع دو پیشامد

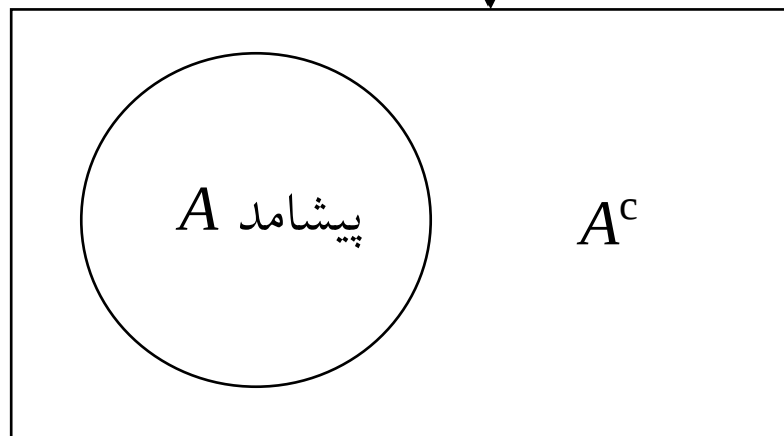
— اشتراک دو پیشامد

— پیشامدهای دو به دو ناسازگار

## متمم دو پیشامد

- متمم پیشامد  $A$  پیشامدی است شامل تمام نقاطی از نمونه که در  $A$  نیستند.
- متمم پیشامد  $A$  با  $A^c$  نشان داده می شود.
- نمودار ون زیر مفهوم متمم را به تصویر کشیده است.

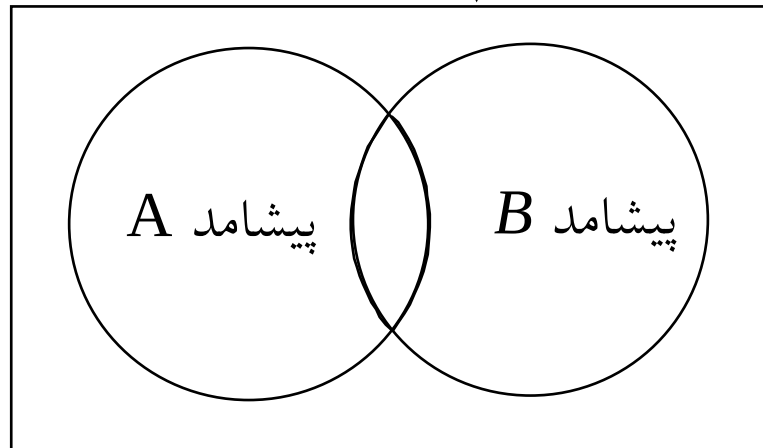
فضای نمونه  $S$



# اجتماع دو پیشامد

- اجتماع دو پیشامد  $A$  و  $B$  پیشامدی است شامل تمام نقاط نمونه که یا در  $A$  یا در  $B$  یا در هر دو آنها وجود دارد.
- اجتماع با  $A \cup B$  نشان داده می شود.  $\square$
- اجتماع  $A$  و  $B$  در زیر نمایش داده شده است.

فضای نمونه  $S$



## مثال: سرمایه گذاری

- اجتماع دو پیشامد

M سود دهی نفت = پیشامد

C سود دهی معدن = پیشامد

$M \cup C$  سود دهی نفت یا سود دهی معدن

$$M \cup C = \{(10, 8), (10, -2), (5, 8), (5, -2), (0, 8), (-20, 8)\}$$

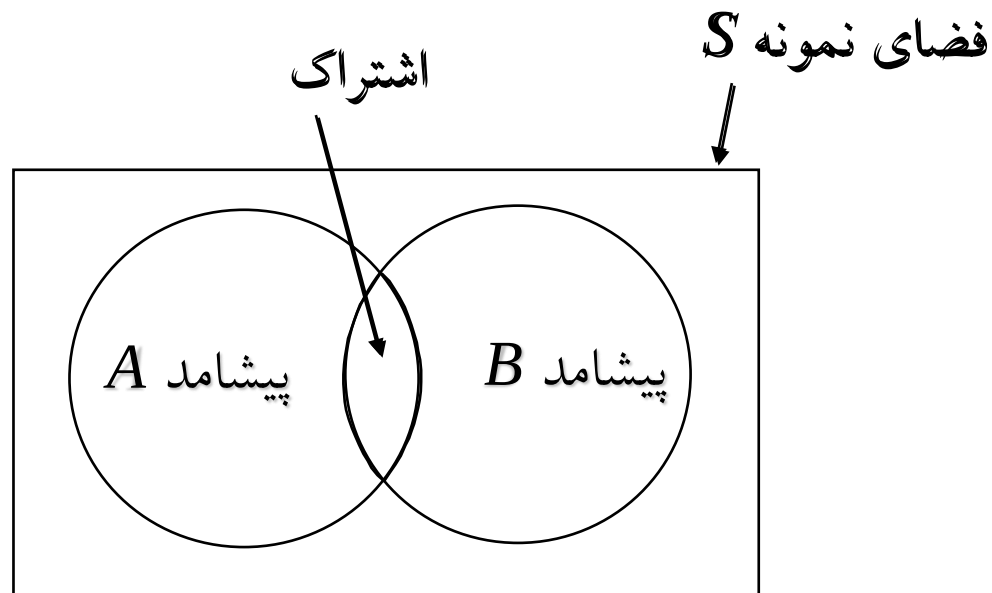
$$\begin{aligned} P(M \cup C) &= P(10, 8) + P(10, -2) + P(5, 8) + P(5, -2) \\ &\quad + P(0, 8) + P(-20, 8) \end{aligned}$$

$$= 0.20 + 0.08 + 0.16 + 0.26 + 0.10 + 0.02$$

$$= 0.82$$

## اشتراک دوپیشامد

- اشتراک پیشامدهای  $A$  و  $B$  مجموعه ای از تمام نقاط نمونه است که هم در  $A$  و هم در  $B$  باشد.
- اشتراک به صورت  $A \cap B$  نشان داده می شود.
- اشتراک  $A$  و  $B$  ناحیه متداخل در تصویر زیر است.



## مثال: سرمایه گذاری

- اشتراک دوپیشامد

$M$  سود دهی نفت = پیشامد

$C$  سود دهی معدن = پیشامد

$M \cap C$  = سود دهی نفت و سود دهی معدن

$$M \cap C = \{(10, 8), (5, 8)\}$$

$$P(M \cap C) = P(10, 8) + P(5, 8)$$

$$= 0.20 + 0.16$$

$$= 0.36$$

## قانون جمع

- قانون جمع روشی است برای محاسبه احتمال رخداد پیشامد  $A$  یا  $B$  یا هم  $A$  و هم  $B$ .
- قانون به این صورت نوشته می شود:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

## مثال: سرمایه گذاری

- قانون جمع

### سود دهی نفت یا معدن

می دانیم:  $P(M) = .70$ ,  $P(C) = .48$ ,  $P(M \cap C) = 0.36$

داریم:  $P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C)$

$$= 0.70 + 0.48 - 0.36$$

$$= 0.82$$

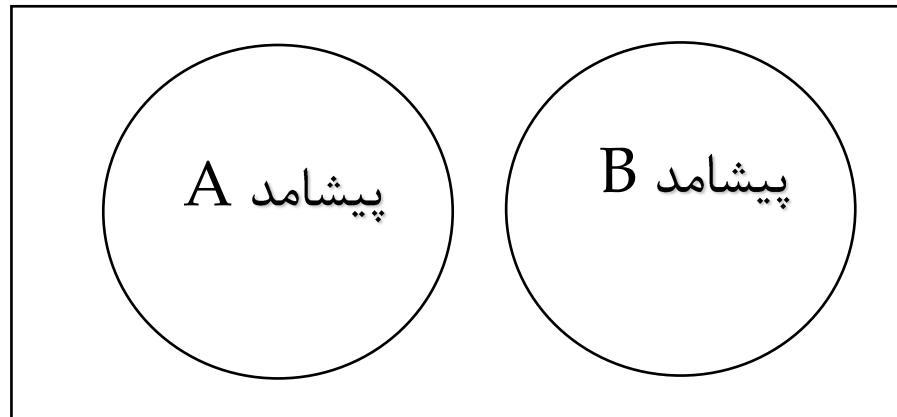
نتیجه با آنچه مستقیماً با استفاده از تعریف احتمال پیشامد به دست آمد، یکسان است.

# پیشامدهای دو به دو ناسازگار

- دو پیشامد را دو به دو ناسازگار گوئیم هرگاه پیشامدها هیچ نقطه مشترکی در نمونه نداشته باشند.

دوپیشامد، دو به دو ناسازگار است، اگر هنگامی که یکی از پیشامدها رخ می دهد، دیگری نمی تواند رخ بدهد.

فضای نمونه S



## پیشامدهای دو به دو ناسازگار

- قانون جمع برای پیشامدهای دو به دو ناسازگار

$$P(A \cup \square B) = P(A) + P(B)$$

# احتمال شرطی

- احتمال یک پیشامد با فرض اینکه پیشامد دیگر رخ داده است، احتمال شرطی نامیده می شود.
- احتمال شرطی به صورت  $P(A | B)$  نشان داده میشود.
- احتمال شرطی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

## مثال: سرمایه گذاری

- احتمال شرطی

احتمال سود دهی معدن به شرط سود دهی نفت

$$P(C | M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{0.36}{0.70} = 0.51$$

## قانون همزمان

- قانون همزمان روشی برای محاسبه احتمال اشتراک دو پشامد است.
- قانون به صورت زیر نوشته می شود:

$$P(A \cap B) = P(B) P(A|B)$$

## مثال: سرمایه گذاری

- قانون همزمان

### احتمال سود دهی نفت و معدن

$$P(M) = 0.70, P(C|M) = 0.51 \quad \text{می دانیم:}$$

$$P(M \cap C) = P(M)P(M|C) \quad \text{داریم:}$$

$$= (0.70)(0.51)$$

$$= 0.36$$

نتیجه با آنچه مستقیماً با استفاده از تعریف احتمال پیشامد به دست آمد، یکسان است.

## پیشامدهای مستقل

- پیشامدهای  $A$  و  $B$  مستقلند، اگر

$$P(A | B) = P(A)$$

# پیشامدهای مستقل

---

- قانون همزمان برای پیشامدهای مستقل

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- قانون جمع می تواند برای آزمایش مستقل بودن دو پیشامد هم به کار رود.

## مثال: سرمایه گذاری

- قانون همزمان پیشامدهای مستقل

آیا  $M$  و  $C$  از هم مستقلند؟

آیا  $P(M \cap C) = P(M)P(C)$ ؟

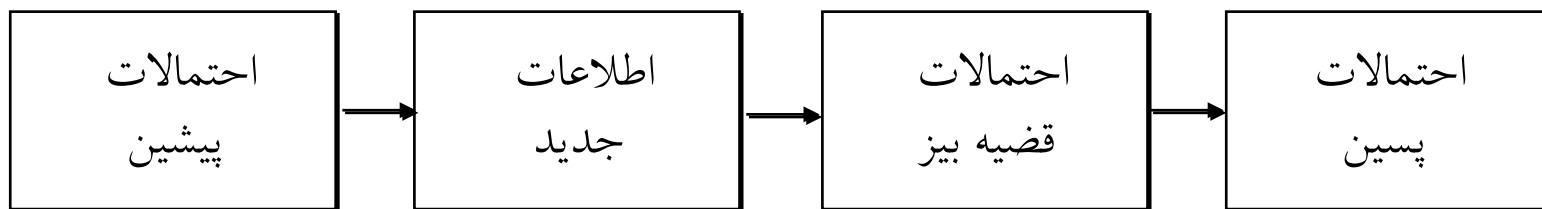
می دانیم:  $P(M \cap C) = 0.36$ ,  $P(M) = 0.70$ ,  $P(C) = 0.48$

اما:  $P(M)P(C) = (0.70)(0.48) = 0.34$

$0.34 \neq 0.36$  بنابراین  $M$  و  $C$  مستقل نیستند.

## قضیه بیز

- اغلب تحلیل احتمال را با احتمال آغازین یا پیشین شروع میکنیم.
- سپس، از یک نمونه و گزارش ویژه، یا یک آزمون تولید برخی اطلاعات اضافی را کسب می کنیم.
- با فرض این اطلاعات، احتمال پسین یا تجدید نظر شده را به دست می آوریم.
- قضیه بیز میانگین احتمالات پسین یا تجدید نظر شده را ایجاد می کند.



## مثال: پیشنهاد ساخت یک مرکز خرید

پیشنهاد ساخت یک مرکز خرید، رقابت شدیدی در بازار مرکزی شهر ایجاد کرده است. اگر مرکز خرید ساخته شود، مالک باید نقل مکان کند. مرکز خرید ساخته نمیشود مگر اینکه تغییر کاربری توسط شورای شهر تصویب شود. ابتدا باید جلسه هیات مدیره یک طرح پیشنهادی در موافقت یا مخالفت با تغییر کاربری به شورای شهر ارائه دهد. داریم:

$A_1$  = شورای شهر تغییر کاربری را تصویب کند

$A_2$  = شورای شهر تغییر کاربری را تصویب نکند

• احتمالات پیشین

طبق نظر شخصی:  $P(A_1) = 0.7, P(A_2) = 0.3$

## مثال: پیشنهاد ساخت یک مرکز خرید

- اطلاعات جدید

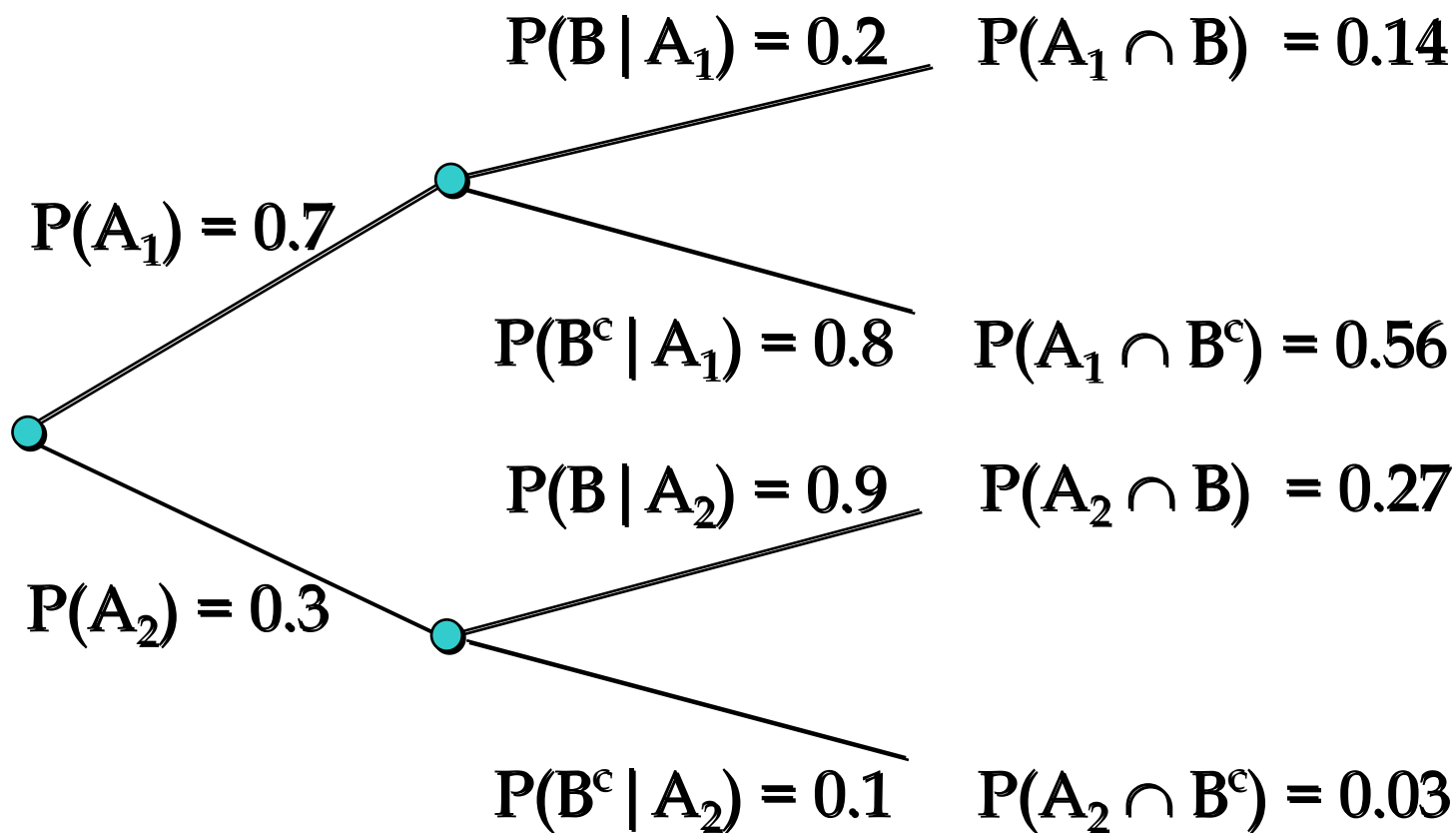
جلسه هیات مدیره عدم تغییر منطقه بندی را توصیه کرده است. پیشامد رای منفی جلسه هیات مدیره را با  $B$  مشخص می کنیم. اگر  $B$  رخ بدهد، باید احتمالات تصویب یا عدم تصویب شورای شهر را بازنگری کند.

- احتمالات شرطی طبق تجربه رای شورای شهر و هیات مدیره به صورت زیر است:

$$P(B | A_1) = 0.2 \quad P(B | A_2) = 0.9$$

## مثال: پیشنهاد ساخت یک مرکز خرید

• نمودار درختی



## قضیه بیز

- برای یافتن احتمال پیشین وقوع پیشامد با فرض اینکه پیشامد رخ داده است، قضیه بیز را به کار می‌بریم.

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)}$$

- قضیه بیز زمانی قابل اجراست که پیشامدها دو به دو ناسازگار و اجتماع آنها برابر کل فضای نمونه باشد.

## مثال: پیشنهاد ساخت یک مرکز خرید

- احتمالات شرطی

با فرض اینکه رای جلسه هیات مدیره موافق تغییر منطقه بندی نیست، احتمالات پیشین را به صورت زیربازنویسی میکنیم:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} = \frac{(0.7)(0.2)}{(0.7)(0.2) + (0.3)(0.9)}$$
$$= 0.34$$

- نتیجه گیری

رای جلسه هیات مدیره خبر خوشحال کننده ای است. احتمال اینکه شورای شهر تغییر منطقه بندی را تصویب کند 0.34 است و در مقابل احتمال پیشین 0.70 می باشد.

# رهیافت جدولی

• گام ۱- سه ستون زیر را بسازید:

ستون ۱- پیشامدهای دو به دو ناسازگار هر احتمال پیشین مورد نظر

ستون ۲- احتمالات پیشین هر پیشامد

ستون ۳- احتمالات شرطی اطلاعات جدید مفروض هر پیشامد

# رهیافت جدولی

| (1)      | (2)        | (3)        | (4) | (5) |
|----------|------------|------------|-----|-----|
| پیشامدها | احتمالات   | احتمالات   |     |     |
| $A_i$    | پیشین      | شرطی       |     |     |
|          | $P(A_i)$   | $P(B A_i)$ |     |     |
| $A_1$    | 0.7        | 0.2        |     |     |
| $A_2$    | <u>0.3</u> | 0.9        |     |     |
|          | 1.0        |            |     |     |

## رهیافت جدولی

- گام ۲- در ستون ۴ مجموع احتمالات توام هر پیشامد و اطلاعات جدید  $B$  را با استفاده از قضیه همزمان محاسبه کنید.  
احتمالات پیشین ستون ۲ را با احتمالات شرطی متناظر در ستون ۳ جمع کنید داریم:

$$P(A_i \cap B) = P(A_i)$$

$$P(B|A_i)$$

# رهیافت جدولی

| (1)      | (2)               | (3)              | (4)              | (5) |
|----------|-------------------|------------------|------------------|-----|
| پیشامدها | احتمالات<br>پیشین | احتمالات<br>شرطی | احتمالات<br>توام |     |
| $A_i$    | $P(A_i)$          | $P(B   A_i)$     | $P(A_i   B)$     |     |
| $A_1$    | 0.7               | 0.2              | 0.14             |     |
| $A_2$    | <u>0.3</u>        | 0.9              | 0.27             |     |
|          | 1.0               |                  |                  |     |

## رهیافت جدولی

- گام ۳- احتمالات توام را در ستون ۴ جمع کنید. مجموع احتمال اطلاعات جدید  $P(B)$  است. می بینیم که 0.14 احتمال دارد که شورای شهر تغییر منطقه بندی را تصویب کند و برنامه ریزی هیات مدیره رای منفی صادر کند. 0.27 احتمال دارد که شورای شهر تغییر منطقه بندی را تصویب نکند و هیات مدیره نیز به آن رای منفی بدهد. حاصل جمع  $0.27 + 0.14$  تعیین می کند که با احتمال 0.41 هیات مدیره رای منفی خواهد داد.

# رهیافت جدولی

| (1)      | (2)        | (3)          | (4)           | (5) |
|----------|------------|--------------|---------------|-----|
|          | احتمالات   | احتمالات     | احتمالات      |     |
| پیشامدها | پیشین      | شرطی         | توأم          |     |
| $A_i$    | $P(A_i)$   | $P(B   A_i)$ | $P(A_i   B)$  |     |
| $A_1$    | 0.7        | 0.2          | 0.14          |     |
| $A_2$    | <u>0.3</u> | 0.9          | <u>0.27</u>   |     |
|          | 1.0        |              | $P(B) = 0.41$ |     |

## رهیافت جدولی

• گام ۴ - درستون ۵ احتمالات پسین به وسیله روابط اساسی احتمال شرطی محاسبه شده است:

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

دقت کنید که احتمالات توام  $P(A_i \cap B)$  در ستون ۴ است و  $P(B)$  مجموع ستون ۴ است.

# رهیافت جدولی

| (1)      | (2)               | (3)              | (4)              | (5)              |
|----------|-------------------|------------------|------------------|------------------|
| پیشامدها | احتمالات<br>پیشین | احتمالات<br>شرطی | احتمالات<br>توام | احتمالات<br>پسین |
| $A_i$    | $P(A_i)$          | $P(B   A_i)$     | $P(A_i   B)$     | $P(A_i   B)$     |
| $A_1$    | 0.7               | 0.2              | 0.14             | 0.3415           |
| $A_2$    | <u>0.3</u>        | 0.9              | <u>0.27</u>      | <u>0.6585</u>    |
|          | 1.0               |                  | $P(B) = 0.41$    | 1.0000           |

پایان

