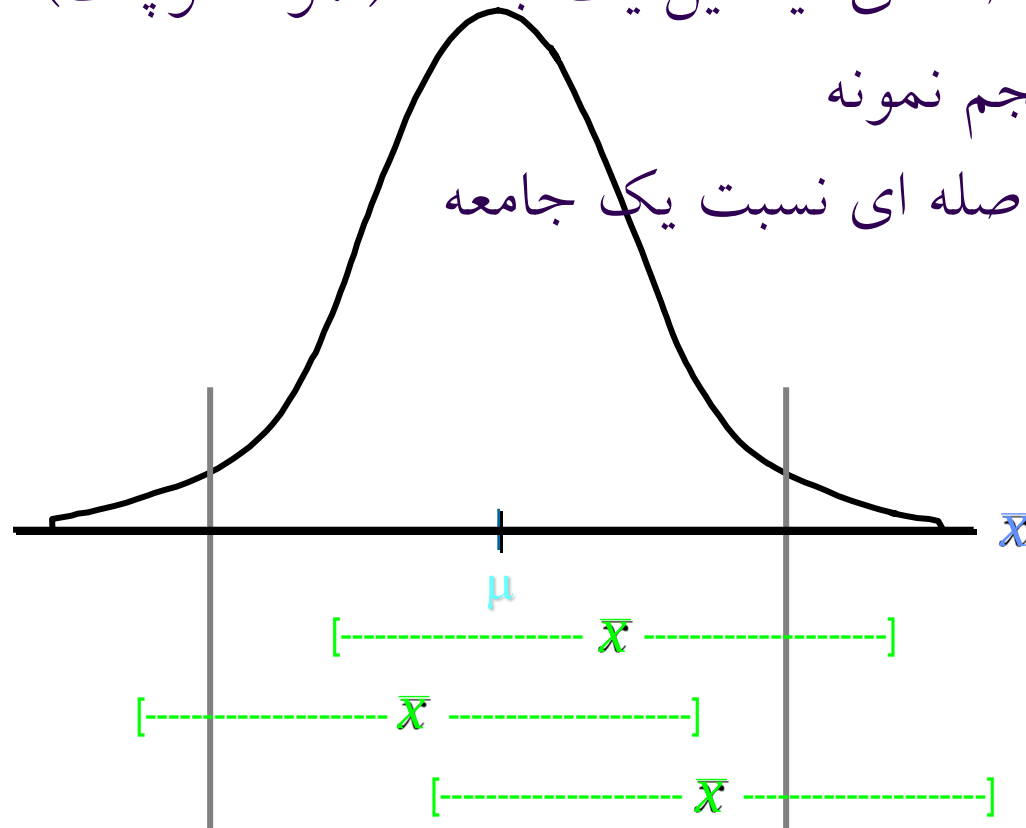


برآورد فاصله ای

برآورد فاصله ای

- برآورد فاصله ای میانگین یک جامعه (نمونه بزرگ)
- برآورد فاصله ای میانگین یک جامعه (نمونه کوچک)
- تعیین حجم نمونه
- برآورد فاصله ای نسبت یک جامعه



برآورد فاصله ای میانگین یک جامعه (نمونه بزرگ)

- خطای نمونه گیری
- احتمال خطای نمونه گیری
- برآورد فاصله ای (σ معلوم فرض می شود)
- برآورد فاصله ای (σ بوسیله S برآورد می شود)

خطای نمونه گیری

- مقدار قدر مطلق تفاوت بین یک برآورد نقطه ای نا اریب و پارامتر جامعه، خطای نمونه گیری نامیده می شود.
- برای موردی که میانگین یک نمونه برآوردی برای میانگین یک جامعه است خطای نمونه گیری می شود:

$$\text{خطای نمونه گیری} = |\bar{X} - \mu|$$

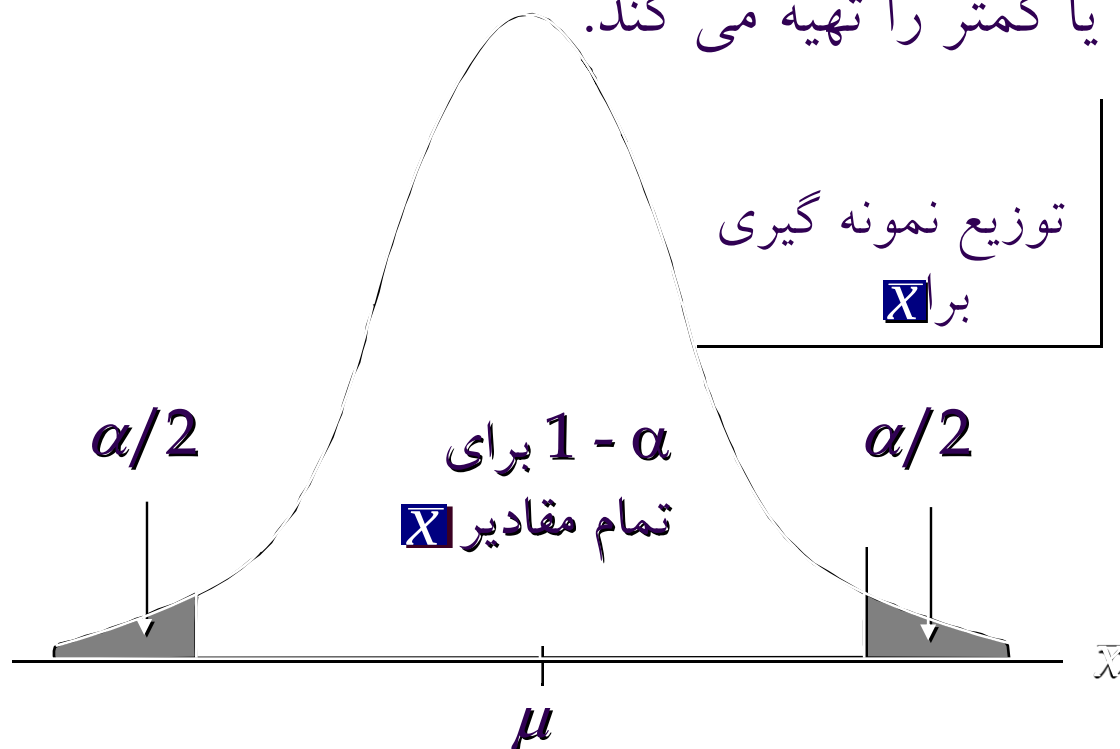
احتمال خطای نمونه گیری

- با استفاده از توزیع نمونه گیری $\bar{X}$ می توان احتمال خطای نمونه گیری را حتی اگر میانگین جامعه μ نامعلوم باشد، بدست آورد.

احتمال خطای نمونه گیری

■ دقت

با احتمال $1-\alpha$ یک مقدار میانگین نمونه یک خطای نمونه گیری
یا کمتر را تهیه می کند. $z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}}$



برآورد فاصله ای میانگین یک جامعه: نمونه بزرگ ($n \geq 30$)

■ σ معلوم فرض می شود

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

که:

■ $\bar{x}$ میانگین نمونه است

$1 - \alpha$ ضریب اطمینان است

$z_{\alpha/2}$ مقدار z ایست که یک مساحت $\alpha/2$ در دنباله بالایی توزیع احتمال نرمال استاندارد فراهم می کند

σ انحراف معیار جامعه است

n حجم نمونه است

برآورد فاصله ای میانگین یک جامعه: نمونه بزرگ ($n \geq 30$)

■ σ بوسیله S برآورد می شود

در بیشتر کاربردها مقدار انحراف معیار جامعه نامعلوم است. به سادگی از مقدار انحراف معیار نمونه (S) به عنوان برآورد نقطه ای برای انحراف معیار جامعه استفاده می کنیم.

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

مثال: کارخانه

کارخانه ای دارای 260 فروشنده سیار در سراسر کشور می باشد. کارخانه برای یک فروشنده سیار جدید، پتانسیل هر محل را روی بخشی از میانگین درآمد سالیانه اشخاص، درون محدوده فروش در موقعیت جدیدشان ارزیابی می کند.

نمونه گیری می تواند برای ایجاد یک برآورد فاصله ای از میانگین درآمد سالیانه افراد در پتانسیل محدوده فروش کارخانه استفاده شود.

یک نمونه به حجم $n = 36$ گرفته شده است. میانگین نمونه، 21,100 است و انحراف معیار نمونه (s)، 4,500. ما از 95 درصد به عنوان ضریب اطمینان برای برآورد فاصله ای استفاده می کنیم.

مثال: کارخانه

■ دقت عبارت

با احتمال 95 درصد مقدار میانگین یک نمونه برای کارخانه، خطای نمونه گیری را 1,470 یا کمتر از آن ... فراهم می کند که به شرح زیر تعیین می شود:

95 درصد میانگینهای نمونه می توانند در $\pm 1.96 \sigma_{\bar{x}}$ از میانگین جامعه μ مشاهده شوند.

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{4,500}{\sqrt{36}} = 750$$

اگر

$$1.96 \sigma_{\bar{x}} = 1,470 \quad \text{آنگاه}$$

مثال: کارخانه

■ برآورد فاصله ای میانگین جامعه: σ به وسیله S برآورد می شود

برآورد فاصله ای برای μ :

$$21,100 \pm 1,470$$

یا

$$19,630 \text{ تا } 22,570$$

با اطمینان 95% می دانیم فاصله شامل میانگین جامعه است.

برآورد فاصله ای میانگین جامعه: نمونه کوچک ($n < 30$)

■ جامعه توزیع نرمال ندارد

تنها حق انتخاب، افزایش حجم نمونه به $n \geq 30$ و استفاده از روشهای برآورد فاصله ای نمونه بزرگ است.

برآورد فاصله ای میانگین جامعه: نمونه کوچک ($n < 30$)

- جامعه با توزیع نرمال: σ معلوم فرض می شود
- روشهای برآورد فاصله ای برای نمونه بزرگ را می توان بکار برد.

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

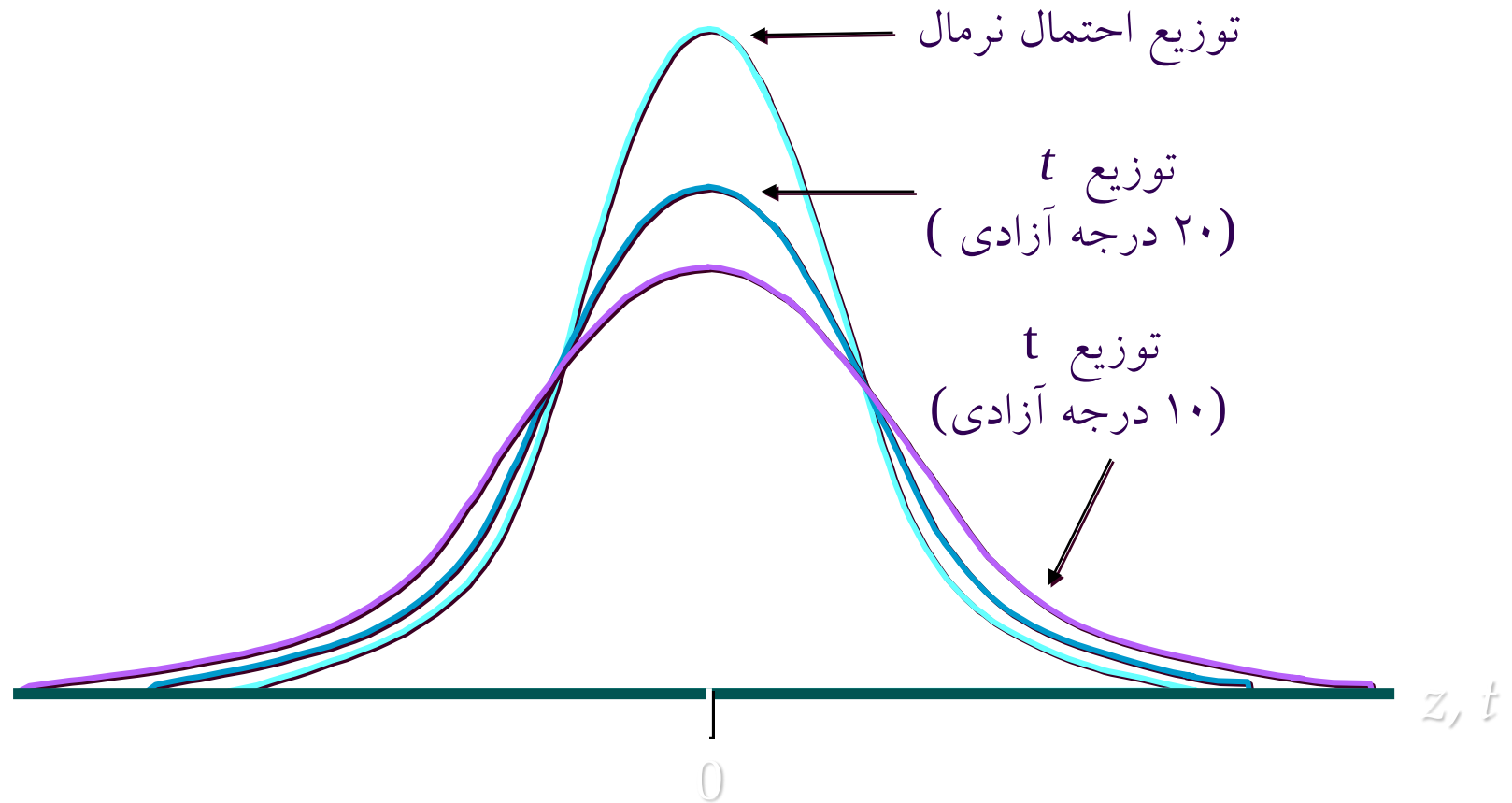
برآورد فاصله ای میانگین جامعه: نمونه کوچک ($n < 30$)

- جامعه با توزیع نرمال: σ بوسیله S برآورد می شود
- برآورد فاصله ای مقتضی بر پایه یک توزیع احتمال شناخته شده با عنوان توزیع t است.

توزیع t

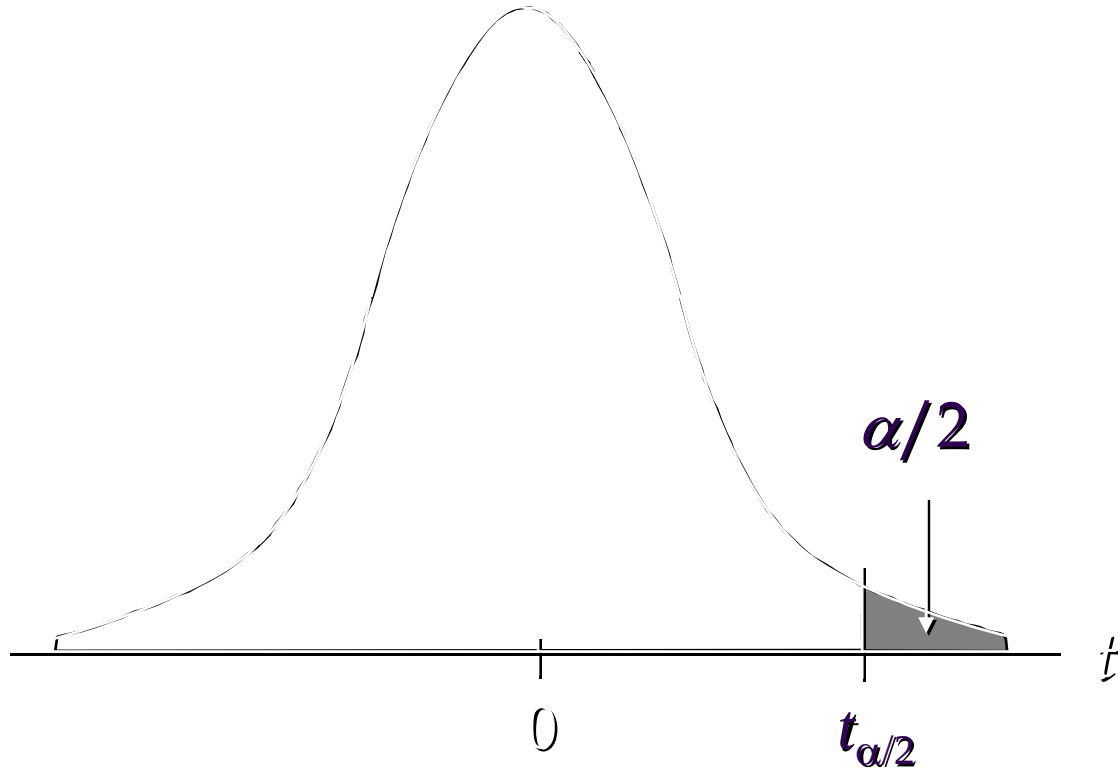
- توزیع t از توزیعهای احتمال است.
- یک توزیع t معین، به یک پارامتر معلوم با عنوان درجه آزادی وابسته است.
- چنانکه مقدار درجه آزادی افزایش یابد، تفاوت بین توزیع t و توزیع احتمال نرمال استاندارد کوچکتر و کوچکتر می شود.
- یک توزیع t با درجه آزادی زیاد دارای پراکندگی کمتر است.
- میانگین توزیع t صفر است.

توزیع t



توزیع t

■ مساحت $\alpha/2$ یا احتمال در دنباله بالایی



برآورد فاصله ای میانگین یک جامعه:
نمونه کوچک ($n < 30$) و برآورد σ توسط s

■ برآورد فاصله ای

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

که

$$1 - \alpha = \text{ضریب اطمینان}$$

$$t_{\alpha/2} = \text{مقدار } t \text{ یک مساحت } \alpha/2 \text{ در دنباله بالایی یک توزیع } t \text{ با } n-1 \text{ درجه آزادی}$$

$$s = \text{انحراف معیار نمونه}$$

مثال: کرایه های آپارتمان

■ برآورد فاصله ای میانگین یک جامعه:

نمونه کوچک ($n < 30$) و برآورد σ توسط s

یک خبرنگار برای یک روزنامه دانشجویی یک مقاله از قیمت خانه دانشجویی نوشته است. یک نمونه از 10 واحد اتاق یک خوابه در محدوده پنج کیلومتری کالج، با میانگین نمونه 550 برای هر ماه و یک انحراف معیار 60 را نتیجه می دهد.

مثال: کرایه های آپارتمان

■ برآورد فاصله ای میانگین یک جامعه:

نمونه کوچک ($n < 30$) برآورد σ توسط s

می خواهیم یک برآورد فاصله ای با اطمینان 95% برای میانگین اجاره هر ماه، برای جامعه واحدهای یک اتاق خوابه در محدوده پنج کیلومتری از فضای کالج تهیه کنیم. فرض کنید این جامعه توزیع نرمال دارد.

مثال: کرایه های آپارتمان

■ مقدار t

با اطمینان 95% $1 - \alpha = .95$ $\alpha = .05$ و $\alpha/2 = .025$
 $t_{0.025}$ بر اساس $n - 1 = 10 - 1 = 9$ درجه آزادی است .

در جدول توزیع t می بینیم که : $t_{.025} = 2.262$

Degrees of Freedom	Area in Upper Tail				
	.10	.05	.025	.01	.005
.	.	.	.	.	.
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
.	.	.	.	.	.

مثال: کرایه های آپارتمان

■ برآورد فاصله ای میانگین یک جامعه:

نمونه کوچک ($n < 30$) برآورد σ توسط s

$$\bar{x} \pm t_{.025} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

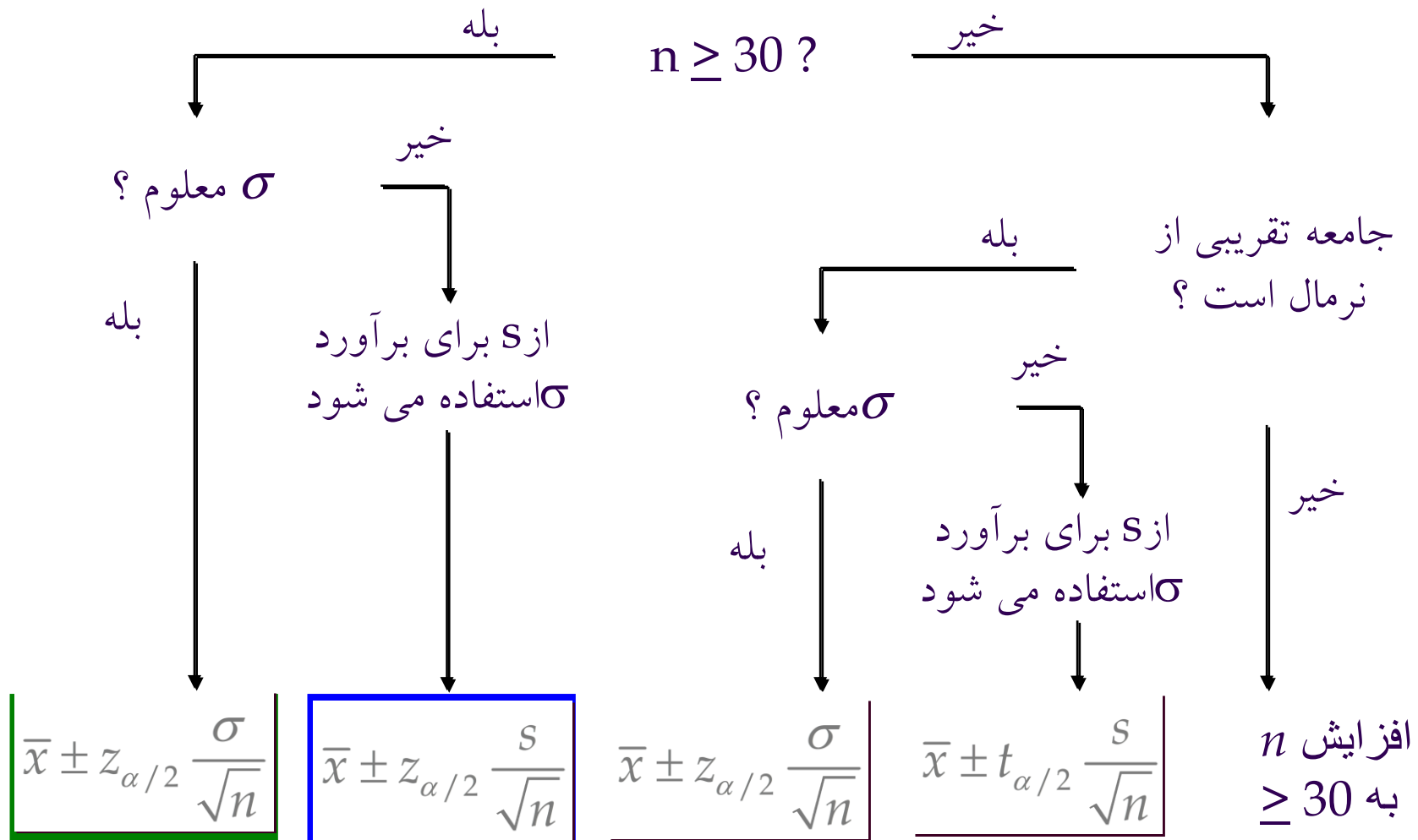
$$550 \pm 2.262 \frac{60}{\sqrt{10}}$$

$$550 \pm 42.92$$

$$507.08 \text{ تا } 592.92$$

یا با 95٪ اطمینان میانگین اجاره هر ماه برای جامعه واحدهای یک اتاق خوابه در محدوده پنج کیلومتری کالج بین 507.08 و 592.92 قرار دارد.

خلاصه روشهای برآورد فاصله ای برای میانگین جامعه



حجم نمونه برای یک برآورد فاصله ای میانگین جامعه

- E = ماکسیمم خطای نمونه گیری ذکر شده در دقت
- E مقداری است که از برآورد نقطه ای، کم و زیاد می شود تا یک برآورد فاصله ای بدست بیاید.
- E غالبا به عنوان مرز خطا نامیده می شود.

حجم نمونه برای یک برآورد فاصله ای میانگین جامعه

■ مرز خطا

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

■ حجم نمونه لازم

$$n = \frac{(z_{\alpha/2})^2 \sigma^2}{E^2}$$

مثال: کارخانه

■ حجم نمونه برای یک برآورد فاصله ای میانگین جامعه

فرض کنید مدیریت کارخانه می خواهد یک برآورد برای میانگین جامعه داشته باشد بطوری که با احتمال 95% خطای نمونه گیری 500 یا کمتر باشد.

حجم نمونه چقدر باشد تا دقت لازم را داشته باشد؟

مثال: کارخانه

■ حجم نمونه برای یک برآورد فاصله ای میانگین جامعه

$$z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 500$$

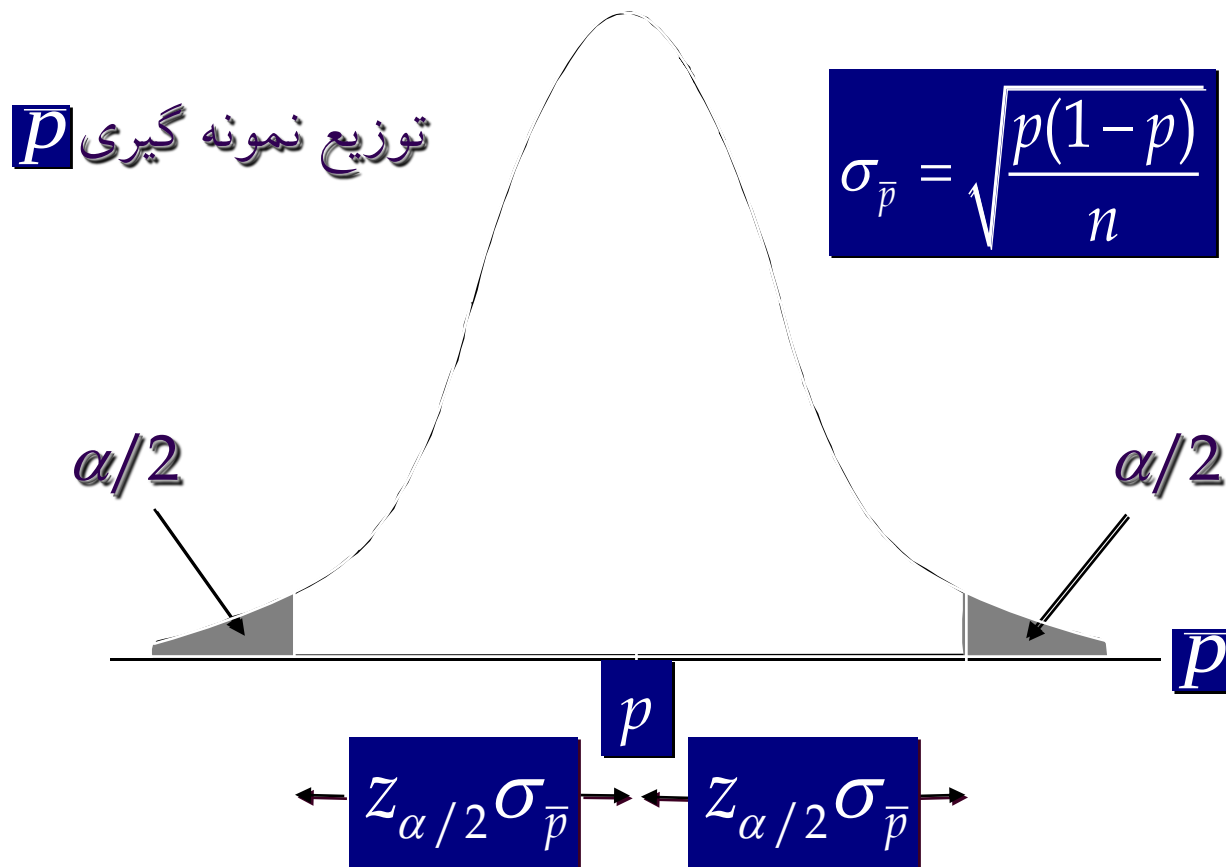
با اطمینان 95% $z_{0.025} = 1.96$ یادآوری می کنیم که $\sigma = 4,500$

$$n = \frac{(1.96)^2 (4,500)^2}{(500)^2} = 311.17 = 312$$

ما به نمونه 312 تایی برای رسیدن به یک دقت مطلوب برای ± 500 با اطمینان 95% نیازمندیم.

برآورد فاصله ای برای نسبت جامعه

■ توزیع نمونه گیری $\bar{p}$ به نرمال نزدیک است زمانی که $np \geq 5$ و $n(1-p) \geq 5$



برآورد فاصله ای برای نسبت جامعه

■ برآورد فاصله ای

$$\bar{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

که:

$1 - \alpha$ ضریب اطمینان است

$z_{\alpha/2}$ مقدار Z ایست که یک مساحت $\alpha/2$ در دنباله بالایی توزیع احتمال نرمال استاندارد تهیه می کند

$\bar{p}$ نسبت نمونه است

مثال: علوم سیاسی

■ برآورد فاصله برای نسبت جامعه

در علوم سیاسی، جمع آوری آراء رای دهندگان و بررسی مقام سیاسی داوطلبان و اطلاع از موقعیت آنها در رقابت، تجزیه و تحلیل می شود. با استفاده از بررسی تلفنی، مصاحبه گرها از رای دهندگان واجد شرایط می پرسند که اگر انتخابات برگزار شود، به چه کسی رای خواهند داد.

در یک مبارزه انتخاباتی، دریافتند که 220 رای ثبت شده از میان 500 تماس تلفنی، علاقمند به یک نامزد خاص هستند. می خواهیم یک برآورد فاصله اطمینان 95٪ برای نسبت جامعه رای دهندگان به آن نامزد را بدست آوریم.

مثال: علوم سیاسی

■ برآورد فاصله برای نسبت جامعه

$$\bar{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

که:

$$z_{\alpha/2} = 1.96 \quad \bar{p} = 220/500 = 0.44 \quad n = 500$$

$$0.44 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.44(1-0.44)}{500}}$$

$$0.44 \pm 0.0435$$

با 95٪ اطمینان می توان گفت که نسبت تمام رای های نامزد مورد
علاقه بین 0.3965 و 0.4835 قرار دارد.

حجم نمونه برای برآورد فاصله نسبت جامعه

■ فرض کنید E = ماکسیمم خطای نمونه ذکر شده در دقت

■ مرز خطا

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

■ حجم نمونه لازم

$$n = \frac{(z_{\alpha/2})^2 p(1-p)}{E^2}$$

مثال: علوم سیاسی

■ حجم نمونه برای برآورد فاصله نسبت یک جامعه

فرض کنید که مایلیم با احتمال 0.99 نسبت نمونه درون $+ 0.03$ از نسبت جامعه باشد.

بزرگی حجم نمونه مورد نیاز چقدر باشد تا دقت لازم را داشته باشد؟

مثال: علوم سیاسی

■ حجم نمونه برای یک برآورد فاصله نسبت یک جامعه

$$z_{0.005} = 2.576 \quad \text{با اطمینان } 0.99$$

$$n = \frac{(z_{\alpha/2})^2 p(1-p)}{E^2} = \frac{(2.576)^2 (.44)(.56)}{(.03)^2} \cong 1817$$

مثال: علوم سیاسی

■ حجم نمونه برای برآورد فاصله نسبت جامعه

توجه: ما از 0.44 به عنوان بهترین برآورد برای p در عبارت قبل استفاده می کنیم. اگر هیچ اطلاعی درباره p در دست نباشد، آنگاه غالباً آن را برابر 0.5 فرض می کنیم زیرا بالاترین حجم نمونه ممکن را تهیه می کند. اگر ما از $p = 0.5$ استفاده کنیم، n را می توان 1843 پیشنهاد کرد.

پایان

