

آزمون فرض

آزمون فرض

- ایجاد فرض صفر و مقابل
- خطای نوع اول و دوم
- آزمون یک طرفه برای میانگین جامعه (نمونه بزرگ)
- آزمون دو طرفه برای میانگین جامعه (نمونه بزرگ)
- آزمونهایی برای میانگین جامعه (نمونه کوچک)
- آزمونهایی برای نسبت جامعه

ایجاد فرض صفر و مقابل

- آزمون فرض را برای تعیین اینکه آیا یک گزاره درباره مقدار پارامتر جامعه باید رد شود یا نه، استفاده می کنیم.
- فرض صفر را که با H_0 نمایش می دهند، یک فرضیه آزمایشی درباره پارامتر جامعه است.
- فرض مقابل را که با H_a نمایش می دهند، در مقابل آنچه در فرض صفر بیان می شود قرار دارد.

ایجاد فرض صفر و مقابل

■ پیش فرض آزمون (فرضیه تحقیق)

- آزمون فرض به وسیله تناقض ثابت می شود.
- پیش فرض باید به عنوان فرض مقابل بیان شود.
- در نتیجه پیش فرض (فرضیه تحقیق) درست است اگر داده های نمونه متناقض با فرض صفر باشد.

ایجاد فرض صفر و مقابل

■ آزمون اعتبار ادعا

- ادعاهای صاحب کارخانه معمولاً با تردید ایجاد می شوند و به عنوان فرض صفر بیان می شوند.
- در نتیجه ادعا غلط است اگر ادعای داده های نمونه متناقض با فرض صفر باشد.

ایجاد فرض صفر و مقابل

■ شرایط تصمیم گیری درآزمون

- یک تصمیم گیرنده باید از میان دو روش عمل یکی را انتخاب کند، که یکی شرایطی با فرض صفر و دیگری شرایطی با فرض مقابل است.
- مثال: پذیرش یک محموله خوب از یک تولید کننده یا برگشت دادن محموله خوب، به تولید کننده.

خلاصه فرضهای صفر و مقابل درباره میانگین یک جامعه

- قسمت برابری فرض همیشه در فرض صفر نمایان می شود.
- عموماً، یک آزمون فرض درباره مقدار میانگین یک جامعه، به یکی از سه شکل زیر درمی آید (در اینجا μ_0 ، مقدار میانگین جامعه فرض می شود).

$H_0: \mu \geq \mu_0$	$H_0: \mu \leq \mu_0$	$H_0: \mu \neq \mu_0$
$H_a: \mu < \mu_0$	$H_a: \mu > \mu_0$	$H_a: \mu \neq \mu_0$
یک طرفه	یک طرفه	دو طرفه

مثال: اورژانس

■ فرض صفر و فرض مقابل

در یک شهر بزرگ، یکی از بیشترین خدمات طبی خدمات اورژانسی می باشد. سیستم واحدی در بیمارستانهای مختلف تقریباً با 20 واحد طبی سیار خدمات اورژانسی ارائه می دهند. هدف از خدمات که پاسخ دادن به نیازهای طبی اورژانسی است به یک میانگین زمانی 12 دقیقه یا کمتر می باشد.

مدیر خدمات طبی مایل است یک آزمون فرض تنظیم کند که بتواند با استفاده از یک نمونه از زمان عکس العملهای اورژانس تعیین کند که آیا خدمات در 12 دقیقه یا کمتر انجام می پذیرد.

مثال: اورژانس

■ فرض صفر و مقابل

نتیجه و اقدام

فرضها

$$H_0: \mu \leq 12$$

خدمات اورژانسی که در مقدار هدف قرار گرفته اند، اقدام ضروری را به دنبال نداشته اند.

$$H_a: \mu > 12$$

خدمات اورژانسی که در مقدار هدف قرار نگرفته اند، اقدام ضروری را به دنبال داشته اند.

که: μ = میانگین زمان پاسخ برای جامعه تقاضاهای طبی اورژانسی

خطای نوع اول و نوع دوم

- از آنجایی که آزمون فرضها بر پایه داده های نمونه است، ما باید همیشه احتمالی برای خطاها داشته باشیم.
- خطای نوع اول رد فرض H_0 است، وقتی که درست باشد.
- شخص انجام دهنده آزمون فرض، حداکثر احتمال جایز برای خطای نوع اول را که با α نمایش داده شده و سطح معنی داری نامیده می شود را تعیین می کند.

خطای نوع اول و نوع دوم

- خطای نوع دوم قبول فرض H_0 است، وقتی که غلط باشد.
- عموماً، ما نمی توانیم احتمال ایجاد یک خطای نوع دوم را که با β نمایش داده می شود کنترل کنیم.
- آماردانان از خطر ساخته شدن یک خطای نوع دوم با استفاده از «رد نکردن H_0 » و نه «قبول کردن H_0 » اجتناب می کنند.

مثال: اورژانس

■ خطاهای نوع اول و دوم

	حالت جامعه	
	درست H_0 ($\mu \leq 12$)	درست H_a ($\mu > 12$)
نتیجه		
H_0 قبول ($\mu \leq 12$ در نتیجه)	نتیجه درست	خطای نوع دوم
H_0 رد ($\mu > 12$ در نتیجه)	خطای نوع اول	نتیجه درست

استفاده از آماره آزمون

- آماره آزمون Z دارای توزیع احتمال نرمال استاندارد دارد.
- ما می توانیم از جدول توزیع احتمال نرمال استاندارد برای پیدا کردن مقدار Z با یک مساحت از α در دنباله پایینی (یا بالایی) توزیع استفاده کنیم.
- مقدار آماره آزمون که به عنوان مرز ناحیه رد ثبت شده است، مقدار بحرانی برای آزمون نامیده می شود.
- قاعده رد عبارت است از:
 - دنباله پایینی: H_0 رد می شود اگر $Z < Z_\alpha$
 - دنباله بالایی: H_0 رد می شود اگر $Z > Z_\alpha$

استفاده از p - مقدار

■ p -مقدار، احتمال بدست آوردن نتیجه یک نمونه است که دست کم به اندازه آنچه مشاهده شده بعید می باشد.

■ p -مقدار را می توان برای تصمیم گیری در یک آزمون فرض استفاده کرد با توجه به اینکه:

• اگر p -مقدار کمتر از سطح معناداری α باشد، مقدار آماره آزمون در ناحیه رد قرار می گیرد.

• اگر p -مقدار بزرگتر یا مساوی α باشد، مقدار آماره آزمون در ناحیه رد قرار نمی گیرد.

■ H_0 رد می شود اگر $p < \alpha$ -مقدار باشد.

مراحل آزمون فرضیه

- ۱- تعیین فرض صفر و مقابل
- ۲- تعیین سطح معناداری
- ۳- انتخاب آماره ای که در آزمون فرض استفاده می شود

استفاده از آماره آزمون

- ۴- با استفاده از α مقدار بحرانی را برای آماره آزمون، تعیین و قاعده رد را برای H_0 بیان می کنیم.
- ۵- جمع آوری داده های نمونه و محاسبه مقدار آماره آزمون
- ۶- با استفاده از مقدار آماره آزمون و قاعده رد تعیین می کنیم که آیا H_0 رد می شود.

مراحل آزمون فرضیه

استفاده از p -مقدار

- ۴- جمع آوری داده های نمونه و محاسبه مقدار آماره آزمون
- ۵- با استفاده از مقدار آماره آزمون p -مقدار را محاسبه می کنیم.
- ۶- اگر $p < \alpha$ مقدار باشد، H_0 رد می شود.

آزمون یک طرفه برای میانگین جامعه نمونه بزرگ ($n \geq 30$)

■ فرضیه

$$H_0: \mu \leq \mu_0 \quad \text{یا} \quad H_0: \mu \geq \mu_0$$

$$H_a: \mu > \mu_0 \quad \text{یا} \quad H_a: \mu < \mu_0$$

■ آماره آزمون

$$\text{معلوم } \sigma$$
$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$\text{نا معلوم } \sigma$$
$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

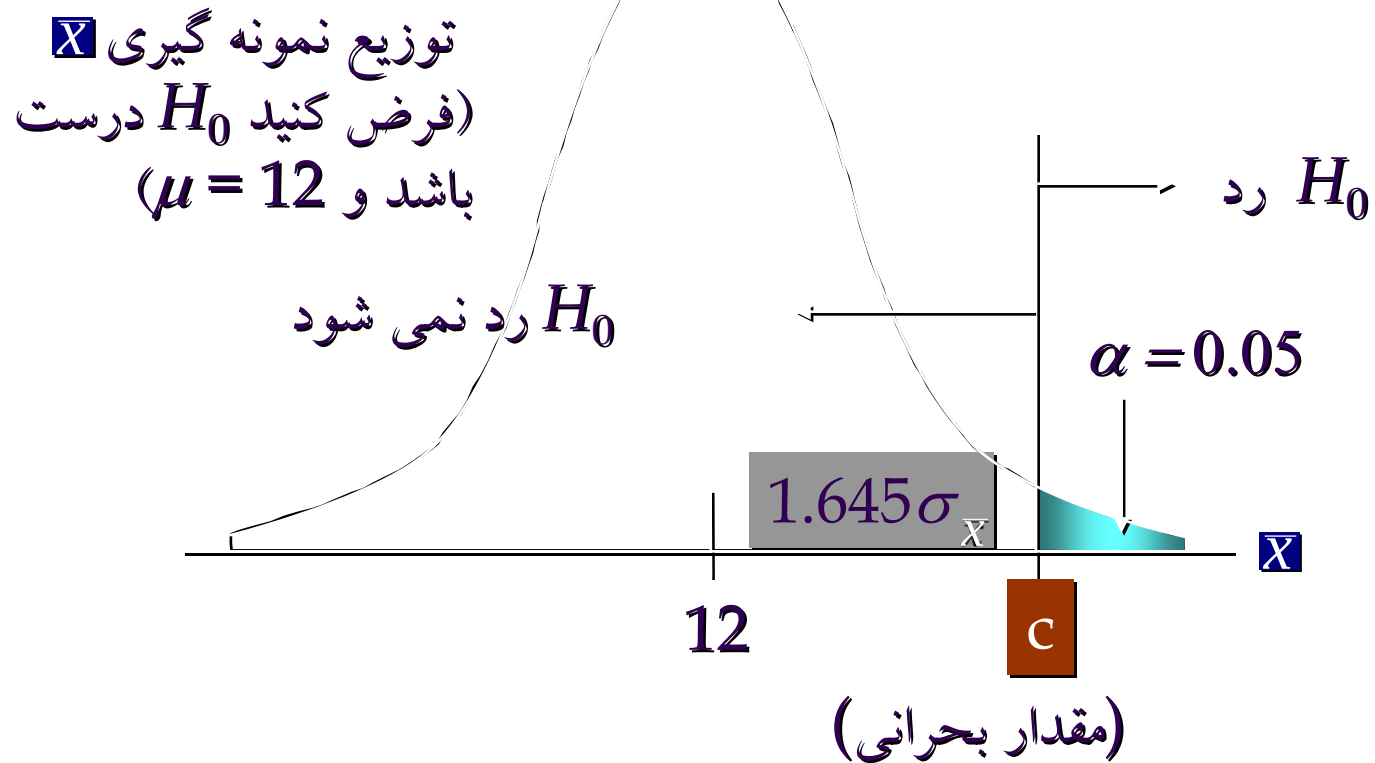
■ قاعده رد

$$\text{رد } H_0 \text{ اگر } z > z_\alpha$$

$$\text{رد } H_0 \text{ اگر } z < -z_\alpha$$

مثال: اورژانس

■ آزمون یک طرفه برای میانگین جامعه: n بزرگ باشد
داریم: $\alpha = P(\text{خطای نوع اول}) = 0.05$



مثال: اورژانس

■ آزمون یک طرفه برای میانگین جامعه (n بزرگ)

$$n = 40 \quad \bar{X} = 13.25 \text{ دقیقه} \quad s = 3.2 \text{ دقیقه}$$

(انحراف معیار نمونه s را می توان برای برآورد انحراف معیار جامعه σ استفاده کرد)

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{13.25 - 12}{3.2 / \sqrt{40}} = 2.47$$

چون $2.47 > 1.645$ لذا H_0 را رد می کنیم

نتیجه: با 95٪ اطمینان می توان گفت که در خدمات اورژانس در 12 دقیقه انجام نمی شود و باید اقدام لازم برای بهبود خدمات انجام گیرد.

مثال: اورژانس

■ آزمون یک طرفه درباره میانگین جامعه (n بزرگ)

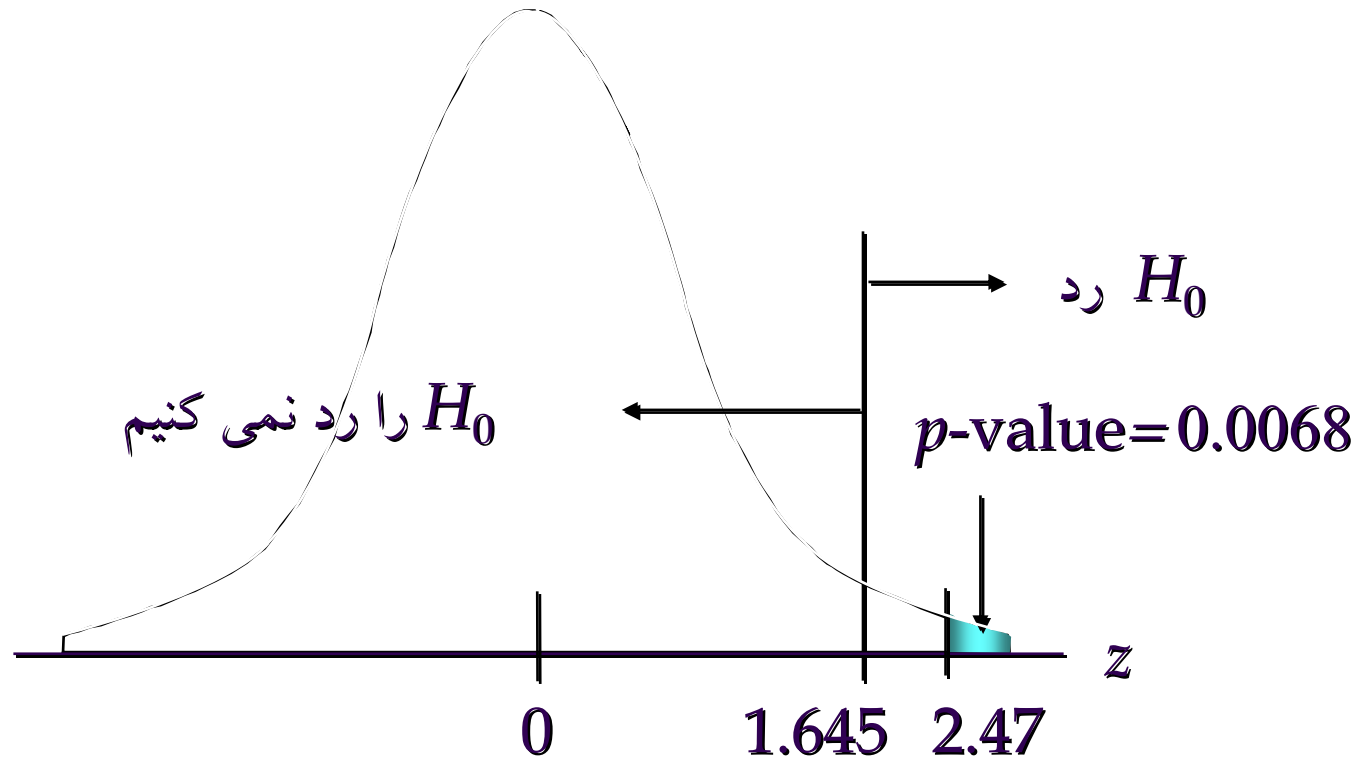
نتیجه: با 95٪ اطمینان می توان گفت که در خدمات اورژانس در 12 دقیقه انجام نمی شود و باید اقدام لازم برای بهبود خدمات انجام گیرد.

مثال: اورژانس

■ استفاده از p -مقدار در آزمون فرضیه

برای $\bar{X} = 13.25$ پس $z = 2.47$ $p\text{-value} = 0.0068$

چون $p\text{-value} < \alpha$ یعنی $0.0068 < 0.05$ لذا H_0 را رد می کنیم.



آزمون دو طرفه درباره میانگین جامعه نمونه بزرگ ($n \geq 30$)

■ فرضیه

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_a: \mu \neq \mu_0$$

■ آماره آزمون

σ معلوم

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

σ نامعلوم

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

■ قاعده رد

اگر $|Z| > Z_{\alpha/2}$ فرض H_0 رد می شود

مثال: خمیر دندان

■ آزمون دو طرفه درباره میانگین جامعه (n بزرگ)

خط تولید خمیر دندان طوری طراحی شده است که تیوپهای پر شده از خمیر دندان با یک میانگین 6 اونسی باشند.

در فواصل معین، یک نمونه شامل 30 تیوپ در هر دسته، برای چک کردن فرایند پر کردن انتخاب می شوند. رویه اطمینان کیفیت، مستلزم این است که اگر نتایج نمونه با فرض 6 اونس بودن میانگین وزن پر شده برای جامعه تیوپهای خمیردندان، سازگار باشد، فرایند پر کردن ادامه می یابد و گرنه فرایند پر کردن متوقف شده و تنظیم می شود.

مثال: خمیر دندان

■ آزمون دو طرفه درباره میانگین یک جامعه (n بزرگ)

یک آزمون فرض درباره میانگین یک جامعه می تواند برای کمک به تعیین زمانی که مرحله پر کردن باید ادامه یابد و زمانی که باید متوقف شده و تنظیم گردد، استفاده شود.

• فرضیه

$$H_0: \mu = 6$$

$$H_a: \mu \neq 6$$

• قاعده رد

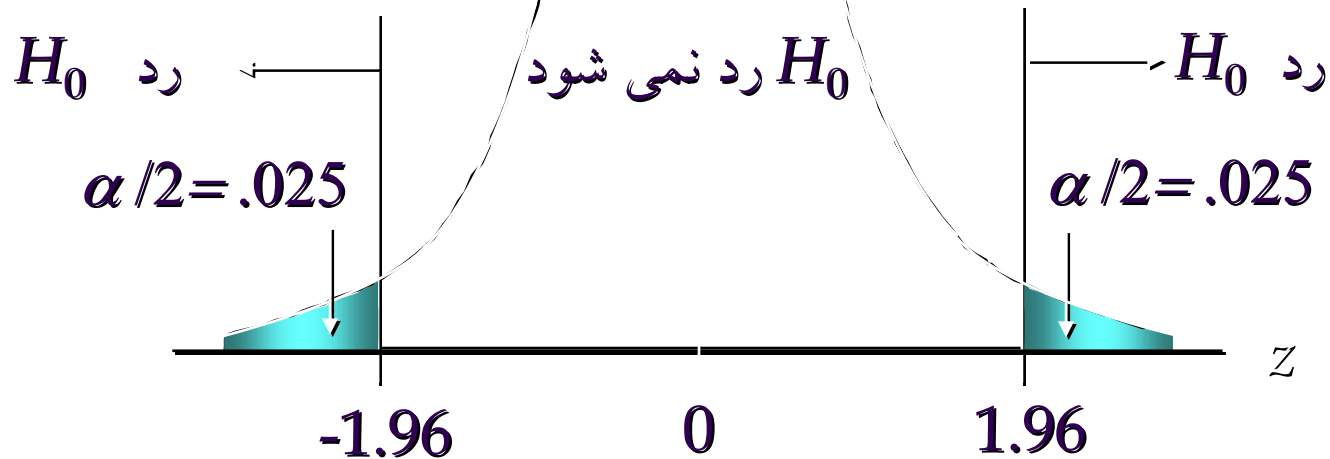
فرض کنید سطح معناداری 0.05 باشد H_0 رد می شود اگر

$$z > 1.96 \quad \text{یا} \quad z < -1.96$$

مثال: خمیر دندان

■ آزمون دو طرفه درباره میانگین یک جامعه (n بزرگ)

توزیع نمونه گیری $\bar{X}$
(فرض کنید H_0 درست است
و $\mu = 6$)



مثال: خمیر دندان

■ آزمون دوطرفه درباره میانگین جامعه (n بزرگ)

فرض کنید که یک نمونه از 30 تیوپ خمیر دندان، یک میانگین نمونه 6.1 اونس را تهیه کند و انحراف معیار آن 0.2 اونس باشد.

اونس $s = 0.2$, اونس $\bar{X} = 6.1$, $n = 30$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = \frac{6.1 - 6}{.2 / \sqrt{30}} = 2.74$$

H_0 را رد می کنیم، چون $2.74 > 1.96$

مثال: خمیر دندان

■ آزمون دو طرفه درباره میانگین جامعه (n بزرگ)

نتیجه: با اطمینان 95٪ میانگین وزن پر شده برای تیوپهای خمیر دندان 6 اونس نیست مرحله پر کردن باید متوقف شود و مکانیزم پر کردن تنظیم شود.

مثال: خمیر دندان

- استفاده از p -مقدار برای یک آزمون فرض دو طرفه
- فرض کنید p -مقدار را برای یک آزمون دو طرفه به عنوان دو برابر مساحت بدست آمده در دنباله توزیع تعریف کنیم.
- با $z = 2.74$ ، جدول احتمال نرمال استاندارد نشان می دهد که با احتمال $0.0031 = 0.5000 - 0.4969$ یک اختلاف بزرگتر از 0.1 در دنباله بالایی توزیع وجود دارد.
- نظر به احتمال یکسان برای یک اختلاف بزرگتر و در دنباله پایینی توزیع داریم:
- $$p\text{-value} = 2(0.0031) = 0.0062$$
- p -مقدار برابر با 0.0062 کمتر است از $\alpha = 0.05$ ، بنابراین H_0 را رد می کنیم.

ارتباط فاصله اطمینان با آزمون دوطرفه

میانگین جامعه

- انتخاب یک نمونه تصادفی ساده از جامعه و استفاده از مقدار میانگین نمونه $\bar{X}$ برای ایجاد فاصله اطمینان برای میانگین جامعه μ .
- اگر فاصله اطمینان شامل مقدار μ_0 فرض شده باشد، H_0 رد نمی شود، در غیر این صورت H_0 رد می شود.

مثال: خمیر دندان

- ارتباط فاصله اطمینان با آزمون فرض دو طرفه
- فاصله اطمینان 95٪ برای μ می شود:

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6.1 \pm 1.96(0.2/\sqrt{30}) = 6.1 \pm 0.0716$$

6.0284 تا 6.1716

یا از آنجایی که مقدار فرض شده برای میانگین جمعیت $\mu_0 = 6$ ، در این فاصله قرار ندارد، در نتیجه آزمون فرض با فرض صفر $H_0: \mu = 6$ را می توان رد کرد.

آزمونهای درباره میانگین جامعه نمونه کوچک ($n < 30$)

■ آماره آزمون

معلوم σ

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

نا معلوم σ

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

این آماره آزمون یک توزیع t با $n-1$ درجه آزادی دارد.

آزمونهای درباره میانگین جامعه نمونه کوچک ($n < 30$)

■ قاعده رد

$H_0: \mu < \mu_0$	اگر $t > t_\alpha$ ، H_0 رد	
$H_0: \mu > \mu_0$	اگر $t < -t_\alpha$ ، H_0 رد	
$H_0: \mu = \mu_0$		اگر $ t > t_{\alpha/2}$ ، H_0 رد

p -مقدار و توزیع t

- شکل جدول توزیع t تهیه شده در بسیاری از کتابهای درس آماری با جزئیات کافی برای تعیین p -مقدار صحیح برای یک آزمون فرض را ندارند.
- اما، ما هنوز می توانیم از جدول توزیع t برای تعیین دامنه ای از p -مقدار استفاده کنیم.
- یک مزیت بسته های نرم افزاری کامپیوتر این است که کامپیوتر p -مقدار را برای توزیع t تهیه می کند.

مثال: گشت بزرگراه

■ آزمون یک طرفه درباره میانگین جامعه (n کوچک)

یک گشت بزرگراه، از سرعت وسایل نقلیه در موقعیتهای مختلف در یک خیابان ویژه نمونه گیری می کند.

$$H_0: \mu \leq 65$$

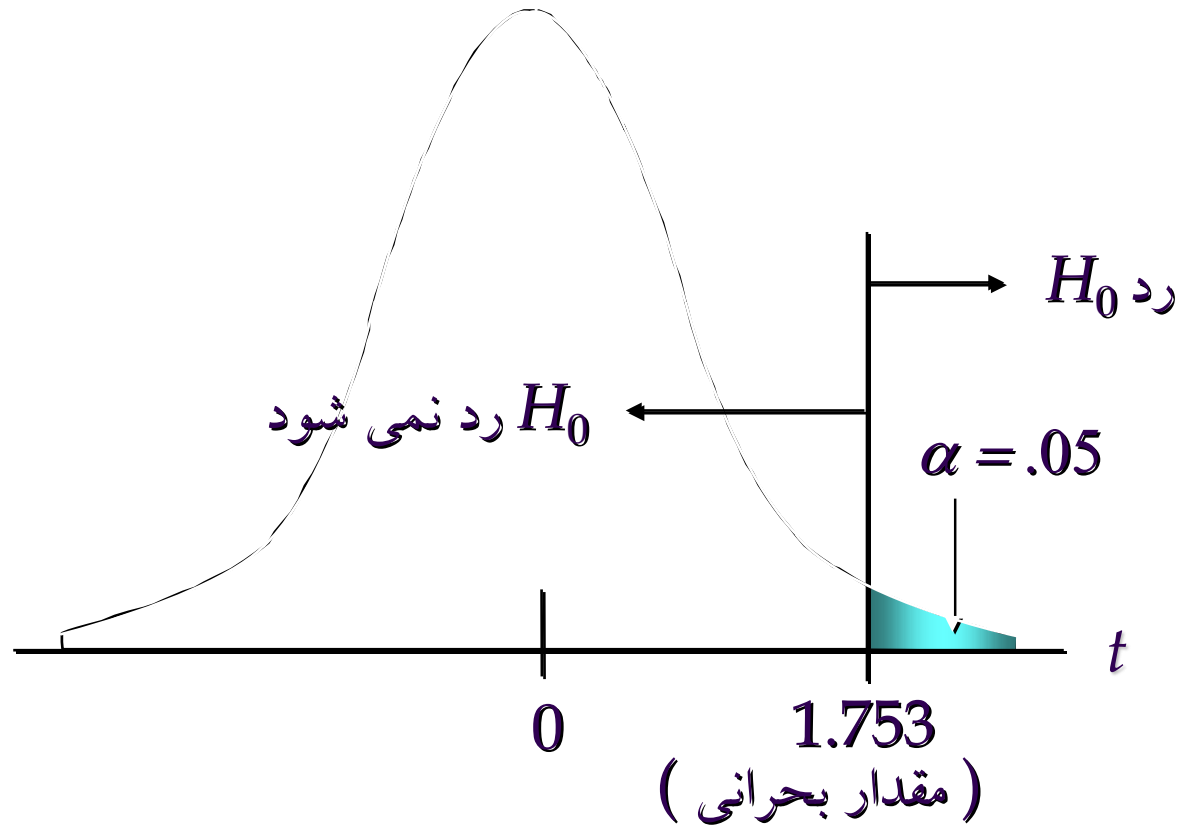
نمونه گرفته شده از سرعت وسایل نقلیه برای آزمون فرض استفاده می شود. موقعیتی که H_0 در آن رد می شود بهترین موقعیتهای برای تله (گیر انداختن) رادار فرض شده است.

در منطقه F، یک نمونه شامل 16 وسیله نقلیه که میانگین سرعت آن 68.2 kmh است با یک انحراف معیار 3.8 kmh مشاهده می شود.

از $\alpha = 0.05$ برای آزمون فرض استفاده می کنیم.

مثال: گشت بزرگراه

■ آزمون یک طرفه درباره میانگین جامعه (n کوچک)



مثال: گشت بزرگراه

■ آزمون یک طرفه درباره میانگین جامعه (n کوچک)

$$n = 16, \quad \bar{x} = 68.2 \text{ kmh}, \quad s = 3.8 \text{ kmh}$$

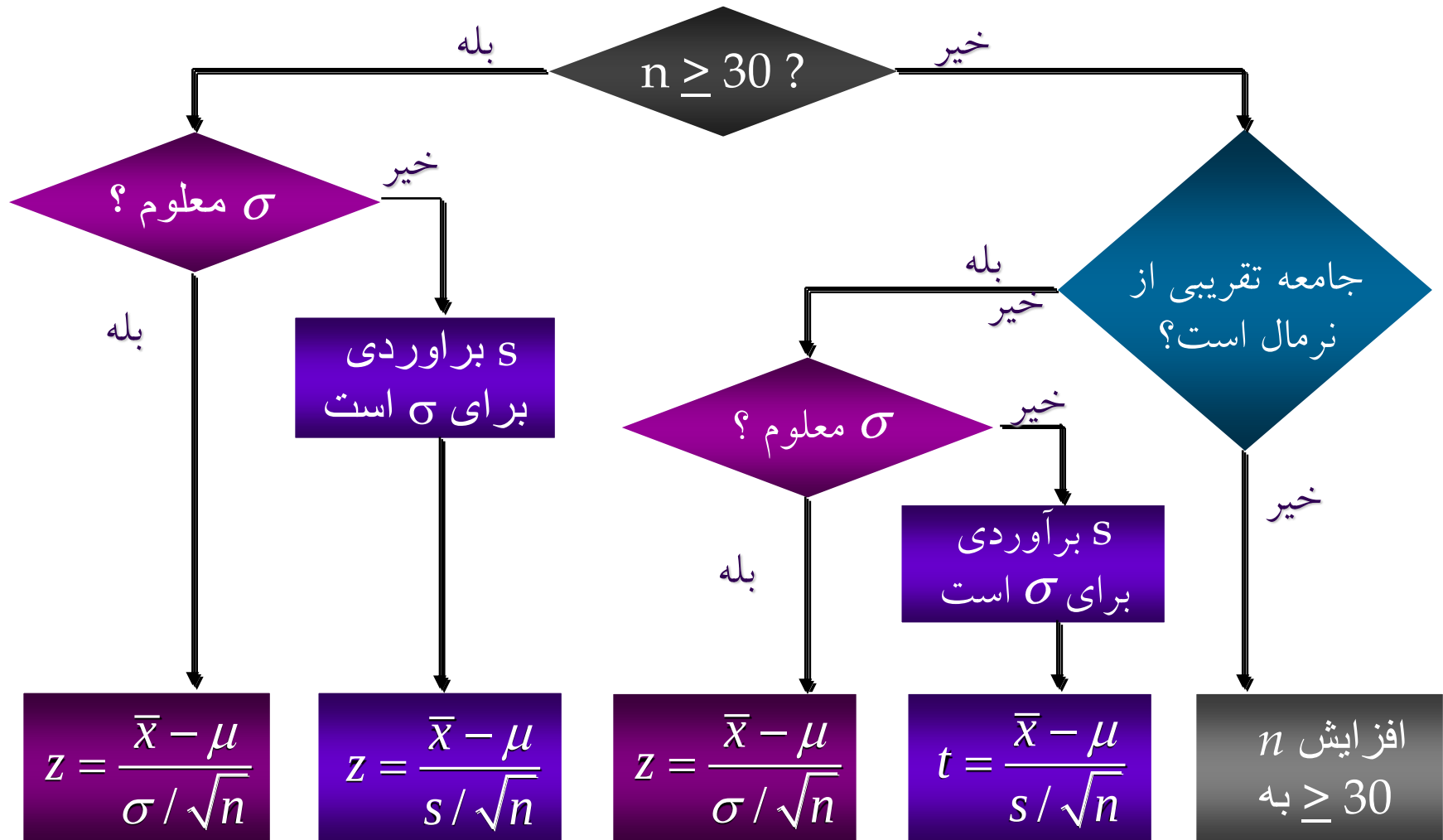
$$\alpha = .05, \quad \text{d.f.} = 16-1 = 15, \quad t_{\alpha} = 1.753$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = \frac{68.2 - 65}{3.8 / \sqrt{16}} = 3.37$$

H_0 را رد می کنیم، چون $3.37 > 1.753$

نتیجه: با 95٪ اطمینان می توان گفت که میانگین سرعت وسایل نقلیه در منطقه F بیشتر از 65 kmh است. موقعیت F یک انتخاب خوب برای یک تله (گیر انداختن) رادار است.

خلاصه آزمونهای آماری به کار رفته در آزمون فرضها در باره میانگین جامعه



خلاصه شکل‌های فرض مقابل و صفر در باره نسبت جامعه

■ جزء مساوی دار فرضها همیشه فرض صفر را نشان می دهد.

■ معمولاً آزمون فرضهای مقدار نسبت جامعه p باید به یکی از شکل‌های زیر در نظر گرفته شود (که در آن p_0 مقدار فرض شده نسبت جامعه است).

$$H_0: p \geq p_0$$

$$H_a: p < p_0$$

یک طرفه

$$H_0: p \leq p_0$$

$$H_a: p > p_0$$

یک طرفه

$$H_0: p = p_0$$

$$H_a: p \neq p_0$$

دو طرفه

آزمونهای نسبت جامعه

نمونه بزرگ ($np \geq 5$, $n(1 - p) \geq 5$)

■ آماره آزمون

$$z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sigma_{\bar{p}}}$$

که:

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}$$

آزمونهای نسبت جامعه

نمونه بزرگ ($np \geq 5$, $n(1 - p) \geq 5$)

■ قاعده رد

$H_0: p \leq p_0$	اگر $z > z_\alpha$ ، H_0 رد	
$H_0: p \geq p_0$	اگر $z < -z_\alpha$ ، H_0 رد	
$H_0: p = p_0$		اگر $ z > z_{\alpha/2}$ ، H_0 رد

مثال: انجمن سلامتی ملی

■ آزمون دو طرفه نسبت جامعه (n بزرگ)

طبق برآورد انجمن سلامتی ملی در تعطیلات سال نو، 500 نفر در جاده های کشور کشته و 25000 نفر زخمی شده اند. انجمن سلامتی ملی معتقد است 50% تصادفات به دلیل رانندگی با سرعت بالا می باشد.

یک نمونه از 120 تصادف نشان داد که 67 مورد به دلیل رانندگی با سرعت بالا بوده است. از این داده ها برای آزمون ادعای انجمن سلامتی ملی با $\alpha = 0.05$ به کار ببرید.

مثال: انجمن سلامتی ملی

■ آزمون دو طرفه نسبت جامعه (n بزرگ)

• فرضیه ها

$$H_0: p = 0.5$$

$$H_a: p \neq 0.5$$

• آماره آزمون

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{.5(1-.5)}{120}} = .045644$$

$$z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sigma_{\bar{p}}} = \frac{(67 / 120) - .5}{.045644} = 1.278$$

مثال: انجمن سلامتی ملی

■ آزمون دو طرفه نسبت جامعه (n بزرگ)

- قاعده رد

اگر $z < -1.96$ یا $z > 1.96$ H_0 رد می شود

- نتیجه گیری

H_0 رد نمی شود.

برای $z = 1.278$ و $p = 0.201$ مقدار است. اگر H_0 را رد کنیم، از ماکزیمم مخاطره مجاز خطای نوع اول تجاوز می کنیم. ($p > 0.05$ -مقدار)

پایان

