

جله ۲

ضرب بردارها:

$$\vec{v} \cdot \vec{v}' = a a' + b b' + c c'$$

(۱) ضرب نقطه‌ای (ضرب داخلی)

$$\vec{v} = (a, b, c)$$

$$\vec{v}' = (a', b', c')$$

$$\vec{v} = (1, 2, -4)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v}' = -1 + 4 + 0 = 3$$

$$\vec{v}' = (-1, 2, 0)$$

(۲)

ضرب بردارها (ضرب خارجی)

$$\vec{v} = (a, b, c), \vec{v}' = (a', b', c')$$

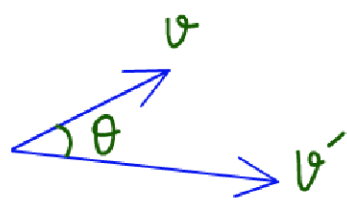
$$\vec{v} \times \vec{v}' = (bc' - b'c, -(ac' - ca'), ab' - a'b)$$

$$\vec{v} = (1, 0, 2)$$

$$\vec{v}' = (-1, 1, 3)$$

مثال:

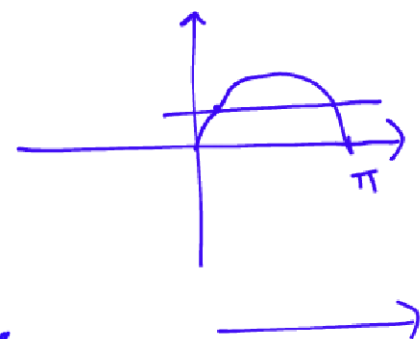
$$\vec{v} \times \vec{v}' = (-2, -5, 1)$$



$$u \cdot u' = |u| |u'| \cos \theta$$

$$|u \times u'| = |u| |u'| \sin \theta$$

در امتداد محور



$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad u \perp u' \Leftrightarrow u \cdot u' = 0$$

$$\theta = 0 \text{ یا } \pi \quad u, u' \text{ موازی هستند} \quad \Leftrightarrow u \times u' = 0$$

مثال: زاویه بین بردارهای $u = (1, 0, 3)$ و $u' = (0, 1, -1)$ را بیابید.

$$u \cdot u' = (0)(1) + (1)(0) + (-1)(3) = -3$$

$$|u| = \sqrt{10} \quad |u'| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad -3 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{2} \cos \theta$$

$$\frac{-3}{\sqrt{20}} = \cos \theta$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{20}}\right) = \theta$$



$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$$

$$\sin \theta = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \theta = \{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \}$$

کینرس کا مادہ ہے

$$u = (a, b, c)$$

$$u \cdot i = |u| |i| \cos \alpha$$

$$a = |u| \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{a}{|u|}$$

$$\cos \beta = \frac{b}{|u|}$$

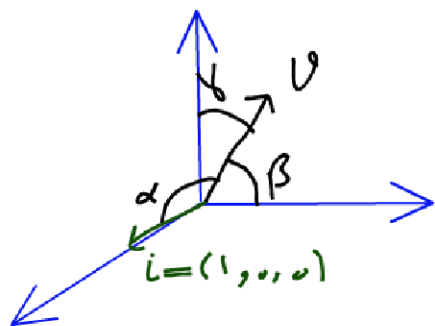
$$\cos \gamma = \frac{c}{|u|}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{|u|^2} = 1$$

مثال: آیا ہر کاری ہو تو اندہ محور کا زاویہ $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{2}$ بزرگ.

$$\cos^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{4} = 0 + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} \neq 1$$

جواب منفی



خواص ضرب بردارها:

$$۱) \quad \vec{u} \cdot \vec{u}' = \vec{u}' \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} \times \vec{u}' = - \vec{u}' \times \vec{u}$$

$$۲) \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$$

$$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$$

$$۳) \quad \vec{u} \cdot (\vec{u}' + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{u}' + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$۴) \quad (t\vec{u}) \cdot \vec{u}' = t(\vec{u} \cdot \vec{u}') = \vec{u} \cdot (t\vec{u}')$$

مثال: اگر $\vec{u}$ و $\vec{u}'$ با طول ۳ و ۲ و زاویه ۱۲۰° باشند.

$$|۳\vec{u} + ۲\vec{u}'| = ?$$

$$|۳\vec{u} + ۲\vec{u}'|^2 = (۳\vec{u} + ۲\vec{u}') \cdot (۳\vec{u} + ۲\vec{u}') = ۹|\vec{u}|^2 + ۴\vec{u} \cdot \vec{u}' + ۴\vec{u}' \cdot \vec{u} + ۴|\vec{u}'|^2$$

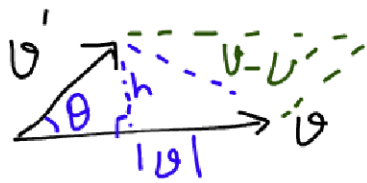
$$= ۹(۳)^2 + ۱۲\vec{u} \cdot \vec{u}' + ۴(۲)^2$$

$$= ۳۶ + ۱۲|\vec{u}||\vec{u}'|\cos\theta + ۳۶$$

$\begin{matrix} ۳ & ۲ & (-۱/۲) \end{matrix}$

$$= ۳۶ \rightarrow |۳\vec{u} + ۲\vec{u}'| = ۶$$

کار بردها: الف) مساحت مثلث



$$S = \frac{|u| \cdot h}{2} = \frac{|u| |u'| \sin \theta}{2} = \frac{|u \times u'|}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{h}{|u'|}$$

$$S = |u \times u'| \text{ متوازی الاضلاع}$$

$$|u - u'| = |u| + |u'| + |u \times u'|$$



ب) تقریر یک بردار بر بردار دیگر

$$\text{Proj}_u u' = |u'| \cos \theta \cdot \frac{u}{|u|} = \frac{|u| |u'| \cos \theta}{|u| \cdot |u|} u = \frac{u \cdot u'}{|u|^2} u$$

$$u = (1, -1, 2)$$

$$u' = (0, 1, -1)$$

$$u \times u' = (-1, +1, 1)$$

$$\text{proj}_{u'}^u = ?$$

$$S = \frac{|u \times u'|}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{proj}_u^{u'} = \frac{u \cdot u'}{u \cdot u} \cdot u = \frac{-3}{4} (1, -1, 2) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{2}\right)$$