

۷۶.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = y$$

توابع برداری:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \mapsto f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$D_f = D_x \cap D_y \cap D_z$$

$$f(t) = \left(\underbrace{\frac{1}{t-2}}_x, \underbrace{\ln t}_y, \underbrace{\sqrt{1-t}}_z \right) \quad \text{مثال:}$$

مولف

$$D_x = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$D_y = (0, +\infty)$$

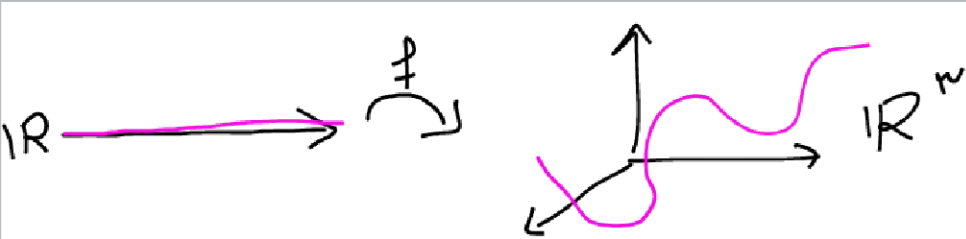
$$D_z = \{1-t > 0\} = \{t < 1\} = (-\infty, 1]$$

$$D_f = D_x \cap D_y \cap D_z = (0, 1]$$

$$f = (f_1, f_2, f_3)$$

بردار مولف

مفردات توابع برداری



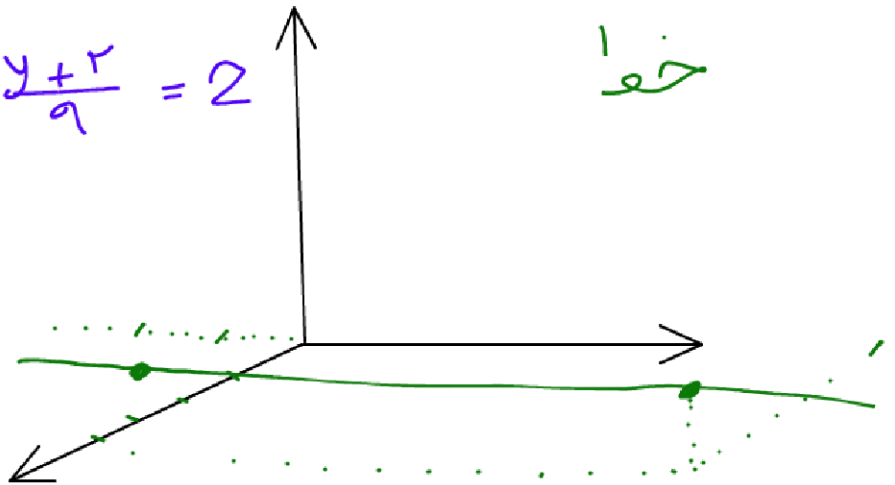
برای هر کم‌نویز پارامتر t را بین x, y, z می‌فهمیم.

$$f(t) = (\underbrace{t+1}_x, \underbrace{4t-2}_y, \underbrace{t}_z)$$

مثال:

$$\begin{aligned} t &= \frac{x-1}{1} \\ t &= \frac{y+2}{4} \\ t &= 2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = 2$$

$$\begin{aligned} (1, -2, 0) \\ (5, 2, 1) \end{aligned}$$



مثال: نمودار تابع برداری $f(t) = (\underbrace{r \cos t}_x, \underbrace{r \sin t}_y, \underbrace{t}_z)$ را رسم کنید.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t \end{aligned} \right\}$$

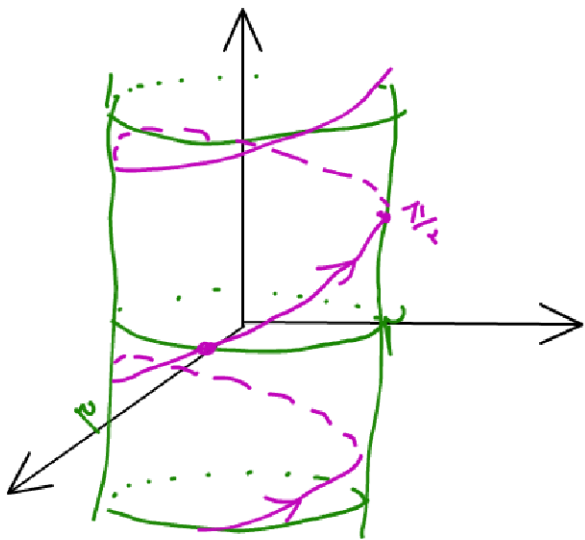
$$z = t$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^r}{a} &= \cos^r t \\ \frac{y^r}{b} &= \sin^r t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{x^r}{a} + \frac{y^r}{b} = 1}$$

کدام $t=0 \rightarrow f(0) = (r, 0, 0)$

$t = \frac{\pi}{r} \rightarrow f\left(\frac{\pi}{r}\right) = (0, r, \frac{\pi}{r})$

دایره بر (هلیس)



نکته: مفاهیم حد، پیوستگی، مشتق و انتگرال به هم، ارتباط مولفه به مولفه تعریف می شوند.

مثال:

$$f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, \frac{1}{t}, e^t \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}, \lim_{t \rightarrow 0} e^t \right)$$
$$= (1, \pm\infty, 1)$$

$$f'(t) = \left(\frac{t \cos t - \sin t}{t^2}, -\frac{1}{t^2}, e^t \right)$$

$$(\lambda(t) \cdot f(t))' = \lambda'(t) \cdot f(t) + \lambda(t) \cdot f'(t)$$

قاعده

$$(f(t) \cdot g(t))' = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$$

مثال: نشان دهیم اگر f تابع برداری با طول ثابت c آنگاه $f' \cdot f$ بر f عمود است.

$$c = |f| \quad c^2 = |f|^2 = f \cdot f$$

$$0 = f' \cdot f + f \cdot f' = 2 f' \cdot f$$

$$0 = f' \cdot f \rightarrow f' \text{ بر } f$$

نکته: اگر t متغیر زمان آنگاه تابع برداری نشان دهنده مسیر حرکت یک ممتد

$$v = f'$$

$$a = f''$$

مثال: مسیر حرکت یک موش که به هر $r = 1$ و $t = 1$ است $f(t) = (1 \sin t, t, -1)$ است.
در چه کتای از بازه $[0, 2\pi]$ بر بالای سطح حرکت می‌کند؟
مردند؟

$$v(t) = f'(t) = (1 \cos t, 1, 0)$$

$$a(t) = (-1 \sin t, 0, 0)$$

$$0 = v \cdot a \quad -1 \sin t \cos t + 1 + 0 = 0$$

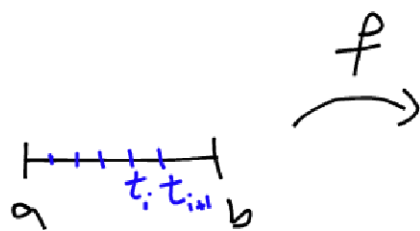
$$-1 \sin 2t = 0$$

$$\sin 2t = 0$$

$$2t = k\pi$$

$$t = \frac{k\pi}{2} \quad k=0$$

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$



$$\int_a^b \bigcirc dt =$$

Lim
 $n \rightarrow \infty$

$$\left[\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{\Delta x_i^2}{\Delta t^2} + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta t^2} + \frac{\Delta z_i^2}{\Delta t^2}} \right] \cdot \Delta t$$

طول منحنی (طول قوس) $f(t_i) = (x_i, y_i, z_i)$

$$f(t_{i+1}) = (x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$$

$$\int_a^b |v(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

مثال: طول منحنی $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $t \in [0, \pi]$

$$v(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$L = \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt = \int_0^\pi \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \pi$$

$$S(t) = \int_{t_0}^t |U(\eta)| d\eta$$

$$\frac{dS}{dt} = |U(t)|$$

قفہ اساسی حساب دینا سہل ہے۔

$$S \longleftrightarrow t$$

$$S \text{ تابع } t \text{ کے ساتھ } \leftarrow \text{تبدیل} \rightarrow \text{وارثہ} \rightarrow$$