

۲-۲-۳: تعریف:

اگر n يك عدد طبیعی باشد آنگاه مجموعه R يك رابطه n -تایی است اگر هر
عصر R يك n -تایی مرتب باشد، عبارت دیگر R يك رابطه n -تایی است اگر فقط
اگر داشته باشیم:

$$\forall x (x \in R \implies \exists y_1 \exists y_2 \dots \exists y_n (x = (y_1, \dots, y_n)))$$

۲-۲-۴: مثال:

(الف) مجموعه $R = \{(a, 1, 3), (1, b, 2)\}$ يك رابطه سه تایی است.

(ب) مجموعه $R = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ يك رابطه سه تایی

است.

(ج) $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ يك رابطه چهارتایی است.

تذکر: در اینجا ما روابط دوتایی را در نظر می گیریم و آنها را مورد بررسی قرار می دهیم.
همانطوریکه در ۲-۲-۱، تعریف شد يك رابطه دوتایی را بطور خلاصه يك رابطه می نامیم
بنابراین از این بعد منظور از يك رابطه، يك رابطه دوتایی خواهد بود.

۲-۲-۵: تعریف: فرض کنیم R يك رابطه باشد.

(الف) حوزه تعریف، قلمرو یا دامنه R که آنرا با $\text{dom } R$ نمایش می دهیم،

$$\text{dom } R = \{x \mid \exists y ((x, y) \in R)\}$$

عارتست از:

بعبارت دیگر دامنه R مجموعه همه مؤلفه اول هریک از عناصر R می باشد.

(ب) حوزه مقادیر یا برد R که آنرا با $\text{ran } R$ نشان می دهیم، عارتست از:

$$\text{ran } R = \{y \mid \exists x ((x, y) \in R)\}$$

بعبارت دیگر برد R مجموعه همه مؤلفه دوم هریک از عناصر R می باشد.

(ج) میدان R که آنرا با $\text{fld } R$ نمایش می دهیم، عارتست از:

$$\text{fld } R = \text{dom } R \cup \text{ran } R$$

بعبارت دیگر میدان R مجموعه همه مؤلفه اول و دوم هریک از عناصر R می باشد.

۶-۲-۶ : مثال :

در زیر دامنه ، برد و میدان هر يك از روابط ۲-۲-۲ را تعیین می کنیم .

$$\text{fld } R = \{a, b, 1, 2\}, \text{ ran } R = \{b, 2, a\}, \text{ dom } R = \{a, 1\} \quad (\text{الف})$$

$$\text{dom } R = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge \exists y (y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 1)\} \quad (\text{ب})$$

$$\text{ran } R = \{y \mid y \in \mathbb{R} \wedge \exists x (x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 1)\}$$

در این مثال ملاحظه می شود که $\text{dom } R = \text{ran } R$ و در نتیجه داریم :

$$\text{fld } R = \text{dom } R \cup \text{ran } R = \text{dom } R = \text{ran } R$$

$$\text{dom } R = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge \exists y (y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 \leq 1)\} \quad (\text{ج})$$

$$\text{ran } R = \{y \mid y \in \mathbb{R} \wedge \exists x (x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 \leq 1)\}$$

در این مثال نیز داریم $\text{fld } R = \text{dom } R = \text{ran } R$ و در نتیجه

$$\text{dom } R = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \exists y (y \in \mathbb{N} \wedge x < y)\} \quad (\text{د})$$

در این صورت $\text{dom } R = \mathbb{N}$ زیرا که برای هر $x \in \mathbb{N}$ داریم $x+1 \in \mathbb{N}$ و

$$x < x+1 \quad \text{و در نتیجه} \quad x \in \text{dom } R$$

$$\text{ran } R = \{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge \exists x (x \in \mathbb{N} \wedge x < y)\}$$

در این صورت $\text{ran } R = \mathbb{N} - \{1\}$ زیرا که برای هر $y \in \mathbb{N} - \{1\}$ یعنی برای هر

$$y > 1 \text{ و } y-1 \in \mathbb{N} \text{ داریم} \quad y-1 < y \quad \text{و در نتیجه} \quad y-1 \in \text{ran } R$$

چون $\text{ran } R = \text{dom } R$ پس

$$\text{dom } R = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \exists y (y \in \mathbb{N} \wedge y = 2x)\} \quad (\text{ه})$$

در این صورت $\text{dom } R = \mathbb{N}$ زیرا که برای هر $x \in \mathbb{N}$ داریم $2x \in \mathbb{N}$ و $(x, 2x) \in R$

$$\text{و در نتیجه} \quad x \in \text{dom } R$$

$$\text{ran } R = \{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge \exists x (x \in \mathbb{N} \wedge y = 2x)\}$$

در این صورت $\text{ran } R$ مساوی مجموعه همه اعداد طبیعی زوج است ، یعنی

$$\text{ran } R = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

زیرا که اگر $y \in \text{ran } R$ آنگاه $x \in \mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه $y = 2x$ و در نتیجه

$y \in \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$ و برعکس اگر $y \in \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$ آنگاه $y=2x$ برای يك $x \in \mathbb{N}$ و

در نتیجه $(x, y) \in R$ ، یعنی $y \in \text{ran } R$ *

در این مثال نیز چون $\text{ran } R \subseteq \text{dom } R$ پس $\text{fld } R = \text{dom } R$

۲-۲-۷: تعریف:

باتوجه به ۲-۲-۶ مثالهای (ب) و (ج) نشان دهید که دامنه و برد هر يك

از این دو رابطه مساوی مجموعه زیر است:

$$[-1, 1] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leq x \leq 1\}$$

۲-۲-۸: تعریف:

نشان دهید که مجموعه R يك رابطه است اگر و فقط اگر $R \subseteq \text{dom } R \times \text{ran } R$.

۲-۲-۹: تعریف:

اگر A و B دو مجموعه باشند و $R \subseteq A \times B$ ، آنگاه R يك رابطه از A به B نامیده

می شود. * در حالت خاص اگر $A=B$ ، یعنی $R \subseteq A \times A$ آنگاه R را يك رابطه روی A می

نامیم *

۲-۲-۱۰: تعریف:

فرض کنید A و B دو مجموعه و R يك رابطه باشد. * در این صورت نشان دهید که

R يك رابطه از A به B است اگر و فقط اگر $\text{dom } R \subseteq A$ و $\text{ran } R \subseteq B$ *

۲-۲-۱۱: مثال:

(الف) اگر $A = \{a\}$ و $B = \{0, \phi\}$ ، آنگاه $R = \{(a, 0) \text{ و } (a, \phi)\}$ يك

رابطه از A به B است. * همچنین $S = \{(a, 0) \text{ و } (a, \phi)\}$ يك رابطه

از A به B است *

(ب) رابطه $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \wedge (x-y \text{ مضرب } ۲ \text{ است})\}$ يك رابطه از $\mathbb{Z}$

به $\mathbb{Z}$ یا يك رابطه روی $\mathbb{Z}$ است *

(ج) رابطه IR^2 يك رابطه از IR به IR يا يك رابطه روی IR است.

۱۲-۲-۲: تعریف:

اگر R يك رابطه باشد آنگاه معکوس R که با نماد R^{-1} نمایش داده می شود، يك رابطه است که بصورت زیر تعریف می شود:

$$R^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in R \}$$

۱۳-۲-۲: مثال:

(الف) اگر $R = \{ (a, b), (2, 1), (c, 2) \}$ آنگاه $R^{-1} = \{ (b, a), (1, 2), (2, c) \}$

(ب) اگر $R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge (x < y) \}$ آنگاه

$$R^{-1} = \{ (y, x) \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge (x < y) \}$$

$$R^{-1} = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge (x > y) \}$$

(ج) اگر $R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge (x = y) \}$ آنگاه

$$R^{-1} = \{ (y, x) \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge (y = x) \}$$

$$R^{-1} = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge (x = y) \}$$

در این مثال ملاحظه می شود که $R = R^{-1}$ روابطی که با معکوشان مساوی باشند روابط خاص هستند که در فصل ۴ در مورد آنها صحبت خواهیم کرد.

۱۴-۲-۲: تمرین:

دامنه، بُرد و معکوس هر يك از روابط زیر را تعیین کنید:

(الف) $R = \{ (a, 1), (a, \phi), (\phi, \{\phi\}), (5, 0), (0, 5) \}$

(ب) $R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge (y = x^2) \}$

(ج) $R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \wedge (y = |x|) \}$

(د) $R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge (x - y \text{ از ۱ است}) \}$

۱۵-۲-۲: تمرین: با فرض اینکه R و S دو رابطه هستند، هر يك از تساویهای زیر را

ثابت کنید *

$$\text{ran } R^{-1} = \text{dom } R, \quad \text{dom } R^{-1} = \text{ran } R \quad (\text{الف})$$

$$(R^{-1})^{-1} = R \quad (\text{ب})$$

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}, \quad (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} \quad (\text{ج})$$

۱۶-۲-۲: تعریف:

رابطه R و مجموعه A را در نظر می‌گیریم * در این صورت تحدید یا تقیید R روی A رابطه‌ای است که با نماد $R|A$ نمایش داده می‌شود و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$R|A = \{(x, y) \mid (x, y) \in R \wedge x \in A\}$$

بجای دیگر $R|A$ مجموعه همه زوجهای مرتب در R است که مؤلفه اول آنها در A قرار دارند *

۱۷-۲-۲: مثال:

(الف) اگر $R = \{(1, 2), (0, 2), (0, 5), (1, 1)\}$ و $A = \{1, 5, 0, 3\}$ آنگاه داریم:

$$R|A = \{(1, 2), (1, 1), (0, 5)\}$$

(ب) اگر $A = \mathbb{N}$ و $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \wedge (y = |x|)\}$ آنگاه داریم:

$$R|A = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge (y = |x|)\} \quad \text{یا}$$

$$R|A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge (y = x)\}$$

۱۸-۲-۲: تمرین:

در هر یک از بندهای زیر تحدید رابطه R روی مجموعه A را بیابید *

$$A = \{1, 6, 0, a\}, \quad R = \{(1, 1), (5, 5), (1, 5), (a, 6)\} \quad (\text{الف})$$

$$A = \mathbb{N}, \quad R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge (x = y)\} \quad (\text{ب})$$

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}, \quad R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge (xy = 1)\} \quad (\text{ج})$$

فرض کنیم R یک رابطه و A یک مجموعه باشد. در اینصورت داریم :

(الف) $\text{dom } R|A = (\text{dom } R) \cap A$

(ب) $\text{ran } R|A \subseteq \text{ran } R$

(ج) $R|A = R \cap (A \times \text{ran } R)$

اثبات (الف) بنا به ۲-۲-۵ (الف) :

$$x \in \text{dom } R|A \iff \exists y ((x, y) \in R|A)$$

$$\iff \exists y ((x, y) \in R \wedge x \in A) \quad \text{بنا به ۲-۲-۱۶}$$

$$\iff x \in \text{dom } R \wedge x \in A \quad \text{بنا به ۲-۲-۵ (الف)}$$

$$\iff x \in (\text{dom } R) \cap A \quad \text{بنا به تعریف اشتراك دو مجموعه}$$

$$\text{dom } R|A = (\text{dom } R) \cap A \quad \text{پس}$$

(ب) بنا به ۲-۲-۵ (ب) :

$$y \in \text{ran } R|A \implies \exists x ((x, y) \in R|A)$$

$$\implies \exists x ((x, y) \in R \wedge x \in A) \quad \text{بنا به ۲-۲-۱۶}$$

$$\implies y \in \text{ran } R \quad \text{بنا به ۲-۲-۵ (ب)}$$

$$\text{ran } R|A \subseteq \text{ran } R \quad \text{پس}$$

(ج) بنا به ۲-۲-۱۶ :

$$(x, y) \in R|A \iff (x, y) \in R \wedge x \in A \wedge y \in \text{ran } R$$

$$\iff (x, y) \in R \wedge (x, y) \in A \times \text{ran } R \quad \text{بنا به ۲-۱-۷}$$

$$\iff (x, y) \in R \cap (A \times \text{ran } R) \quad \text{بنا به تعریف اشتراك دو مجموعه}$$

$$R|A = R \cap (A \times \text{ran } R) \quad \text{پس}$$

۲-۲-۲۰: تمرین:

فرض کنید R يك رابطه و A و B دو مجموعه باشند. نشان دهید که:

$$R|(A \cup B) = (R|A) \cup (R|B) \quad (\text{الف})$$

$$R|(A \cap B) = (R|A) \cap (R|B) \quad (\text{ب})$$

$$\emptyset|A = \emptyset \quad (\text{ج})$$

$$R|\emptyset = \emptyset \quad (\text{د})$$

۲-۲-۲۱: تعریف:

رابطه R و مجموعه A را در نظر می‌گیریم. مجموعه تصویر A تحت R که با نماد $R[A]$ نمایش داده می‌شود، عبارتست از:

$$R[A] = \{y | \exists x (x \in A \wedge (x, y) \in R)\}$$

بعبارت دیگر $R[A]$ مجموعه همه مؤلفه دوم همه زوجهای مرتب در R است که مؤلفه اول آنها در A باشد.

۲-۲-۲۲: مثال:

(الف) اگر $R = \{(1, 2), (2, 3), (\emptyset, \{\emptyset\}), (1, 1)\}$ و $A = \{1, \emptyset, 0\}$ ، آنگاه داریم:

$$R[A] = \{2, 1, \{\emptyset\}\}$$

(ب) اگر $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R} \wedge (y = 2x)\}$ و $A = \mathbb{R}$ ، آنگاه داریم:

$$R[A] = \{y | y \in \mathbb{R} \wedge (y \text{ يك عدد زوج است})\}$$

۲-۲-۲۳: تمرین:

فرض کنید R يك رابطه و A و B دو مجموعه باشند. در اینصورت نشان دهید که:

$$R[A] = \text{ran } (R|A) \quad (\text{الف})$$

$$R[A \cup B] = R[A] \cup R[B] \quad (\text{ب})$$

(ج) $R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$ و مثال ناقض برای تساوی $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$

ارائه دهید *

(د) $R[A] - R[B] = R[A - B]$ و مثال ناقض برای تساوی $R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$

ارائه دهید *

(ه) $A \subseteq B \implies R[A] \subseteq R[B]$

(و) $\phi[A] = \phi$

(ز) $R[\phi] = \phi$

۲-۲-۲۴: تعریف:

فرض کنیم R و S دو رابطه باشند. ترکیب R با S که با نماد RoS نشان داده می شود، رابطه ای است که بصورت زیر تعریف می شود:

$$RoS = \{(x, z) \mid \exists y ((x, y) \in S \wedge (y, z) \in R)\}$$

۲-۲-۲۵: مثال:

(الف) اگر $R = \{(1, 2), (\phi, 5), ((\phi), 2)\}$ و $S = \{(a, (\phi)), ((\phi), \phi)\}$ آنگاه داریم:

$$RoS = \{(a, 2), ((\phi), 5)\}$$

و

$$SoR = \phi$$

در این مثال ملاحظه می شود که $RoS \neq SoR$ و در نتیجه در حالت عمومی تساوی $RoS = SoR$ برقرار نیست *

(ب) اگر $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge (y = x^2)\}$ و $S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge (y = x^2)\}$ آنگاه داریم:

$$RoS = \{(x, z) \mid x, z \in \mathbb{R} \wedge \exists y (y \in \mathbb{R} \wedge (x, y) \in S \wedge (y, z) \in R)\}$$

یا

$$RoS = \{(x, z) \mid x, z \in \mathbb{R} \wedge \exists y (y \in \mathbb{R} \wedge y = x^2 \wedge z = 2y)\}$$

یا

$$RoS = \{(x, z) \mid x, z \in \mathbb{R} \wedge (z = 2x^2)\}$$

معادلین

$$SoR = \{(x, z) \mid x, z \in \mathbb{R} \wedge \exists y (y \in \mathbb{R} \wedge (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S)\}$$

یا

$$SoR = \{(x, z) \mid x, z \in \mathbb{R} \wedge \exists y (y \in \mathbb{R} \wedge y = 2x \wedge z = y^2)\}$$

$$SoR = \{ (x, z) \mid x, z \in \mathbb{R} \wedge (z = 4x^2) \}$$

۲-۲-۲۶: تمرین:

در هر یک از بند های زیر SoR و RoS را تعیین کنید.

(الف) $S = \{ (1, 6), (3, 1) \}$, $R = \{ (1, 1), (1, 2), (a, 3) \}$

(ب) $S = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge (y = x^2) \}$, $R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge (y = |x|) \}$

(ج) $S = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge (y \neq x) \}$, $R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge (y = x) \}$

۲-۲-۲۷: تمرین:

فرض کنید S, R و T سه رابطه باشند. ثابت کنید که:

(الف) $RoS = \text{dom } S \times \text{ran } R$

() $RoS \neq \emptyset \iff \text{dom } R \cap \text{ran } S \neq \emptyset$

(ج) $Ro(S \cup T) = (RoS) \cup (RoT)$

(د) $(R \cup S) \circ T = (RoT) \cup (SoT)$

(هـ) $Ro(S \cap T) = (RoS) \cap (RoT)$ و مثال ناقض برای تساوی ارائه دهید.

(و) $(R \cap S) \circ T = (RoT) \cap (SoT)$ و مثال ناقض برای تساوی ارائه دهید.

۲-۲-۲۸: قضیه: اگر S, R و T سه رابطه باشند آنگاه داریم:

$$(RoS) \circ T = Ro(SoT)$$

اثبات: با استفاده از ۲-۲-۲۴ داریم:

$$(x, z) \in (RoS) \circ T \iff \exists y ((x, y) \in T \wedge (y, z) \in RoS)$$

$$\iff \exists y \exists u ((x, y) \in T \wedge (y, u) \in S \wedge (u, z) \in R)$$

$$\iff \exists u ((x, u) \in SoT \wedge (u, z) \in R)$$

$$\Leftrightarrow (x, z) \in R \circ (S \circ T)$$

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

تمرین ۲-۲-۲۹:

فرض کنید R و S دو رابطه و A یک مجموعه باشند. ثابت کنید که:

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} \quad (\text{الف})$$

$$(R \circ S) \upharpoonright A = R \circ (S \upharpoonright A) \quad (\text{ب})$$

$$R \subseteq S \implies R \circ T \subseteq S \circ T \wedge T \circ R \subseteq T \circ S \quad (\text{ج})$$

$$(R \circ S) [A] = R [S [A]] \quad (\text{د})$$

$$\text{dom } (R \circ S) = S^{-1} [\text{dom } R] \quad (\text{ه})$$

$$\text{ran } (R \circ S) = R [\text{ran } S] \quad (\text{و})$$

تعریف ۲-۲-۳۰:

فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ یک مجموعه متناهی باشد. در این صورت به هر رابطه روی A می توان جدولی بصورت زیر وابسته کرد. فرض کنیم R یک رابطه روی A باشد، یعنی $R \subseteq A \times A$ در این صورت جدول R را بصورت زیر تشکیل می دهیم.

ابتدا عناصر مجموعه A را بترتیب در سطر و ستون اول جدول می نویسیم. سپس برای هر i و j در $\{1, \dots, n\}$ در مربع وابسته به a_j و a_i برحسب اینکه $(a_i, a_j) \in R$ یا $(a_i, a_j) \notin R$ بترتیب ۱ یا ۰ قرار می دهیم و بدین صورت جدول را تکمیل می کنیم.

R	a_1	a_2	...	a_j	...	a_n
a_1						
a_2						
$\vdots$						
a_i						
$\vdots$						
a_n						

مربع وابسته به
 a_j, a_i