

سور عمومی و سور وجودی *

عبارت‌های " برای هر " و " وجود دارد " را سور می‌نامیم و بترتیب آنها را با نماد $\forall$ و $\exists$ نمایش می‌دهیم. نماد $\forall$ را سور عمومی و نماد $\exists$ را سور وجودی می‌نامیم. با استفاده از این نماد گذاری جملات ۴ و ۵ در ۱۰۲۰۳ و (۱) الی (۵) فوق بترتیب بصورت زیر نوشته می‌شوند:

IN (اگر x يك عدد زوج باشد آنگاه x بر عدد ۲ قابل قسمت است) $\forall x$.

IN (x فرد است و x از ۳ بزرگتر است) $\exists x$.

(x با مثلث معینی متشابه است) $\exists x$. مجموعه مثلثهای واقع در صفحه

(x جاویدان است) $\forall x$. مجموعه انسانها

(x فانی است) $\exists x$. مجموعه حیوانات

IR (اگر x يك عدد طبیعی باشد آنگاه x يك عدد صحیح است) $\forall x$.

در جملات فوق ملاحظه می‌شود که عبارت‌های داخل پرانتز گزاره نما می‌باشند. بطور کلی بر حسب سور بکار برده شده در يك جمله تعریف زیر را می‌آوریم:

۱۰۳۰۱ تعریف

اگر p_x يك گزاره نما باشد، آنگاه $\exists x p_x$ و $\forall x p_x$ را بترتیب يك جمله عمومی و يك جمله وجودی می‌نامیم. متغیر x در $\forall x p_x$ یا $\exists x p_x$ را متغیر وابسته می‌نامیم.

تذکر

با استفاده از سور عمومی، تساوی و زیر مجموعه بودن مجموعه هارا می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$$(A = B) \iff \forall x (x \in A \iff x \in B)$$

$$(A \subseteq B) \iff \forall x (x \in A \implies x \in B)$$

همچنین اگر A مجموعه ای از مجموعه ها باشد آنگاه با استفاده از سور عمومی $\cup A$ و $\cap A$ را می توان بصورت زیر نوشت :

$$\cup A = \{x | \exists X (X \in A \wedge x \in X)\}$$

$$\cap A = \{x | \forall X (X \in A \implies x \in X)\}$$

ترکیب سورها

ممکن است که در جمله ای بیش از یک سور بکار آید . جملات زیر را در نظر می گیریم :

$\mathbb{R}$ برای هر x و برای هر y داریم $x + y = 0$

$\mathbb{Z}$ برای هر x وجود دارد y بطوریکه $x + y = 0$

$\mathbb{R}$ یک x وجود دارد بطوریکه برای هر y داریم $x + y = 0$

$\mathbb{Z}$ یک x وجود دارد و یک y وجود دارد بطوریکه $x + y = 0$

با استفاده از نمادها $\forall$ و $\exists$ جملات فوق بترتیب بصورت زیر نوشته می شوند :

$$\mathbb{R} \quad \forall x \forall y (x + y = 0)$$

$$\mathbb{Z} \quad \forall x \exists y (x + y = 0)$$

$$\mathbb{R} \quad \exists x \forall y (x + y = 0)$$

$$\mathbb{Z} \quad \exists x \exists y (x + y = 0)$$

بطور کلی اگر p_{xy} یک گزاره نهای دو متغیره باشد ، آنگاه هر یک از جملات

$$\exists x \exists y (p_{xy}), \exists x \forall y (p_{xy}), \forall x \exists y (p_{xy}), \forall x \forall y (p_{xy})$$

را بترتیب بر حسب اولین سور آنها از طرف چپ جمله عمومی ، جمله عمومی ، جمله وجودی و جمله وجودی می نامیم . متغیرها x و y در این جملات را متغیرهای

وابسته می‌نامیم. بهمین ترتیب ممکن است که در يك جمله که شامل يك گزاره نما سه، چهار یا n متغیره باشد چندین سوربکار رفته باشد.

۱۰۳۰۲- تمرین

با استفاده از سورها، رابطهای گزاره‌ای و نمادهای ریاضی نظیر $+$ ، $<$ ، $\leq$ ، $\cap$ ، عارتهای زیر را بصورت خلاصه بنویسید و سپس تعیین کنید که کداميك جمله عمومی و کداميك جمله وجودی است.

۱- برای هر x ، x فرد است یا x زوج است. $\mathbb{N}$

۲- برای هر x و هر y حاصلضرب x و y بزرگتر از حاصل جمع x و y است. $\mathbb{R}$

۳- برای هر x يك y وجود دارد بطوریکه y کوچکتر از x نیست. $\mathbb{R}$

۴- برای هر x يك y وجود دارد بطوریکه اشتراك x با y برابر

اجتماع x با y است. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

۵- يك x و يك y وجود دارند بطوریکه y شامل x است. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

مقایسه متغیر آزاد با متغیر وابسته

همانطوریکه قبلاً گفته شد متغیر واقع در يك گزاره نما را متغیر آزاد و متغیر واقع در يك جمله عمومی یا يك جمله وجودی را متغیر وابسته می‌نامیم. می‌دانیم که اگر عصری از مجموعه جهانی بجای يك متغیر آزاد دو يك گزاره نما قرار دهیم آنگاه يك گزاره بدست می‌آید، در حالیکه این مطلب در مورد کلیه جملاتی که شامل متغیر وابسته هستند صادق نیست. مثلاً اگر جمله وجودی $(x > 2) \in x$ با مجموعه جهانی $\mathbb{N}$ را در نظر بگیریم آنگاه با قرار دادن عصری از $\mathbb{N}$ بجای x عارت نامفهومی بدست می‌آید.

درستی جملات عمومی و وجودی

جملات عمومی و وجودی زیر را در نظر می‌گیریم • مجموعه جهانی وابسته به هریک از جملات زیر IR است •

$$\forall x \quad (x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2) \quad (1)$$

$$\forall x \quad (x^2 - 0x + 6 = 0) \quad (2)$$

$$\exists x \quad (x^2 - 0x + 6 = 0) \quad (3)$$

$$\exists x \quad (x^2 + 1 = 0) \quad (4)$$

بسهولت دیده می‌شود که جمله عمومی (۱) درست، جمله عمومی (۲) غلط، جمله وجودی (۳) درست و جمله وجودی (۴) غلط است • با استفاده از مفهوم مجموعه جواب یک گزاره تعامی توان قاعده‌ای برای تعیین درست بودن یا غلط بودن جمله‌های عمومی و جمله‌های وجودی بدست آورد • گزاره تعامی وابسته به هریک از جملات (۱) الی (۴) را بترتیب زیر در نظر می‌گیریم:

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \quad (1)'$$

$$x^2 - 0x + 6 = 0 \quad (2)'$$

$$x^2 - 0x + 6 = 0 \quad (3)'$$

$$x^2 + 1 = 0 \quad (4)'$$

مجموعه‌های جواب گزاره تعامی (۱) الی (۴) بترتیب عبارتند از: IR، {۲، ۳}، {۲، ۳} و ∅ • بنابراین مجموعه درستی گزاره تعامی (۱) برابر مجموعه جهانی است • بعبارت دیگر اگر بجای x در (۱) هر عنصر از مجموعه جهانی قرار دهیم گزاره حاصل یک گزاره درست است • پس جمله عمومی (۱) درست است •

مجموعه درستی گزاره نمای (۲) برابر مجموعه جهانی نیست. عبارت دیگر عصری در مجموعه جهانی هست که به ازای آن گزاره نمای (۲) تبدیل بیک گزاره غلط می شود. پس جمله عمومی (۲) غلط است. مجموعه جواب گزاره نمای (۳) تهی نیست عبارت دیگر عصری در مجموعه جهانی هست که اگر بجای x در گزاره نمای (۳) قرار گیرد، حاصل یک گزاره درست است. پس جمله وجودی (۳) درست است. مجموعه جواب گزاره نمای (۴) تهی است. عبارت دیگر عصری در مجموعه جهانی وجود ندارد که بازای آن گزاره نمای (۴) بیک گزاره درست تبدیل شود. پس جمله وجودی (۴) غلط است.

حال با در نظر گرفتن بحث فوق، قاعده کلی زیر را در مورد درستی جملات عمومی و وجودی بیان می کنیم.

قاعده

جمله عمومی $\forall x p_x$ ، جمله وجودی $\exists x p_x$ و وابسته به آنها مجموعه جهانی U را در نظر می گیریم. فرض می کنیم مجموعه جواب گزاره نمای p_x باشد.

اگر $p = U$ آنگاه جمله عمومی $\forall x p_x$ درست است.

اگر $p \neq U$ آنگاه جمله عمومی $\forall x p_x$ غلط است.

اگر $p \neq \emptyset$ آنگاه جمله وجودی $\exists x p_x$ درست است.

اگر $p = \emptyset$ آنگاه جمله وجودی $\exists x p_x$ غلط است.

تذکره

همانطوریکه در ابتدای این فصل گفته شد گزاره عاریتی است که درست یا غلط باشد. چون جملات عمومی یا وجودی نیز درست یا غلط هستند پس این نوع جملات نیز گزاره می باشند.

۱۰۳۰۳ - مثال

تعیین می‌کنیم که کدامیک از جملات زیر درست و کدامیک غلط است.

- (الف) $\forall x (x \text{ زوج است}) \vee \exists x (x \text{ فرد است})$ IN
- (ب) $\forall x (x \text{ زوج است}) \vee \exists x (x \text{ فرد است})$ IN
- (ج) $\forall x (x \cup x' \neq \emptyset) \wedge \exists x (x \cap \emptyset \neq \emptyset)$ $\mathcal{P}(\text{IN})$
- (د) $\forall x (x \cup x' = \text{IN}) \implies \neg \exists x (x \cup x' \neq \emptyset)$ $\mathcal{P}(\text{IN})$

گزاره‌های " x فرد است"، " x زوج است"، " $x \cup x' \neq \emptyset$ "،

" $x \cap \emptyset \neq \emptyset$ " و " $x \cup x' = \text{IN}$ " را به ترتیب با p_x, q_x, r_x, s_x و t_x و مجموعه‌های جواب این گزاره‌ها را به ترتیب با P, Q, R, S و T نمایش می‌دهیم.

(الف) چون $P \neq \text{IN}$ و $Q \neq \text{IN}$ پس جملات عمومی $\forall x p_x$ و $\forall x q_x$ هر دو غلط هستند. بنا به تعریف ارزش درستی " $\vee$ " جمله $\forall x p_x \vee \forall x q_x$ غلط است.

(ب) چون $P \neq \text{IN}$ و $Q \neq \emptyset$ پس جمله عمومی $\forall x p_x$ غلط و جمله وجودی $\exists x q_x$ درست است. بنا به تعریف ارزش درستی " $\wedge$ " جمله $\forall x p_x \wedge \exists x q_x$ درست است.

(ج) چون $R = \mathcal{P}(\text{IN})$ و $S = \emptyset$ پس جمله عمومی $\forall x r_x$ درست و جمله وجودی $\exists x s_x$ غلط است. بنا به تعریف ارزش درستی " $\wedge$ " جمله $\forall x r_x \wedge \exists x s_x$ غلط است.

(د) چون $T = \mathcal{P}(\text{IN})$ پس جمله عمومی $\forall x t_x$ درست است. مطابق بند (ج) چون $R \neq \emptyset$ پس جمله وجودی $\exists x r_x$ درست و در نتیجه $\exists x r_x \wedge \forall x t_x$ غلط است. بنا به تعریف ارزش درستی " $\implies$ " جمله $\exists x r_x \implies \forall x t_x$ غلط است.

تذکره

فرض کنیم P_x یک گزاره نما با مجموعه جهانی U باشد. اگر U یک مجموعه متناهی و مساوی $\{a_1, \dots, a_n\}$ باشد آنگاه جمله عمومی $\forall x P_x$ معادل

گزاره $P_{a_1} \wedge \dots \wedge P_{a_n}$ و جمله وجودی $\exists x P_x$ معادل گزاره $P_{a_1} \vee \dots \vee P_{a_n}$

است. زیرا که روشن است $\forall x P_x$ درست است اگر و فقط اگر گزاره $P_{a_1} \wedge \dots \wedge P_{a_n}$

درست باشد و همینطور جمله وجودی $\exists x P_x$ درست است اگر و فقط اگر گزاره

$P_{a_1} \vee \dots \vee P_{a_n}$ درست باشد. بنابراین وقتی که مجموعه جهانی وابسته به یک

گزاره نما متناهی باشد می توان فقط از رابطهای گزاره ای استفاده کرد و احتیاجی

به سورها نمی باشد. ولی وقتی مجموعه جهانی نامتناهی باشد آنگاه وجود سورها

الزامی است.

۱۰۳۰۴ - تمرین

با در نظر گرفتن جملات زیر نشان دهید که جملات (الف) الی (د) درست و جملات (ه) و (و) غلط هستند.

- | | | |
|-------|---|-------------------------------------|
| (الف) | $(x \text{ فرد است} \vee x \text{ زوج است}) \wedge \forall x$ | IN |
| (ب) | $(\text{همه زوایای } x \text{ با هم برابرند}) \implies \forall x$ | مثبت متساوی الاضلاع است $\forall x$ |
| (ج) | $(\text{NI} = \text{X}) \wedge \text{X}' = \text{NI}$ | $\mathcal{P}(\text{IN})$ |
| (د) | $(x \text{ فانی است}) \wedge \exists x$ | مجموعه کلیه موجودات زنده |
| (ه) | $(\emptyset = \emptyset \cup \text{X}) \wedge \forall x$ | $\mathcal{P}(\text{IN})$ |
| (و) | $(x \text{ جاویدان است}) \wedge \exists x$ | مجموعه کلیه موجودات زنده |

۱۰۲۰۵ - تمرین

با در نظر گرفتن جملات زیر تعیین کنید که کدامیک درست و کدامیک غلط است.

(الف) $\exists x (x > 2) \wedge \exists x (x^2 + 1 = 0) \wedge \exists x (x \in \mathbb{N})$

(ب) $(2 > 3) \rightarrow (x \text{ اول است} \wedge x \text{ زوج است}) \wedge x \in \mathbb{N}$

(ج) $((0 \neq x - x) \wedge x \neq x) \wedge (x = x) \wedge (x = 0) \rightarrow (0 = 0) \wedge (x = x)$

$P(\mathbb{N})$

تذکر

اگر جمله عمومی $\forall x P_x$ درست باشد، یعنی مجموعه جواب گزاره تعای P_x مساری مجموعه جهانی باشد، آنگاه ممکن است که از نوشتن سور عمومی $\forall$ صرف نظر شود و وجود آن بطور ضمنی درک شود. مثلاً وقتی که گفته می شود معادله $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$ که به آن مجموعه جهانی $\mathbb{R}$ وابسته است درست می باشد، وجود سور عمومی بطور ضمنی پذیرفته می شود. عبارت دیگر منظور از درست بودن معادله $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$ ، درست بودن جمله عمومی $\forall x ((x+1)(x-1) = x^2 - 1)$ است.

۱۰۲۰۶ - تمرین

در کدامیک از جملات زیر می توان از نوشتن سور عمومی صرف نظر کرد؟

(الف) $\mathbb{R} \quad \forall x ((x+1)^2 = x^2 + 2x + 2)$

(ب) $\mathbb{R} \quad \forall x (x \neq 0 \rightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{R})$

(ج) $P(\mathbb{N}) \quad \forall x (x \neq \emptyset \rightarrow x' = \mathbb{N})$

جملات همیشه درست یا معتبر

جمله عمومی $(\forall x) (2^x < 3^x)$ را با مجموعه جهانی $\mathbb{N}$ در نظر می‌گیریم.
 ملاحظه می‌شود که مجموعه درستی گزاره نمایی $2^x < 3^x$ مساوی $\mathbb{N}$ یعنی مجموعه جهانی است و در نتیجه جمله عمومی $(\forall x) (2^x < 3^x)$ با مجموعه جهانی $\mathbb{N}$ درست است. حال اگر مجموعه جهانی $\mathbb{R}$ به جمله عمومی $(\forall x) (2^x < 3^x)$ وابسته باشد، آنگاه این جمله غلط است. زیرا که مجموعه درستی گزاره نمایی $2^x < 3^x$ مخالف $\mathbb{R}$ است، مثلاً داریم $2^{-1} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = 3^{-1}$.
 نتیجه می‌شود که جمله عمومی $(\forall x) (2^x < 3^x)$ نسبت به بعضی از مجموعه‌های جهانی وابسته به آن درست و نسبت به بعضی دیگر غلط است. در اینصورت می‌گوئیم که این جمله همیشه درست یا معتبر نیست.

۱۰۲۰۷- تعریف

اگر يك جمله نسبت به هر مجموعه جهانی وابسته به آن درست باشد آنگاه آن جمله را يك جمله همیشه درست یا معتبر می‌نامیم.

۱۰۳۰۸- مثال

فرض کنیم p_x و q_x دو گزاره نمایی با مجموعه جهانی U و بترتیب مجموعه‌های درستی P و Q باشند. در اینصورت جمله زیر يك جمله معتبر است.

$$(\forall x p_x) \vee (\forall x q_x) \implies \forall x (p_x \vee q_x) \quad (*)$$

اگر $(\forall x p_x) \vee (\forall x q_x)$ غلط باشد آنگاه بنا به ارزش درستی $\implies$ جمله $(*)$ درست است.

پس فرض کنیم $(\forall x q_x) \vee (\forall x p_x)$ درست باشد. در اینصورت

$\forall x p_x$ درست است یا $\forall x q_x$ درست است. بنابراین $p = U$ یا $q = U$.

حال بنا به ۱۰۲۰۱۱ بند (الف)، $\{x | p_x \vee q_x\} = p \cup q$

و در نتیجه $p \cup q = U$ یعنی جمله $\forall x (p_x \vee q_x)$ درست است. بنابراین

جمله (*) درست است. پس در هر حالت جمله (*) درست است. ملاحظه

می شود مجموعه جهانی وابسته به جمله (*) يك مجموعه دلخواه می باشد و درست

بودن جمله (*) مستقل از مجموعه جهانی است. بنابراین جمله (*) يك جمله

همیشه درست یا معتبر می باشد.

۱۰۲۰۹ - قضیه

فرض کنیم p_x يك گزاره نما با مجموعه جهانی U باشد. در اینصورت هر يك

از جملات زیر معتبر است.

$$(1) \quad \forall x p_x \longleftrightarrow \exists x \neg p_x$$

$$(2) \quad \forall x p_x \longleftrightarrow \neg \exists x \neg p_x$$

$$(3) \quad \neg \forall x p_x \longleftrightarrow \exists x \neg p_x$$

$$(4) \quad \neg \exists x p_x \longleftrightarrow \forall x \neg p_x$$

اثبات

فرض کنیم مجموعه جواب p_x مساوی P و مکمل آن در U مساوی P' باشد.

(۱) فرض کنیم $\neg \forall x p_x$ درست باشد. در اینصورت $\forall x p_x$ غلط است. پس

$P \neq U$ و در نتیجه $P' \neq \emptyset$. بنا به ۱۰۲۰۱۱ بند (ج)، $P' = \{x | \neg p_x\}$.

پس جمله وجودی $\exists x \neg p_x$ درست است. حال فرض کنیم $\neg \forall x p_x$ غلط

باشد. در اینصورت $\forall x p_x$ درست است. پس $P = U$ و در نتیجه

$P' = \emptyset$. پس جمله $\exists x \neg p_x$ غلط است. بنا به ارزش درستی $\langle \implies \rangle$

جمله (۱) درست است و در نتیجه یک جمله معتبر است.

(۲) چون گزاره $(\neg p \implies \neg q) \iff (p \implies q)$ یک گزاره همیشه درست

است پس از معتبر بودن جمله (۱) نتیجه می شود که جمله زیر معتبر است.

$$\neg (\neg \forall x p_x) \iff \neg (\exists x \neg p_x)$$

چون گزاره $p \iff \neg \neg p$ همیشه درست است پس نتیجه می شود که جمله

زیر معتبر است.

$$\forall x p_x \iff \neg \exists x \neg p_x$$

یعنی جمله (۲) معتبر است.

(۳) فرض کنیم $\neg \exists x p_x$ درست باشد. در اینصورت $\exists x p_x$ غلط است. پس

$P = \emptyset$ و در نتیجه $P' = U$. چون $P' = \{x \mid \neg p_x\}$ پس جمله

$\forall x \neg p_x$ درست است. حال فرض کنیم $\neg \exists x p_x$ غلط است. در اینصورت

$\exists x p_x$ درست است. پس $P \neq \emptyset$ و در نتیجه $P' \neq U$. پس جمله

$\forall x \neg p_x$ غلط است. بنا به ارزش درستی $\langle \implies \rangle$ جمله (۳) درست

است و در نتیجه یک جمله معتبر است.

(۴) با استفاده از گزاره همیشه درست $(\neg p \iff \neg \neg p) \iff (p \iff \neg \neg p)$ و با

توجه به جمله معتر (۳) نتیجه می شود که جمله زیر معتبر است:

$$\neg (\neg \exists x p_x) \iff \neg \forall x \neg p_x$$

بنا بر این جمله $\exists x p_x \iff \neg \forall x \neg p_x$ معتبر است یعنی جمله (۴) معتر

است.