

فصل ۲

روابط

در این فصل یکی از مفاهیم مهم در نظریه مجموعه ها را معرفی می کنیم و به بررسی برخی از خواص آن می پردازیم. مفهوم رابطه نه تنها در اکثر شاخه های ریاضی بکاربرده می شود، بلکه در زندگی روزمره نیز ممکن است بکار رود. مثلاً وقتی می گوئیم "حسن برادر حسین است" آنگاه درک می شود که حسن و حسین توسط رابطه "برادر بودن" به هم مربوط می شوند. همچنین وقتی می گوئیم "محمد پدر مهدی است" آنگاه درک می کنیم که محمد و مهدی توسط رابطه "پدر بودن" به هم مربوط هستند. قبل از تعریف رابطه و معرفی برخی از خواص آن، ابتدا زوج مرتب و ضرب دکارتی مجموعه ها را تعریف می کنیم.

۲-۱: ضرب دکارتی مجموعه ها

بنا به تعریف تساوی دو مجموعه داریم $\{۱\} و \{۲\} = \{۱\}$ و $\{۱\}$ پس ترتیب قرار گرفتن عناصر دو مجموعه دخالتی در تساوی آن دو مجموعه ندارد. در اینجا می خواهیم زوج $(۱ و ۲)$ را طوری تعریف کنیم که ترتیب قرار گرفتن عناصر در تساوی دخالت داشته باشد و در نتیجه $(۱ و ۲) \neq (۲ و ۱)$. بطور کلی می خواهیم زوج (x, y) را طوری تعریف کنیم که داشته باشیم:

$$(x, y) = (u, v) \iff x = u \wedge y = v$$

۲-۱-۱: تعریف زوج (x, y) را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

۲-۱-۲: قضیه

$(x, y) = (u, v)$ اگر و فقط اگر $x = u$ و $y = v$.

اثبات

فرض کنیم $x = u$ و $y = v$ و نشان می‌دهیم $(x, y) = (u, v)$. از تساویهای $x = u$ و $y = v$ نتیجه می‌شود که $\{x\} = \{u\}$ و $\{x, y\} = \{u, v\}$. پس $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$ و در نتیجه $(x, y) = (u, v)$.

حال فرض کنیم $(x, y) = (u, v)$ و نشان می‌دهیم $x = u$ و $y = v$. چون $(x, y) = (u, v)$

پس $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$ در اینصورت داریم:
 $\{u\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$ و $\{u, v\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$

بنابراین داریم:

(الف) $\{u\} = \{x\}$ یا (ب) $\{u\} = \{x, y\}$

و

(ج) $\{u, v\} = \{x\}$ یا (د) $\{u, v\} = \{x, y\}$

اگر تساوی (ب) برقرار باشد آنگاه $u = x = y$. در اینصورت تساویهای (ج) و (د) یکسان می‌شوند و نتیجه می‌شود که $x = y = u = v$ و در اینصورت قضیه اثبات می‌شود. به‌تریق مشابه اگر تساوی (ج) برقرار باشد آنگاه نتیجه می‌شود که $x = y = u = v$ و قضیه ثابت می‌شود. پس فقط حالتی باقی می‌ماند که تساویهای (الف) و (د) برقرار باشند. از تساوی (الف) داریم $u = x$ و از تساوی (د) نتیجه می‌شود که $u = y$ یا $v = y$. اگر $u = y$ آنگاه $x = y = u$ و مانند حالت قبیل قضیه ثابت می‌شود. اگر $v = y$ آنگاه نتیجه مطلوب بدست می‌آید و قضیه اثبات می‌شود.

۲-۱-۳: تعریف

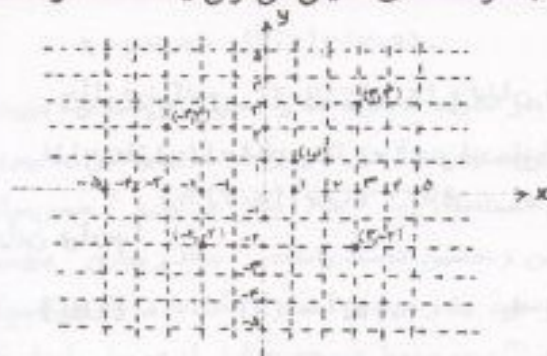
زوج (x, y) را که در ۲-۱-۲ تعریف شد یک زوج مرتب می‌نامیم. x را مختص اول یا مؤلفه اول و y را مختص دوم یا مؤلفه دوم زوج مرتب (x, y) می‌نامیم.

۲-۱-۴: تمرین نشان دهید که اگر تعریف کنیم $(x, y) = (x, \{y\})$ ، آنگاه با این تعریف

۲-۱-۲ را نمی‌توان اثبات کرد • برای اینکار يك مثال ناقض ارائه دهید •

۲-۱-۵ : مثال

دستگاه مختصات دکارتی در صفحه را در نظر می‌گیریم • همانطوریکه ملاحظه می‌شود به ازاء هر نقطه در این دستگاه مختصات می‌توان يك زوج مرتب با مؤلفه‌های حقیقی وابسته کرد • و برعکس بازاء هر زوج مرتب با مؤلفه‌های حقیقی می‌توان يك نقطه در دستگاه مختصات وابسته نمود •



۲-۱-۶ : تمرین

فرض کنید A يك مجموعه باشد • در اینصورت اگر $x, y \in A$ آنگاه $(x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$

۲-۱-۷ : تعریف

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند • در اینصورت ضرب دکارتی A و B بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

بعبارت دیگر $A \times B$ مجموعه همه زوجهای مرتب (a, b) است که در آن مؤلفه اول آنها a متعلق به A و مؤلفه دوم آنها b متعلق به B می‌باشد •

۲-۱-۸ : مثال اگر $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 5\}$ آنگاه داریم :

$$A \times B = \{ (a, 1), (a, 5), (b, 1), (b, 5), (c, 1), (c, 5) \}$$

۲-۱-۹ : تعریف اگر A يك مجموعه باشد آنگاه A^2 را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$A^2 = A \times A$$

۱-۱-۲: مثال

مجموعه اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. در اینصورت همانطوری که در ۱-۱-۲ ملاحظه شد بین عناصر $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ و نقاط در یک دستگاه مختصات دکارتی در صفحه یک تناظر یک به یک وجود دارد. بدین معنی که بازه مرتب (a, b) در $\mathbb{R}^2$ یک نقطه در دستگاه مختصات دکارتی در صفحه وابسته می‌شود و برعکس بازه مرتب در دستگاه مختصات یک زوج مرتب در $\mathbb{R}^2$ وابسته می‌شود.

۱-۱-۳: تعریف

۱- مجموعه‌های A, B, C را در نظر بگیرید. نشان دهید که:

$$\phi \times A = A \times \phi = \phi \quad (\text{الف})$$

$$(A \times B = A \times C \wedge A \neq \phi) \implies B = C \quad (\text{ب})$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad (\text{ج})$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \quad (\text{د})$$

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C) \quad (\text{هـ})$$

$$A \times U^I = \{A \times Y \mid Y \in I\} \quad \text{اگر } I \text{ مجموعه‌ای از مجموعه‌ها باشد، آنگاه}$$

۲- نشان دهید که هر یک از تساویهای زیر غلط هستند. (یک مثال ناقص برای هر یک ارائه دهید).

$$A \times B = B \times A \quad (\text{الف})$$

$$A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C) \quad (\text{ب})$$

۲- تحت چه شرایطی $A \times B = B \times A$ درست است. به عبارت دیگر یک شرط لازم کافی بیاورید که تساوی $A \times B = B \times A$ برقرار باشد. در این تعین فرض کنید:

$$A \neq \phi, B \neq \phi$$

۱-۱-۴: تعریف

سه تایی مرتب (x_1, x_2, x_3) را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x_1, x_2, x_3) = ((x_1, x_2), x_3)$$

چهارتایی مرتب (x_1, x_2, x_3, x_4) را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1, x_2, x_3), x_4)$$

بطور کلی تایی مرتب $(x_1, \dots, x_n)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x_1, \dots, x_n) = ((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$$

تذکره:

تعریف ۱۲-۱-۲ با استفاده از استقرار ریاضی انجام شده است و به این نوع تعریف، تعریف بازگشتی گفته می‌شود. در ۱۲-۱-۲ اگر n یک عدد طبیعی باشد بطوریکه $n \geq 2$ آنگاه برای تعریف n -تایی مرتب $(x_1, \dots, x_n)$ بصورت زیر عمل شد:

$$(a) \text{ الف) باز } n=2, (x_1, x_2) = (\{x_1\}, \{x_1, x_2\})$$

$$(b) \text{ ب) } (x_1, \dots, x_n) = ((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$$

تعریف فوق را می‌توان برای $n=1$ بصورت $(x_1) = x_1$ نیز انجام داد و در نتیجه بازه هر عدد طبیعی n ، n -تایی مرتب $(x_1, \dots, x_n)$ تعریف می‌شود. مثال دیگری از یک تعریف بازگشتی، تعریف جمع اعداد است. بدین صورت که برای هر عدد طبیعی n و اعداد حقیقی $a_1, \dots, a_n$ مجموع $a_1, \dots, a_n$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a) \text{ الف) } \sum_{i=1}^1 a_i = a_1$$

$$(b) \text{ ب) } \sum_{i=1}^n a_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \right) + a_n$$

تعریف بازگشتی را می‌توان بطور اجمال به این صورت بیان کرد که ابتدا قدم اول تعریف می‌شود و سپس بعدی بر حسب قبلی تعریف می‌گردد.

۱۳-۱-۲: قضیه برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \iff x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n$$

اثبات: توسط استقرار این قضیه را اثبات می‌کنیم.

پایه استقرا: اگر $n=1$ آنگاه بنابه تذکر بعد از ۱-۱-۲ داریم:

$$(x_1) = (y_1) \iff x_1 = y_1$$

گام استقرا: فرض کنیم قضیه برای عدد طبیعی n برقرار باشد و برای $n+1$ قضیه

را اثبات می‌کنیم.

بنابه ۱-۱-۲:

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) = (y_1, \dots, y_{n+1}) \iff ((x_1, \dots, x_n), x_{n+1}) = ((y_1, \dots, y_n), y_{n+1})$$

بنابه ۱-۲:

$$(x_1, \dots, x_n), x_{n+1}) = ((y_1, \dots, y_n), y_{n+1}) \iff (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \wedge x_{n+1} = y_{n+1}$$

بنابه فرض:

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \wedge x_{n+1} = y_{n+1} \iff (x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n) \wedge x_{n+1} = y_{n+1}$$

بنابراین:

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) = (y_1, \dots, y_{n+1}) \iff x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_{n+1} = y_{n+1}$$

۱-۱-۴: تعریف برای هر عدد طبیعی n و مجموعه‌های $A_1, \dots, A_n$ ضرب دکارتی

$A_1, \dots, A_n$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}$$

$A_1 \times \dots \times A_n$ را با نماد $\prod_{i=1}^n A_i$ نیز نمایش می‌دهیم.

تذکر: اگر A, B, C سه مجموعه باشند آنگاه،

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C$$

زیرا که داریم:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$$

$$= \{((a, b), c) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$$

و

$$(A \times B) \times C = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} \times C = \{((a, b), c) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$$

پس تساوی فوق برقرار است. ولی توجه کنید که مثال زیر نشان می دهد که بطور عمومی تساوی زیر برقرار نیست.

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

۱۵-۱-۲: مثال: فرض کنیم $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$. در اینصورت داریم:

$$(A \times B) \times C = \{(1, 2)\} \times \{3\} = \{((1, 2), 3)\}$$

$$A \times (B \times C) = \{1\} \times \{(2, 3)\} = \{(1, (2, 3))\}$$

چون $(1, (2, 3)) \neq ((1, 2), 3)$ پس $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$

۱۶-۱-۲: تمرین: فرض کنید A, B, C سه مجموعه باشند. نشان دهید که:

(الف) اگر $A \neq B$ آنگاه داریم:

$$A \times B = B \times A \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset$$

(ب)

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee C = \emptyset$$

(ج)

$$A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset$$

۱۷-۱-۲: تعریف: اگر A یک مجموعه و n یک عدد طبیعی باشد آنگاه A^n را بصورت

زیر تعریف می کنیم:

$$A^n = \langle \underbrace{A \times \dots \times A}_n \rangle$$

بعبارت دیگر:

$$A^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in A\}$$

در اینجا توجه کنید که $a_1, \dots, a_n \in A$ خلاصه شده $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \in A$ است.

۱۸-۱-۲: تمرین: فرض کنید A و B دو مجموعه و n یک عدد طبیعی باشد. نشان

دهید که:

$$A^n = B^n \iff A = B \quad (\text{الف})$$

$$A^n = \emptyset \iff A = \emptyset \quad (\text{ب})$$

۲-۲-۲ : رابطه

همانطوریکه در ابتدای این فصل گفته شد مفهوم رابطه نه تنها در اکثر شاخه‌های ریاضی بلکه در زندگی روزمره نیز به کار برده می‌شود. در این قسمت برخی از مفاهیم اصلی را در مورد رابطه معرفی می‌کنیم و در دو فصل بعدی روابط خاصی را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۲-۲-۱ : تعریف

یک رابطه (یا یک رابطه دوتایی) مجموعه‌ای از زوجهای مرتب است، یعنی مجموعه R یک رابطه است اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$\forall x (x \in R \implies \exists y \exists z (x = (y, z)))$$

اگر R یک رابطه باشد و $(x, y) \in R$ ، آنگاه می‌نویسیم xRy

۲-۲-۲ : مثال : هر یک از مجموعه‌های زیر یک رابطه است

(الف) $R = \{(a, b), (1, 2), (1, a)\}$

(ب) $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 1\}$

(ج) $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$

(د) $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge x < y\}$

(ه) $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge y = 2x\}$

۲-۲-۳ : تمرین : کدامیک از جملات زیر درست و کدامیک غلط است؟

(الف) $\emptyset$ یک رابطه است.

(ب) مجموعه $A = \{1, a, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ یک رابطه است.

(ج) مجموعه $A = \{1, (x, y), \emptyset, (a, b)\}$ یک رابطه است.

(د) مجموعه $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ یک رابطه است.