

پایان نامه

جلسه حل مسئله

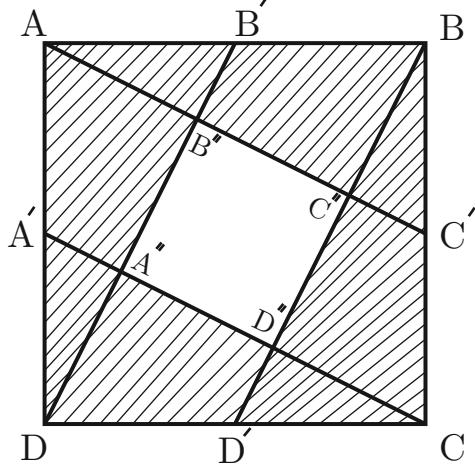
خانم: زهرا شریفی، آموزش ریاضی

استاد: دکتر ریحانه

کلاس دوم ریاضی، دبیرستان فرزانهان قرچک

تاریخ: ۹۲ / ۸ / ۲۹

مسئله : زمینی به شکل مربع به مساحت 36 m^2 مفروض است . اگر وسطهای اضلاع را به هم به صورت زیر وصل کرده وقسمتهای کناری را چمن کاری کنیم، ثابت کنید شکل باقیمانده یک مربع است ومساحت آن را بدست بیاورید .



من : بهتر است برای هماهنگی شکل را نام گذاری کنیم . حال برای اثبات باید چه حقایق را ثابت کنیم؟
پیرهادی : آیا BD' و DB' موازیند؟

من : به نظر شما آیا می توانند موازی باشند؟

دانش آموز : بله چون دو خط $AB \parallel DC$ پس $BD' \parallel DB'$ (حقیقت غلط) چون این دانش آموز BD' و DB' را فاصله بین دو خط موازی تعریف کرد .

عباسی : آیا باید ثابت کنیم زوایای داخلی 90° درجه اند ؟

به این مرحله که رسید من از دانش آموزان خواستم به این سؤال جواب دهند .

برای مربع بودن شکل داخل چه چیزهایی را باید ثابت کنیم؟

اکبرپور : باید ثابت کنیم $A''B''C''D''$ اولاً متوازی الاضلاع است .

عباسی : باید ثابت کنیم زوایا 90° درجه اند .

ساحلی : باید ثابت کنیم اضلاع مجاور در مستطیل با هم برابرند .

پس با مشخص شدن مراحل، از دانش آموزان خواستم به ترتیب این مراحل را طی کنند .

زمانی : آیا $\triangle A'B''B'$ و $\triangle B'C''C'$ می توانند هم نهشت باشند ؟

من : آیا می توانی برای هم نهشتی آنها دلیل هندسی بیاوری ؟

سلیمانی : می دانیم $BB' = 3$ و $DD' = 3$ و هر دو جزئی از ضلع مربعند پس موازیند پس طبق حقیقت : ((

اگر در یک چهار ضلعی دو ضلع روبرو هم موازی هم برابر باشند، چهار ضلعی مربع است)) می توان نتیجه

گرفت $DB' \parallel B'D$ یک متوازی الاضلاع است (راه حل کاملاً درست)

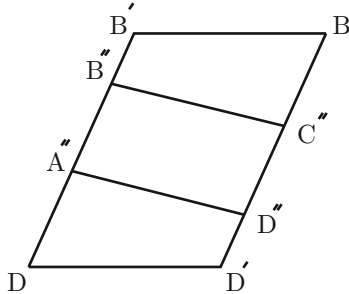
من : آفرین، از متوازی الاضلاع بودنش چه نتیجه ای می توان گرفت ؟

سلیمانی : یعنی $BD' \parallel DB'$ پس موازی بودن $A''B'' \parallel D''C''$ نتیجه می شود .

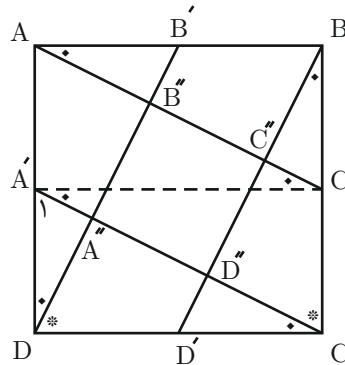
ساحلی : پس برای موازی و مساوی بودن AC' و CA' نیز می توانیم از همین روند استفاده کنیم .

پیرهادی : چون دو خط $A''B'' \parallel D''C''$ و $A'D'' \parallel B''C''$ می توانیم از قضیه خطوط موازی و مورب برابری ۴ زاویه را نتیجه بگیریم یعنی هر ۴ زاویه قائمه هستند . (حقیقت غلط)
 من : از موازی و مورب بودن بعضی از خطوط فقط می توان برابری حاده ها و برابری منفرجه ها را نتیجه گرفت .

کمالی : آیا می توان گفت چون دو خط $DB' \parallel BD'$ می باشد پس فاصله بین آنها یعنی $A''D''$ و $B''C''$ با هم برابر هستند ؟



من : شما $A''D''$ و $B''C''$ را با فاصله بین دو خط موازی اشتباه گرفته اید .
 ساحلی : من با روش زیر قائمه بودن زوایا را ثابت کردم .



از نقطه A' به C' وصل می کنیم چون هر دو وسط اضلاع AD و BC هستند به قطع $A'C' \parallel A'B$ خواهد بود همچنین $A'C' \parallel D'C$ خواهد بود. پس طبق ۳ بار متوالی استفاده از قضیه خطوط موازی و مورب داریم :
 $\hat{A} = \hat{C}$

وبه همین ترتیب $\hat{B} = \hat{D}$ ، پس می توان نتیجه گرفت : $\hat{A} = \hat{C} = \hat{B} = \hat{D}$

$$\rightarrow \hat{A} + \hat{D} + \hat{C} = 180$$

$$\hat{D} + \hat{D} = 90 \rightarrow \hat{D} = 90$$

$$\rightarrow \hat{A} + 90 = 180 \rightarrow \hat{A} = 90$$

من : شما به یک نکته بسیار ظریف دقت نکرده اید.

ساحلی، پس از مرور مسئله نتوانست اشتباهش را پیدا کند .

اختیاری : به نظر من ما می دانیم $\hat{A} = \hat{C}$ و $\hat{B} = \hat{D}$ ولی از کجا اثبات کرده ایم که :

$$\hat{A} = \hat{C} = \hat{B} = \hat{D}$$

من : آفرین . این نتیجه گیری در این جا نا به جا می باشد .

من : پس دنبال راه حل دیگری برای اثبات بگردیم .

اختیاری : می توانیم از هم نهشتی دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle BDC$ این نتیجه را ثابت کنیم :

$$\triangle ABC \text{ و } \triangle BDC \begin{cases} AB = BC \\ BC' = DC' \\ \hat{B} = \hat{C} = 90 \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle \cong \triangle \rightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{B} \\ \hat{C}' = \hat{D}' \\ AC' = BD' \end{cases}$$

من : کاملاً درست است ، پس میتوانیم به راه حل ساحلی این قسمت را اضافه کنیم یعنی با این روش می توان قائمه بودن هر ۴ زاویه را ثابت کرد .

من : پس ما در اصل ثابت کردیم $A''B''C''D''$ یک مستطیل است .

اکبرپور : اثبات مربع بودن را به صورت زیر انجام می دهیم .

$$\triangle B C' C' \text{ و } \triangle D A' A' \begin{cases} \hat{B} = \hat{D} \\ \hat{C} = \hat{A} = 90^\circ \\ BC' = DA' \end{cases} \xrightarrow{\text{وترویک زاویه}} \triangle B C' C' \cong \triangle D A' A'$$

$$\xrightarrow{\text{سایر}} \begin{cases} A'A'' = C'C'' \\ DA' = BC'' \end{cases} \quad \text{از طرفی داشتیم} \quad AC' = AC$$

$$\longrightarrow \cancel{AB''} + \cancel{BC''} + \cancel{CC'} = \cancel{AA''} + \cancel{AD''} + \cancel{DC} \quad (1)$$

$$\longrightarrow BC'' = AD'' \longrightarrow A''B''C''D'' \text{ مربع است}$$

من : اولاً شما در تساوی شماره ① AB'' را با DC'' حذف کرده اید که دلیلی برای برابری آنها بیان نکرده اید. دوماً : به نظر من این چیزی که شما اثبات کرده اید در متوازی الاضلاع بودن این شکل اثبات شده بود.

اکبرپور : اگر مثلثها را جابجا کنم فکر کنم به جواب درست برسم.

$$\triangle B D' C \text{ و } \triangle A' D C \begin{cases} BC = DC \\ \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ \\ AD = D'C \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض}} \triangle B D' C \cong \triangle A' D C \longrightarrow$$

$$\longrightarrow BD' = AC \longrightarrow \cancel{BC''} + \cancel{CD''} + \cancel{DD'} = \cancel{AA''} + \cancel{AD''} + \cancel{DC}$$

$$\longrightarrow CD'' = AD''$$

ساحلی: این نتیجه درست است ولی چیزی که اثبات را کامل می کند، اثبات هم نهشتی مثلثهای $B C' C'$ و $D' D' C$ می باشد .

خوب پس ما در سه مرحله ثابت کردیم $A''B''C''D''$ یک مربع می باشد. گام آخر بدست آوردن مساحت این مربع می باشد. دانش آموزان مشغول به حل این مسئله شدند. پس از کمی تأمل :

$$S_{BCD'} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$

اکبرپور :

$$S_{ABD'} = 9 \longrightarrow S_{BDD'B'} = 36 - 18 = 18$$

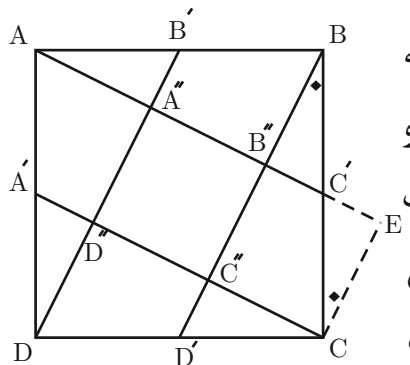
می توانیم در متوازی الاضلاع $B D' D B'$ پاره خط $B'C''$ را ارتفاع و BD' را قاعده در نظر بگیریم .

$$BD' = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$$

$$S_{BDD'B'} = B'C'' \times BD'$$

$$18 = B'C'' \times \sqrt{45} \longrightarrow B'C'' = \frac{18}{\sqrt{45}} = \frac{6 \times \cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{5}} \times \sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$\rightarrow S_{\text{B}''\text{C}''\text{D}''\text{A}''} = \left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{36}{5}$$



من : بسیار عالی است . آیا دانش آموزان راه حل دیگری ندارند ؟
 ملک حسینی : می شود با جا به جا کردن شکلها به صورت زیر به مساحت دست پیدا کرد . چون تمام مثلثهای کوچک با هم و دوزنقه ها نیز با هم ، هم نهشت هستند و هر دوزنقه در کنار یک مثلث یک مربع راتشکیل می دهد که با مربع وسط برابر است پس می توان گفت شکل به ۵ مربع برابر تقسیم شده است و مساحت برابر $\frac{36}{5}$ می باشد .

من : آیا میتوانی با دلیل هندسی بیان کنی که چرا هر مثلث و هر دوزنقه یک مربع مساوی با مربع وسط را تشکیل می دهد ؟

ملک حسینی : در شکل قبل اگر $\text{B}''\text{C}'$ را به اندازه خودش در امتداد خودش رسم کنیم و به C وصل نماییم داریم :

$$\begin{cases} \text{BC}' = \text{C}'\text{C} \\ \text{B}''\text{C}' = \text{C}'\text{E} \\ \text{C}'_1 = \text{C}'_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle \text{B}''\text{B}'\text{C}' \cong \triangle \text{C}'\text{E}\text{C} \rightarrow \begin{cases} \hat{\text{B}}'' = \hat{\text{C}}' \\ \text{B}''\text{B}' = \text{CE} \\ \hat{\text{B}}'' = \hat{\text{E}} = 90^\circ \end{cases}$$

$$\text{در } \triangle \text{B}''\text{E}\text{C}'', \hat{\text{B}}'' = \hat{\text{C}}'' = \hat{\text{E}} = 90^\circ \rightarrow \hat{\text{C}} = 90^\circ$$

$$\rightarrow \triangle \text{B}''\text{E}\text{C}'' \text{ مستطیل} \rightarrow \text{B}''\text{C}'' = \text{CE} \rightarrow \text{B}''\text{E} = \text{C}''\text{C}'$$

از طرفی میدانیم $\text{B}''\text{C}'' = \text{C}''\text{C}$ پس $\triangle \text{B}''\text{C}''\text{E}$ مربع است که یک ضلع مشترک با مربع داخل دارد پس با آن برابر است . پس مسئله حل شد .

من : چرا $\text{B}''\text{C}'' = \text{C}''\text{C}$ می باشد .

دانش آموزان نتوانستند پاسخ دهند .

من : آیا از موازی بودن $\text{D}''\text{C}'$ و $\text{D}''\text{D}$ در مثلث $\text{D}''\text{D}\text{C}$ می توان به جایی رسید ؟

اختیاری :

$$\text{D}''\text{C}' \parallel \text{D}''\text{D} \rightarrow \frac{\text{CD}'}{\text{DD}'} = \frac{\text{CC}''}{\text{C}''\text{D}''} \rightarrow \frac{\text{CC}''}{\text{C}''\text{D}''} = 1$$

$$\rightarrow \text{CC}'' = \text{C}''\text{D}'' \text{ و } \text{C}''\text{D}'' = \text{B}''\text{C}''$$

$$\rightarrow \text{B}''\text{C}'' = \text{C}''\text{C}$$

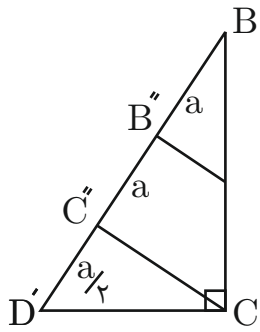
من : بسیار عالی است و این می توانند این اثبات را کامل کند .

زمانی : می توان با یک راه حل دیگر مساحت را بدست آوریم .

با توجه به راه قبلی ملک حسینی و اختیاری می توان گفت

$$BB'' = B'C''$$

از طرفی در شکل قبل با همان قضیه تالس می توان گفت



$$\text{در } \triangle CDD'' : \frac{CC''}{CD''} = \frac{CD'}{CD} = \frac{D'C''}{DD''} = \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow D'C'' = \frac{1}{2} DD'' \xrightarrow{\text{طبق همین روال}} D'C'' = \frac{1}{2} a$$

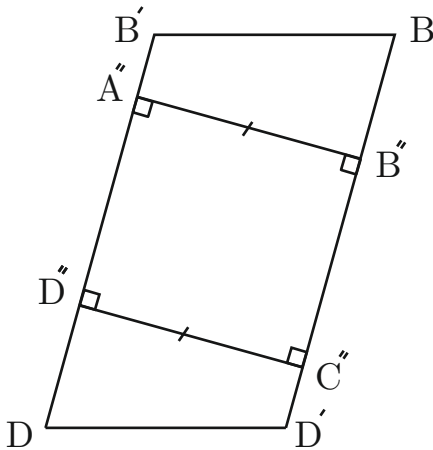
$$\longrightarrow a + a + \frac{a}{2} = \sqrt{45} \longrightarrow \frac{5a}{2} = \sqrt{45}$$

$$\longrightarrow a = \frac{2\sqrt{45}}{5} = \frac{6}{\sqrt{5}} \longrightarrow S = \frac{36}{5}$$

من : بسیار عالی با توجه به پذیرفتن حقایق که آنها را ثابت کرده ایم، کاملاً راه حل زیبایی می باشد .

راه حل چهارم : توسط خسروی بیان شد .

طبق حقایق قبل داریم :



$$AB'' = BB'' = DD'' = a$$

$$AB' = C'D' = \frac{a}{2}$$

اگر دو دوزنقه بالا را از ساق غیر قائم آن به هم بچسبانیم یک مستطیل

پدید می آید .

$$\text{مستطیل } S = \left(\frac{a}{2} + a \right) \times a = \frac{3a^2}{2}$$

$$\text{کل } S = \frac{3a^2}{2} + S_{\text{مربع}} = \frac{3a^2}{2} + a^2 = \frac{5a^2}{2}$$

$$\frac{5a^2}{2} = 18 \longrightarrow a^2 = \frac{36}{5}$$

