



دانشکده علوم پایه (رشته آموزش ریاضی)

پردیس علامه امینی تبریز (برادران)

عنوان:

مقالات منتخب از مجلات رشد آموزش ریاضی

راهبردهای تدریس برای آموزش ریاضی

دکتر یونس کریمی فردین پور

فروردین ۱۳۹۹

بسم رب الشهدا و الصديقين

# اعداد اعشاری و ریاضی مدرسه‌ای در ایران

رضا معطی، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی اراک  
سهیلا غلام آزاد، پژوهشگاه مطالعات آموزش و پرورش

## چکیده

اعداد اعشاری یکی از مباحث پایه‌ای در ریاضیات مدرسه‌ای است. این اعداد طی چندپایه کلاسی، که شروع آن دوره ابتدایی است، معرفی می‌شوند و بعد از آن، به عنوان یکی از مفاهیم و ابزارهای مفید و قابل توسعه، در سراسر برنامه مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این مقاله، ضمن مرور کوتاهی بر پیشینه اعداد اعشاری، به عملکرد دانش آموزان ایرانی در بخش اعداد اعشاری در «مطالعه تیمز»، و نیز نقش و جایگاه اعداد اعشاری در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای در ایران می‌پردازیم. در پایان، پژوهشی را که اخیراً در مورد بدفهمی‌های رایج دانش آموزان پایه سوم راهنمایی در رابطه با اعداد اعشاری انجام شده است، معرفی می‌کنیم.

**کلیدواژه‌ها:** عدد اعشاری، برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای، تیمز

امروزه، آموزش ریاضی در بسیاری از کشورها از اهمیت خاصی برخوردار است. آن چه که جوامع از آموزش ریاضی انتظار دارند، از یک طرف فراهم آوردن یک سطح قابل قبول از سواد ریاضی برای تمام دانش آموزان است، به طوری که آن‌ها را قادر سازد در زمان مقتضی، به دانش ریاضی و در صورت نیاز، به تفکر در دنیای واقعی مجهز شوند و از طرف دیگر، این سواد ریاضی، نیروی کار مورد نیاز و از لحاظ ریاضی واجد شرایط را برای جامعه فراهم آورد (آرتیگ، ۱۳۸۹). در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای، محتوا نقش بسیار اساسی دارد و یکی از موضوعات ریاضی که همواره در محتوای برنامه درسی ریاضی مطرح شده و در دوره‌های مختلف آموزشی در سطح و عمق متفاوت تدریس می‌شود، اعداد اعشاری است. اعداد اعشاری از مفاهیم پایه، در مباحث و موضوعات مختلف ریاضی است و کاربردهای فراوانی نیز در زندگی روزمره دارد. به عنوان نمونه، یکی از کاربردهای عمده این اعداد در پزشکی و تزریق داروست. در این راستا، می‌توان به گزارشی اشاره کرد که در رابطه با خطاهای پرستاران، در یکی از شبکه‌های رادیویی استرالیا<sup>۱</sup> منتشر شده است. براساس این گزارش، در یک دوره ۵ ساله، در اثر خطاهای پرستاران، حدود ۲۰۰۰ نفر به طور تصادفی کشته شده و ۱۰۰۰۰ نفر آسیب دیده‌اند که دلیل کشته شدن ۴۰۰ نفر از آن‌ها، اشتباه در برنامه تزریق دارو بوده است. این یک خطای محاسباتی مرسوم است که به گفته استینل (۲۰۰۴)، پرستاران آن را «مرگ با اعشار» نامیده‌اند.

اعداد اعشاری، نقش برجسته‌ای در ایجاد ارتباط و اتصال بین مفاهیم ریاضی دارند و همواره، یکی از موضوعات پرکاربرد در درون ریاضی بوده‌اند. برای مثال، ابداع لگاریتم بیش از همه مرهون کاربرد کسرهای اعشاری بوده است (اسمیت، ۱۹۲۵). همچنین، درک مفهوم نماد علمی، با فهم اعداد اعشاری ارتباط مستقیم دارد. به‌عنوان نمونه‌ای دیگر از کاربردهای اعداد اعشاری در تدریس مفاهیم ریاضی، می‌توان به یکی از فعالیت‌های طراحی شده توسط میسون (۱۳۸۷) اشاره کرد که در آن، با استفاده از دانش رایج یادگیرندگان در رابطه با اعداد اعشاری متناهی و نامتناهی، به مفهوم حد می‌رسد. او تأکید می‌کند که یک جنبه مهم این فعالیت آن است که یادگیرندگان، با اشیای آشنا (ارقام) دست‌ورزی می‌کنند تا اعداد را بسازند و از این طریق، درکی از ساختار اعداد به‌دست آورند. مثلاً اگر در یک بحث کلاسی، یادگیرندگان بتوانند درباره ماهیت دنباله ... و  $2/49999$  و  $2/4999$  و  $2/47$  با استدلال بحث کنند و معنای حد این دنباله را درک نمایند، آن‌گاه دامنه اعداد اعشاری آشنای خود را بسط داده‌اند و می‌توانند درکی از اعداد اعشاری به اندازه کافی بلند و نامتناهی به‌دست آورند.

مرور ادبیات حوزه آموزش ریاضی نشان می‌دهد که با وجود اهمیتی که اعداد اعشاری دارند، یادگیری آن‌ها یکی از چالش‌های عمده دانش‌آموزان در کشورهای مختلف است. بدین سبب، مطالعات بسیاری در این زمینه انجام گرفته است که از آن جمله، می‌توان به تحقیقات انجام شده در حوزه بدفهمی‌های اعداد اعشاری (استینل و استیسی<sup>۲</sup>، ۲۰۰۴)، اشتباهات بین اعداد اعشاری و کسری و منفی (استیسی و هلم<sup>۳</sup> و استینل، ۲۰۰۱) و بدفهمی‌های اعداد (ساد<sup>۴</sup>، ۲۰۰۷)، اشاره کرد. بررسی برنامه درسی سومین مطالعه بین‌المللی ریاضیات و علوم- تیمز<sup>۵</sup>- نیز نشان می‌دهد که اعداد اعشاری، یکی از موضوعات مهم در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای در تمام کشورهای شرکت‌کننده در این مطالعه است. به‌دلیل چنین جایگاهی، در سال‌های ۱۹۹۹، ۲۰۰۳ و ۲۰۱۱ که این مطالعه انجام شد در هر سال، نه سؤال، و در سال ۲۰۰۷ سه سؤال، به اعداد اعشاری اختصاص داده شده بود. نتایج سؤالات مرتبط با اعداد اعشاری این آزمون در سال ۲۰۱۱، نشان می‌دهد که نمره دانش‌آموزان ایرانی در تمام آن‌ها، کمتر از میانگین کل کشورهای شرکت‌کننده در این آزمون بوده است (تیمز ۲۰۱۱). همچنین، نتایج بررسی سؤالات تیمز ۲۰۰۳ نشان می‌دهد که میانگین عملکرد دانش‌آموزان در حوزه اعداد اعشاری برای دانش‌آموزان پایه هشتم (سوم راهنمایی)، کمتر از میانگین بین‌المللی بوده است (محمد اسماعیل ۱۳۸۴، نقل شده در غلام‌آزاد، ۱۳۹۱). جدول ۱، عملکرد دانش‌آموزان ایرانی شرکت‌کننده در تیمز ۲۰۱۱ را به تفکیک هر سؤال مربوط به اعداد اعشاری، نشان می‌دهد.

علاوه بر این، نتایج ارزشیابی پایانی برنامه درسی ریاضی دوره راهنمایی در ایران نشان می‌دهد که اهداف پیش‌بینی شده در برنامه درسی، در مبحث یادآوری اعشاری در پایه اول راهنمایی، در حد ملاک تحقق پیدا نکرده است و عملکرد معلمان در رفع بدفهمی‌های دانش‌آموزان در این مباحث، کمتر از حد ملاک بوده است (غلام‌آزاد، ۱۳۹۱). به‌عنوان نمونه، نتایج این ارزشیابی نشان می‌دهد که تنها ۴۴ درصد دانش‌آموزان پایه اول راهنمایی، حاصل ضرب  $100 \times 0/68$  را به درستی پاسخ داده‌اند و فقط ۴۱ درصد آن‌ها، توانایی مرتب‌کردن چهار عدد  $0/999$ ،  $0/9$ ،  $0/99$ ،  $0/9999$  را با ترتیب از بزرگ به کوچک دارند.

با توجه به اهمیت اعداد اعشاری در حوزه ریاضی و کاربرد آن در زندگی روزمره، هدف این مقاله، مروری اجمالی بر تاریخچه اعداد اعشاری، و بررسی جایگاه این اعداد در برنامه درسی ریاضیات مدرسه‌ای ایران است.

## پیشینه تاریخی

از اینکه اولین بار، چه کسی کسرهای اعشاری را با نماد ممیز به کار برده است، اطلاع موثقی در دست نیست، اما شواهد تاریخی نشان می‌دهد که کسرهای اعشاری از ابداعات دانشمندان

مرور ادبیات  
حوزه آموزش  
ریاضی نشان  
می‌دهد که با  
وجود اهمیتی  
که اعداد اعشاری  
دارند، یادگیری  
آن‌ها یکی از  
چالش‌های عمده  
دانش‌آموزان  
در کشورهای  
مختلف است

ایرانی- اسلامی بوده است و آن‌ها در این مورد، مانند هر ابداع مهمی، پیش از آنکه به شکل دقیقی نمایان شود، نسبت به مفهوم اعداد اعشاری، شهودی قوی داشتند. اما اسمیت (۱۹۲۵) معتقد است که جالب‌ترین فعالیت‌هایی که به این ابداع منجر شد، یکی پیدا کردن قاعده‌ای برای به‌دست آوردن  $\sqrt[n]{a \times 10^b}$  بوده که به روش امروزی، عمل استخراج ریشه آن، شبیه هر کسر اعشاری به شکل  $\frac{a \times 10^b}{10^c}$  است و دیگری، ناشی از قاعده تقسیم به عددیایی مانند  $a \times 10^b$  بوده است.

اسمیت (۱۹۲۵)، شناخت اصول کسر اعشاری را به غیاث‌الدین جمشید کاشانی نسبت می‌دهد، اما اظهار می‌کند که استیون، نخستین کسی بود که اهمیت کسر اعشاری را دریافت و تا جایی پیش رفت که اعلام کرد دولت باید استفاده از روش اعشاری را قبول و آن را تقویت کند. اسمیت این تأکید را نخستین گام در راه پیدایش «دستگاه متری» دانسته و استیون را نخستین کسی می‌داند که قاعده‌های مشخصی برای «عمل‌های اعشاری» عرضه کرده است. بالاخره، با توجه به نقش مهمی که نماد اعشار دارد، استینل (۲۰۰۶) برخی از نمادهای استفاده شده برای اعداد اعشاری را در دوره‌های مختلف زمانی، به‌صورت جدول ۲ ارائه کرده است.

### اعداد اعشاری در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای در ایران

اعداد اعشاری در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای ایران، از اهمیت خاصی برخوردار است. به‌طوری که در حال حاضر، در سه دوره آموزشی ابتدایی، راهنمایی (از این پس دوره اول متوسطه) و دبیرستان (از این پس دوره دوم متوسطه)، مطرح شده و کاربردهای آن مورد تأکید است. از طرفی، با مروری بر برنامه‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای در ایران، ملاحظه می‌شود که اعداد

جدول ۱. عملکرد دانش‌آموزان ایرانی شرکت‌کننده در تیمز ۲۰۱۱ به تفکیک هر سؤال مربوط به اعداد اعشاری

| شماره سؤال      | درصد درست | نمونه سؤال                         | موضوع                          | درصد میانگین بین‌المللی |
|-----------------|-----------|------------------------------------|--------------------------------|-------------------------|
| M01_01(M032166) | ۳۹        | $\frac{(21/7 \times 3/86)}{10/09}$ | تخمین                          | ۵۷                      |
| M02_01(M052216) | ۳۸        | $\frac{3}{5}$                      | تبدیل کسر به اعشار             | ۶۸                      |
| M02_02(M052231) | ۴۲        | ۴۲/۶۵+۵/۷۴۸                        | عملیات (جمع)                   | ۷۲                      |
| M03_01(M042032) | ۵۸        | ۰/۱۲۵                              | تبدیل اعشار به کسر             | ۷۰                      |
| M05_01(M032094) | ۵۰        | $\frac{4}{100} + \frac{3}{1000}$   | تبدیل کسر به اعشار و جمع       | ۶۲                      |
| M05_02(M032662) | ۲۳        | به پیوست الف-۱ مراجعه شود          | نمایش عدد روی محور (تخمین عدد) | ۱۶                      |
| M05_07(M032324) | ۳۰        | به پیوست الف-۲ مراجعه شود          | فاصله بین دو نقطه و حل مسئله   | ۳۹                      |
| M06_02(M042024) | ۲۲        | به پیوست الف-۳ مراجعه شود          | نمایش اعداد روی محور           | ۵۴                      |
| M07_02(M032725) | ۵         | $\frac{35}{6}$                     | تبدیل کسر به اعشار             | ۲۵                      |

با توجه به  
اینکه کتاب  
درسی در ایران  
نقش محوری  
دارد و به نوعی  
کتاب درسی  
مظهر برنامه  
درسی است،  
این باور قوی  
وجود دارد که  
برای بررسی  
برنامه، می توان  
کتاب های  
درسی را  
مطالعه کرد و  
همه مشکلات  
ریاضیات  
مدرسه ای،  
می تواند  
توسط یک  
کتاب درسی  
خوب اصلاح  
شود

جدول ۲. برخی نمادهای استفاده شده برای اعداد اعشاری  
در دوره های مختلف زمانی

| نویسنده                          | تاریخ | نماد                                                 |
|----------------------------------|-------|------------------------------------------------------|
| قبل از سیمون استیون <sup>۶</sup> |       | $\frac{245}{37} \frac{1000}{}$                       |
| سیمون استیون                     | ۱۵۸۵  | $\frac{245}{37} \frac{4^{(2)} 5^{(3)}}{2^{(1)}}$     |
| فرانسسکیوز وی ات <sup>۷</sup>    | ۱۶۰۰  | $\frac{245}{37} \frac{245}{1000}$                    |
| جان کیلر <sup>۸</sup>            | ۱۶۱۶  | $\frac{245}{37}$                                     |
| جان نیپر <sup>۹</sup>            | ۱۶۱۷  | $\frac{245}{37} \frac{4^{(2)} 5^{(3)}}{2^{(1)}}$     |
| هنری بریگز <sup>۱۰</sup>         | ۱۶۲۴  | $\frac{245}{37}$                                     |
| ویلیام اوقارد <sup>۱۱</sup>      | ۱۶۳۱  | $\frac{245}{37}$                                     |
| بالام <sup>۱۲</sup>              | ۱۶۵۳  | $\frac{245}{37}$                                     |
| ازانام <sup>۱۳</sup>             | ۱۶۹۱  | $\frac{245}{37} \frac{2}{4} \frac{5^{(3)}}{2^{(1)}}$ |
| مدرن یا امروزی                   |       | $\frac{245}{37}$                                     |

اعشاری از جمله موضوعاتی هستند که همیشه در آموزش حساب مدرسه ای، حضور داشته اند. در برنامه درسی ایران، آموزش اعداد اعشاری، همواره از سال های آخر دوره ابتدایی شروع می شود و در سال های اول متوسطه به پایان می رسد. اما مهارت کار با اعداد اعشاری، نه تنها در دوران تحصیل بلکه در زندگی روزانه هر شهروند، از جمله مهارت های ضروری به حساب می آید. با توجه به اینکه کتاب درسی در ایران نقش محوری دارد و به نوعی کتاب درسی مظهر برنامه درسی است، این باور قوی وجود دارد که برای بررسی برنامه، می توان کتاب های درسی را مطالعه کرد و همه مشکلات ریاضیات مدرسه ای، می تواند توسط یک کتاب درسی خوب اصلاح شود. در همین راستا و برای بررسی برنامه درسی ریاضی در ایران، عصارزادگان (۱۳۹۰) در پژوهش خود، به بررسی سیر تحول کتاب های درسی ریاضی مدرسه ای در دوره آموزش عمومی پرداخته است. نتایج به دست آمده از این پژوهش، گواه حضور دائم اعداد اعشاری در برنامه های آموزشی ریاضی مدرسه ای در ایران و شروع آموزش آن ها از سال های آخر دوره ابتدایی است. در جدول ۳، مباحث مرتبط با اعداد اعشاری که در کتاب های درسی موجود از سال ۱۳۰۲ وجود داشته، به طور خلاصه دسته بندی شده است.

## برنامه درسی ریاضی مدرسه ای جاری در ایران

در حال حاضر، در برنامه درسی ریاضی مدرسه ای، مبحث اعداد اعشاری در کتاب های درسی دوره های مختلف ابتدایی، راهنمایی (پایه های ششم، هفتم و سوم راهنمایی) و متوسطه، به قرار زیر مطرح شده است.

**کتاب ریاضی پایه پنجم ابتدایی:** اعداد اعشاری در کتاب پایه پنجم ابتدایی، با عنوان کسر اعشاری به طور رسمی وارد برنامه درسی می شود. در ابتدا، برای آشنایی دانش آموزان با اعداد اعشاری، از بلوک های رنگ آمیزی شده استفاده شده و کسرها در جدول های ارزش مکانی با ارزش اعشاری دهم و صدم وارد شده است. بعد از آموزش جدول ارزش مکانی اعداد، نمایش اعشاری این اعداد به همراه «نماد ممیز»، با عنوان «عدد اعشاری» معرفی می شود. سپس دانش آموزان، خواندن و نوشتن

اعداد اعشاری، مقایسه اعداد اعشاری و جمع و تفریق با اعداد اعشاری را یاد می گیرند. در ادامه، دانش آموزان با نمایش اعداد اعشاری بیشتر از ۱، به صورت کسری و تبدیل کسر متعارفی به کسر اعشاری (فقط با مخرج های ضرایب ۱۰) و برعکس، آشنا می شوند. بعد از این، ابتدا ضرب عدد صحیح (حسابی) در عدد اعشاری و عدد اعشاری در عدد صحیح و پس از آن، ضرب دو عدد اعشاری در یکدیگر آموزش داده می شود. در قسمت های دیگر کتاب ریاضی پایه پنجم نیز، به کاربردهای اعداد اعشاری از جمله تبدیلات طولی (متر و سانتی متر و میلی متر) و وزن (کیلوگرم و گرم)، اشاره شده است.

**کتاب ریاضی پایه ششم ابتدایی:** در کتاب ششم ابتدایی، نخست اعداد اعشاری با استفاده از بلوک ها و محور نمایش داده شده است. سپس با عنوان «فعالیت» از دانش آموزان خواسته شده جمع و تفریق اعداد اعشاری را به دو صورت بلوک و محور انجام دهند و در ادامه، به چهار روش جمع اعداد اعشاری آمده است.

جدول ۳. مباحث مرتبط با اعداد اعشاری در کتاب‌های درسی ریاضی ایران از سال ۱۳۰۲ تا سال ۱۳۵۹

| پایه  | دوره          | سال شمسی | عنوان ماده (مواد) درسی مرتبط با ریاضی | برنامه تفصیلی اعداد اعشاری                                                                                                                                                                                                                        |
|-------|---------------|----------|---------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| چهارم | ابتدایی       | ۱۳۰۲     | حساب، هندسه، سیاق، رسم                | چهار عمل اعشار                                                                                                                                                                                                                                    |
| چهارم | ابتدایی       | ۱۳۰۳     | حساب، هندسه، سیاق، رسم                | چهار عمل اعشار                                                                                                                                                                                                                                    |
| پنجم  | ابتدایی       | ۱۳۰۳     | حساب، هندسه، سیاق، رسم                | تحويل کسر متعارفی به اعشاری بدون ذکر تناوب و اقسام آن                                                                                                                                                                                             |
| چهارم | ابتدایی نسوان | ۱۳۰۳     | حساب، رسم، سیاق                       | چهار عمل اعشار                                                                                                                                                                                                                                    |
| پنجم  | ابتدایی نسوان | ۱۳۰۳     | حساب، هندسه، سیاق، رسم                | مراجعة چهار عمل اصلی در اعداد صحیح و اعشار، تحويل کسر متعارفی به اعشاری بدون ذکر تناوب و اقسام آن                                                                                                                                                 |
| چهارم | ابتدایی       | ۱۳۱۶     | (ریاضیات) حساب و هندسه                | چهار عمل اصلی در اعشار                                                                                                                                                                                                                            |
| پنجم  | ابتدایی       | ۱۳۱۶     | (ریاضیات) حساب و هندسه                | اجرای چهار عمل اصلی در تحويل کسر متعارفی به اعشاری بدون ذکر تناوب و اقسام آن                                                                                                                                                                      |
| چهارم | ابتدایی       | ۱۳۱۹     | ریاضیات                               | تعریف برخه (کسر) ددهی و اجرای چهار عمل اصلی در برخه‌های ددهی                                                                                                                                                                                      |
| پنجم  | ابتدایی       | ۱۳۱۹     | ریاضیات                               | برخه ددهی بدون ذکر تناوب و اقسام آن                                                                                                                                                                                                               |
| چهارم | دبستان        | ۱۳۲۸     | حساب و هندسه                          | کسر اعشار و چهار عمل اصلی در اعشار                                                                                                                                                                                                                |
| پنجم  | دبستان        | ۱۳۲۸     | حساب و هندسه                          | تحويل کسر متعارفی به اعشاری بدون ذکر تناوب و اقسام آن                                                                                                                                                                                             |
| سوم   | ابتدایی       | ۱۳۴۲     | حساب و هندسه                          | نوشتن نیم به صورت $\frac{1}{2}$ و خواندن آن. کسر اعشار تا مرتبه دهم (یک رقم بعد از ممیز) ضرب عدد صحیح دو عدد اعشاری که فقط یک رقم بعد از ممیز داشته باشد. طرز نوشتن ده‌شاهی به صورت ریال؛ مثلاً نوشتن ۲ ریال و ۱۰ شاهی به صورت $\frac{2}{5}$ ریال |
| چهارم | ابتدایی       | ۱۳۴۲     | حساب و هندسه                          | معرفی کسر اعشار تا سه رقم بعد از ممیز، چهار عمل اصلی درباره اعداد اعشاری                                                                                                                                                                          |
| پنجم  | ابتدایی       | ۱۳۴۲     | حساب و هندسه                          | تکرار قانون‌های دستگاه شمار ددهی (ده‌تایی)، دسته‌بندی کردن و ارزش مکانی ضرب اعداد اعشاری در هم، تقسیم اعداد اعشاری بر هم                                                                                                                          |
| چهارم | ابتدایی       | ۱۳۵۹     | حساب و هندسه                          | معرفی کسر اعشار تا دو رقم بعد از ممیز، جمع و تفریق کسرهای اعشاری، ضرب عدد اعشاری در یک عدد صحیح، تقسیم اعداد اعشاری بر عدد صحیح                                                                                                                   |
| چهارم | ابتدایی       | ۱۳۶۴     | ریاضی                                 | کسر اعشاری و چهار عمل اصلی در کسرهای اعشاری                                                                                                                                                                                                       |
| پنجم  | ابتدایی       | ۱۳۶۴     | ریاضی                                 | کسر اعشاری و ادامه و تکمیل چهار عمل اصلی در کسرهای اعشاری                                                                                                                                                                                         |
| اول   | راهنمایی      | ۱۳۴۶     | ریاضی                                 | تبدیل عدد مرکب به عدد کسری اعشاری و برعکس. مراجعه مختصر به چهار عمل اصلی درباره اعداد اعشاری                                                                                                                                                      |
| سوم   | راهنمایی      | ۱۳۵۹     | ریاضی                                 | کسر اعشاری متناوب و تبدیل آن‌ها به کسر متعارفی                                                                                                                                                                                                    |

بعد از آن، به ضرب اعداد اعشاری به کمک بلوک‌ها پرداخته شده است. بعداً، درس تقسیم اعشاری، در دو قسمت، مطرح شده و تقسیم عدد اعشاری بر عدد طبیعی، با استفاده از بلوک‌ها، و تقسیم عدد طبیعی بر عدد اعشاری، با استفاده از محور، معرفی گردیده است. در قسمت‌های دیگر این کتاب، به‌عنوان کاربردهای اعداد اعشاری، به تبدیل‌های طولی (متر و سانتی‌متر و غیره)، و تقریب‌های اعداد اعشاری «گرد کردن» و «قطع کردن» با اندازه‌های  $0/1$  و  $0/01$  پرداخته شده است. همچنین، تقریب اعداد اعشاری و نمایش آن‌ها روی محور، در بخشی از کتاب آمده است.

**کتاب ریاضی پایه هفتم (پایه اول متوسطه):** در این پایه، بخشی تحت عنوان «نمایش اعشاری و اعداد اعشاری» آمده است و در آن، نمایش اعداد اعشاری با استفاده از ارزش مکانی و نماد ممیز، ارائه شده است. بعد از آن، جمع و ضرب اعداد اعشاری آمده ولی به‌عمل تفریق و تقسیم این اعداد اشاره‌ای نشده است. تنها در چند تمرین، انجام عمل تفریق و تقسیم اعشاری و تخمین مقدار آن‌ها بدون انجام عملیات، از دانش‌آموزان خواسته شده است.

### جمع‌بندی

در این مقاله، ابتدا به بیان نقش تاریخی اعداد اعشاری و بعد جایگاه آن در کتاب‌های درسی ریاضی در آموزش عمومی و بالاخره چگونگی حضور اعداد اعشاری در پایه‌های پنجم، ششم و هفتم در کتاب‌های ریاضی فعلی در ایران پرداخته شد. در همین زمینه، پژوهشی توسط معطی (۱۳۹۲) انجام شده است که در آن، مشکلات دانش‌آموزان پایه سوم راهنمایی در ارتباط با اعداد اعشاری مورد بررسی قرار گرفته است. در این پژوهش، مشکلات دانش‌آموزان در ارتباط با اعداد اعشاری در پایه‌های مختلف تحصیلی، در هشت زمینه به شرح زیر مقوله‌بندی شده و بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان در هر یک از آن زمینه‌ها، شناسایی شده است:

- مقایسه اعداد
  - عملیات
  - چگال بودن اعداد اعشاری
  - جایگاه صفر
  - ارزش مکانی
  - نماد اعشاری و خواندن و نوشتن
  - تبدیل اعشار به کسر و برعکس
  - کاربرد اعداد اعشاری (تقریب، تبدیل واحد، اندازه‌گیری و حل مسئله).
- یافته‌های این تحقیق، برای برنامه‌ریزان درسی و معلمان، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و انتظار می‌رود که در مقاله مستقلی، به آن‌ها پرداخته شود.

### پی‌نوشت‌ها

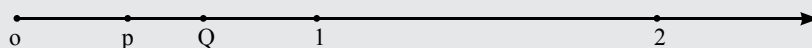
1. Australian Broadcasting Corporation [Radio National, July 8th, 2001, conducted by Chris Bullock]
  2. Stacey
  3. Helme
  4. Sadi
  5. Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)
- ایران نخستین بار در سال ۱۹۹۵ در این آزمون و سپس در سال‌های ۲۰۰۳ و ۲۰۰۷ در تکرارهای آن شرکت کرده است. لازم به ذکر است که اکنون (TIMSS) به‌عنوان مخفف عبارت زیر به کار می‌رود.
- Trends in International Mathematics and Science Study
6. Simon Stevin
  7. Franciscus Viete
  8. John Kepler
  9. John Napier
  10. Henry Briggs
  11. William Oughtred
  12. Balam
  13. Ozanam

امروزه، آموزش ریاضی در بسیاری از کشورها از اهمیت خاصی برخوردار است. آن‌چه که جوامع از آموزش ریاضی انتظار دارند، از یک طرف فراهم آوردن یک سطح قابل قبول از سواد ریاضی برای تمام دانش‌آموزان است، به‌طوری که آن‌ها را قادر سازد در زمان مقتضی، به دانش ریاضی و در صورت نیاز، به تفکر در دنیای واقعی مجهز شوند و از طرف دیگر، این سواد ریاضی، نیروی کار مورد نیاز و از لحاظ ریاضی واجد شرایط را برای جامعه فراهم آورد

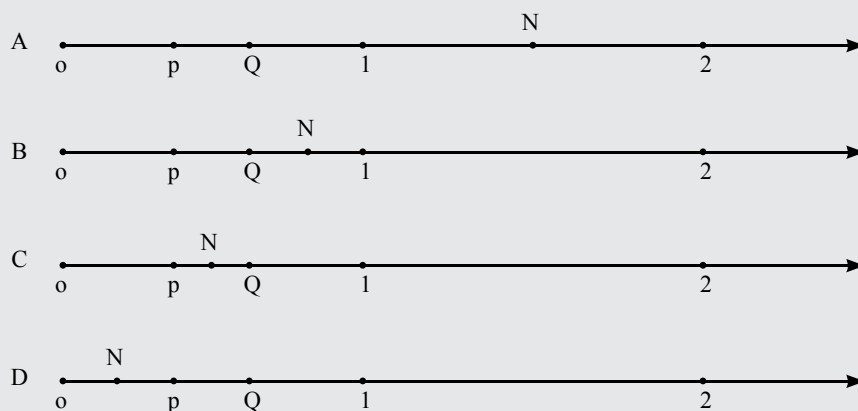
## منابع

۱. آرتیک، میشل وکیل پاتریک، جرمی. (۲۰۰۸). *چه می‌دانیم و چگونه می‌دانیم*. مجله رشد آموزش ریاضی، ترجمه فاطمه اصل‌مرز (۱۳۸۹). شماره ۱۰۰، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۲. اسمیت، دیوید. (۱۹۲۵). *تاریخ ریاضیات*، ترجمه غلامحسین صدری افشاری (۱۳۷۳). چاپ علامه طباطبائی. جلد دوم، چاپ اول.
۳. بابلیان، اسمعیل و دیبائی، محمد تقی. (۱۳۸۷). *ریاضی پنجم دبستان*. اداره کل چاپ و توزیع کتاب‌های درسی.
۴. بخشعلی‌زاده، شهرناز و همکاران. (۱۳۹۱). *ریاضیات سال اول دبیرستان*. اداره کل چاپ و توزیع کتاب‌های درسی.
۵. برگن، جی. ال. (۲۰۰۴). *گوشه‌هایی از ریاضیات دوره اسلامی*. ترجمه محمدقاسم وحیدی اصل و علیرضا جمالی (۱۳۷۴). انتشارات فاطمی. چاپ دوم.
۶. داودی، خسرو؛ رستگار، آرش؛ شاهورانی، احمد و عالمیان، وحید. (۱۳۹۱). *ریاضی ششم دبستان*. اداره کل چاپ و توزیع کتاب‌های درسی.
۷. عصارزادگان، نرگس. (۱۳۹۰). *مطالعه سیر تحول کتاب‌های ریاضی مدرسه‌ای ایران (دوره ابتدایی و راهنمایی) از آغاز آموزش رسمی تاکنون و شناسایی عوامل مؤثر بر تحول*. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. پژوهشکده برنامه‌ریزی درسی و نوآوری گروه ریاضی. وزارت آموزش و پرورش.
۸. غلام آزاد، سهیلا. (۱۳۹۱). *ارزشیابی پایانی از برنامه درسی ریاضی دوره راهنمایی تحصیلی*. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.
۹. معطی، رضا. (۱۳۹۲). *شناسایی بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان دوره راهنمایی تحصیلی در زمینه اعداد اعشاری*. پایان‌نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی. دانشکده علوم ریاضی. دانشگاه شهید بهشتی.
۱۰. میسون، جان. (۱۳۸۶). *استفاده از ساختارهای نظری برای تدریس آگاهانه*. ترجمه: سپیده چمن‌آرا (۱۳۸۷). مجله رشد آموزش ریاضی. شماره ۹۳. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.
11. Foy, p. Arora, A. & Stanco, G. M. (2013). TIMSS 2011 User Guide for the International Database. International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). <http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/international-released-items.html>
12. Foy, p. & Olsan, J. F. (2009). TIMSS 2007 User Guide for the International Database. International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). <http://timss.bc.edu/TIMSS2007/items.html>
13. Sadi, Amar. (2007). Misconceptions in numbers. *UGRU Journal*: vol. 5, Fall 2007.
14. Stacey, K., Helme, S., & Steinle, V. (2001). Confusions between decimals, fractions and negative numbers: A consequence of the mirror as a conceptual metaphor in three different ways. In M. V. D. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 217-224). Utrecht: PME.
15. Steinle, V. & Stacey, K. (2004). Persistence of decimal misconceptions and readiness to move to Expertise. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (PME28), Bergen, Norway. vol 4, pp 225-232.
16. Steinle, V. (2004). Changes with age in students' misconceptions of decimal numbers. Unpublished PhD dissertation. University of Melbourne, Melbourne.
17. Steinle, V. (2006). <http://extranet.education.unimelb.edu.au/DSME/decimals/slimversion/backinfo/metric.html>
18. Third International Mathematics and Science Study at the Eighth Grade. Retrieved, 2013, from the World Wide Web: <http://timss.bc.edu/timss2003i/released.html>
19. TIMSS-R. IEA's Repeat of the Third International Mathematics and Science Study at the Eighth Grade. Retrieved, 2013, from the World Wide Web: [http://timss.bc.edu/timss1999i/pdf/t99math\\_items.pdf](http://timss.bc.edu/timss1999i/pdf/t99math_items.pdf)

## پیوست الف - ۱



نقاط  $P, Q$  نشان دهنده دو کسر روی محور هستند که  $P \times Q = N$ . کدامیک از گزینه‌های زیر نمایش مکان  $N$  در محور اعداد می‌باشد؟



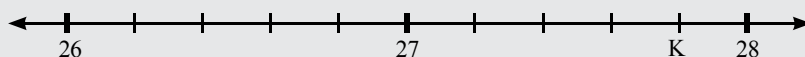
## پیوست الف - ۲

نقاط  $A, B, C$  روی یک خط قرار دارند و  $B$  بین  $A$  و  $C$  قرار دارد. اگر  $AB = 10 \text{ cm}$  و  $BC = 5 \frac{1}{2} \text{ cm}$  باشند فاصله میانه  $AB, BC$  چند سانتی‌متر است.

- |                    |                  |
|--------------------|------------------|
| الف) $\frac{2}{4}$ | ب) $\frac{2}{6}$ |
| ج) $\frac{5}{10}$  | د) $\frac{7}{6}$ |

## پیوست الف - ۳

نقطه  $K$  چه عددی را نشان می‌دهد؟



- |                     |                   |
|---------------------|-------------------|
| الف) $\frac{27}{4}$ | ب) $\frac{27}{8}$ |
| ج) $\frac{27}{9}$   | د) $\frac{28}{2}$ |

# ردپای مبهم اعداد گنگ

## در ذهن دانش آموزان

بهناز ساویزی، دکترای ریاضی و دبیر ریاضی تهران  
احمد شاهورانی سمنانی، دکترای آموزش ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

**کلیدواژه‌ها:** اعداد گنگ، مجموعه اعداد حقیقی، بازنمایی اعداد گنگ، محور اعداد، برنامه درسی متوسطه

برنامه درسی ریاضیات در کشور ما، عمدتاً مبتنی بر توسعه مفاهیم و روابط مرتبط با مجموعه اعداد حقیقی شکل گرفته است. مفاهیم مربوط به مجموعه اعداد حقیقی، با معرفی اعداد حسابی و طبیعی و روابط بین آن‌ها در این برنامه، از دبستان آغاز می‌شود و با ورود تدریجی اعداد گویا، صحیح و گنگ تا دوره‌های راهنمایی و دبیرستان گسترش می‌یابد. شواهد گوناگون نشان می‌دهد که برای دانش‌آموزان دشواری‌ها، ابهامات و بدفهمی‌هایی برای طی آخرین پله، یعنی وارد شدن به اعداد گنگ و عبور از مفهوم عدد گویا به عدد حقیقی، وجود دارد. هدف این نوشتار بررسی این دشواری‌ها و بدفهمی‌هاست. ما به عنوان معلم و محقق، بارها شاهد بوده‌ایم که در انتهای حل یک مسئله که پاسخ آن یک عدد گنگ بوده است، دانش‌آموزان پرسیده‌اند: «آیا باید جای  $\pi$  عدد بگذاریم؟» یا «آیا باید مقدار  $\sqrt{2} + 3$  را حساب کنیم؟». چنین مشاهداتی این پرسش را به ذهن متبادر می‌سازد که آیا دانش‌آموزان اساساً کمیت‌های گنگ را، همچون دیگر انواع اعداد، درک می‌کنند و به رسمیت می‌شناسند؟ آیا این گونه کمیت‌ها از نظر آن‌ها واقعاً عدد است؟ اگر هست، چرا به دنبال جایگزینی مقدار دیگری به جای اعداد گنگ هستند و اگر نیست دلیل آن چیست؟ جهت روشن شدن این موضوع بود که تحقیق حاضر در سال تحصیلی ۹۰-۹۱ انجام گرفت (سلاویزی، ۱۳۹۱). گروه مورد مطالعه، دانش‌آموزان

دختر پایه دوم نظری در یکی از مدارس دخترانه یکی از ناحیه‌های آموزشی تهران بودند. در اینجا بدون پرداختن به جزئیات تحقیق تنها نتایج بیان می‌شوند. به‌طور کلی می‌توان علل برخی از بدفهمی دانش‌آموزان از اعداد گنگ را به شرح زیر خلاصه نمود:

۱. روش بازنمایی اعداد گنگ، جایگزینی تقریب‌های اعشاری؛

۲. رویکرد نامنسجم و گاه مبهم کتب درسی در معرفی اعداد گنگ؛

۳. شکل گسترده بازنمایی اعداد گنگ مربعی؛

۴. غلبه جنبه فرایندی و عملیاتی بر جنبه ساختاری<sup>۱</sup> و شیء‌گونی<sup>۲</sup> (عینی) اعداد گنگ در ذهن دانش‌آموزان؛

۵. عدم درک و برداشت مناسب از کارکرد محور اعداد به عنوان مدلی که اعداد را از فضای مجموعه‌ها و حساب به فضای اندازه‌ها و هندسه منتقل و مرتبط می‌سازد.

البته برخی موارد فوق از ارتباط علت و معلولی برخوردار بوده و برخی نیز با یکدیگر هم‌پوشانی دارند. در ادامه به شرح هر یک پرداخته خواهد شد.

در بخشی از تحقیق صورت گرفته، دو پرسش از دانش‌آموزان، به قرار زیر مطرح شد:

۱. برداشت شما از عدد گنگ چیست؟

۲. هر یک از اعداد  $\sqrt{2} + 1$ ،  $\sqrt{2}$ ،  $3\sqrt{2}$  و  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$

را روی محور اعداد نشان دهید.

در پاسخ به پرسش اول، دانش‌آموزان تعریف‌های خودساخته‌شان را از اعداد گنگ بیان نموده بودند. در

واقع، با گذشت بیش از یک سال از آشنایی آن‌ها با اعداد گنگ، تعریف‌های رسمی و دانش الگوریتمی آن‌ها در رابطه با اعداد گنگ فراموش شده بود و آنچه بیان کرده بودند، نمایان‌گر برداشت و ادراک شخصی ایشان از موضوع بود که در ذهنشان ته‌نشین شده و باقی مانده بود. پاسخ‌ها به پرسش اول با نرم‌افزار تحلیل متن Maxqda10 تحلیل و کدگذاری شد. سه کد استخراج شده شامل «عملیات»، «بازنمایی» و «تعلق» بود.

برخی دانش‌آموزان عدد گنگ را عددی با بخش اعشاری نامتناهی و برخی نیز آن را عددی تعریف کرده بودند که بازنمایی به صورت کسر متعارفی ندارد. برچسب یا کد «بازنمایی» به این‌گونه تعریف‌های خودساخته دانش‌آموزان تعلق گرفت. برخی دانش‌آموزان بیان کرده بودند که اعداد گنگ، اعدادی هستند که جذر کامل ندارند یا اعدادی هستند که بین آن‌ها عملیات حسابی، مثل جمع یا تفریق، انجام نمی‌شود (مثل  $\sqrt{k} + \sqrt{k}$ ). تأکید بر عمل جذرگیری یا جمع و تفریق معیاری بود تا این تعریف‌ها با کد «عملیات» مشخص شوند؛ و بالاخره تعریف‌هایی از قبیل اینکه اعداد گنگ «اعداد مشخص و کاملی نیستند»، «اعدادی نامفهوم و نادقیق‌اند»، «عدد حقیقی‌اند» و «عدد حقیقی نیستند» در کد «تعلق» جای گرفتند. منظور از این کد، تعلق داشتن یا نداشتن عدد گنگ به یک مجموعه مشخص در ذهن دانش‌آموزان بود. بیشترین اظهارات دانش‌آموزان در کد «عملیات» جای گرفت که خود نشان از دیدگاه فرآیندی و عملیاتی ایشان دارد.

## روش بازنمایی اعداد گنگ: جایگزینی تقریب‌های اعشاری

یکی از دلایل بدفهمی دانش‌آموزان، جایگزینی غیرضروری تقریب‌های اعشاری اعداد گنگ تشخیص داده شد. نتیجه بررسی‌ها نشان داد که بسیاری از دانش‌آموزان، عبارت‌های  $1 + \sqrt{2}$ ،  $3\sqrt{2} + \sqrt{2}$  و  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$  را با بازنمایی اعشاری روی محور اعداد نمایش داده بودند. البته تعداد افرادی که عبارت  $1 + \sqrt{2}$  را با روش هندسی روی محور نشان داده بودند، بیشتر از دیگر موارد بود و این شاید به دلیل بیشتر بودن تعداد تمرین‌های کتاب آن‌ها برای نمایش اعدادی به شکل  $k + \sqrt{k}$  باشد. تعداد زیادی از دانش‌آموزانی که اعداد گنگ را با بازنمایی اعشاری تعریف کرده بودند، برای یافتن مکان عبارت روی محور اعداد، از بازنمایی اعشاری استفاده نموده بودند. این دسته از دانش‌آموزان اعداد گنگ را اعدادی مبهم، نامعلوم، نادقیق و ناکامل دانسته و مکان آن‌ها را روی محور اعداد، تقریبی معرفی کرده بودند. به نظر می‌رسد بین بازنمایی اعشاری اعداد گنگ و بدفهمی ذکر شده ارتباط مستقیمی وجود دارد. یعنی جایگزینی تقریب‌های اعشاری توسط دانش‌آموزان، اغلب اوقات حس ناکامل بودن، نادقیق بودن و نامعلوم بودن اعداد گنگ را به ذهن ایشان متبادر می‌سازد. در اینجا به نظر می‌رسد دانش‌آموزان انعطاف لازم را در ایجاد ارتباط بین بازنمایی‌های مختلف عدد ندارند و ساخت هندسی «اعداد گنگ مربعی» به کمک رابطه فیثاغورس، که در سال اول دبیرستان آموخته‌اند، بیشتر دانشی است الگوریتمی، معمولی و غیرمرتبط با یافتن نقاط متناظر با اعداد گنگ روی محور اعداد.

شواهد  
گوناگون  
نشان می‌دهد  
که برای  
دانش‌آموزان  
دشواری‌ها،  
ابهامات و  
بدفهمی‌هایی  
برای طی  
آخرین پله،  
یعنی وارد  
شدن به  
اعداد گنگ  
و عبور از  
مفهوم عدد  
گویا به عدد  
حقیقی،  
وجود دارد

## رویکرد کتاب درسی

کتاب‌های درسی نیز در ایجاد بدفهمی‌های مرتبط با اعداد گنگ بی‌تأثیر نیستند. اینکه دانش‌آموز مفهوم عدد گنگ را به مفهوم عدد گویا تقلیل داده و از آن به‌عنوان یک عدد گویای نادقیق و تقریبی یاد می‌کند بی‌ارتباط با نحوه آموزش کتاب درسی او نیست. در کتاب ریاضیات (۱) دبیرستان، اعداد گنگ در بخشی با عنوان اعداد حقیقی مطرح شده‌اند. در آنجا بیان شده است که روی محور اعداد حقیقی، نقاطی وجود دارند که متعلق به هیچ یک از اعداد گویا نیستند، بلکه این نقاط مربوط به اعداد گنگ هستند. در ادامه هم بیان شده است: «با استفاده از نماد  $\sqrt{\quad}$  که به‌معنای جذرگیری است، اعداد گنگ بسیاری را می‌توان معرفی نمود.» در هیچ کجای کتاب بیان نشده (و مثالی نیز آورده نشده) که عدد گنگ، عددی است که نتوان آن را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح<sup>۳</sup> (با مخرج غیر صفر) یا یک کسر تحویل‌ناپذیر نوشت. در ضمن، توضیح در مورد کاربرد جذرگیری رادیکال، تفکر فرایندی و عملیاتی را تقویت می‌کند. وجود این نگاه در مؤلفان کتاب ریاضیات (۱) در رابطه با اعداد گنگ مربعی و نماد رادیکال، می‌تواند نشان از نگاه و تفکر فرایندی این مؤلفان داشته باشد و این‌گونه توضیحات، کمکی در جهت ایجاد یک شیء مستقل ذهنی از اعداد گنگ نمی‌نماید.

در بخش تقریب‌های اعشاری صفحه ۱۸ کتاب ریاضیات (۱)، چهار عدد و تقریب‌های اعشاری آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. احتمالاً منظور مؤلفان از این قسمت بیان این مطلب بوده که «همواره دنباله‌ای از اعداد گویا وجود دارد که به یک عدد گویا یا گنگ همگراست و بالطبع، معرف آن عدد می‌باشد». ولی نحوه بیان مطلب بسیار ابهام‌برانگیز است، به‌گونه‌ای که به نظر نمی‌رسد خواننده متن بتواند تمایزی بین اعداد گنگ و گویا قائل شود. در ابتدا بیان شده « $\frac{1}{4}$  به  $\sqrt{2}$  نزدیک است،  $\frac{1}{41}$  نزدیک‌تر و  $\frac{1}{414}$  به  $\sqrt{2}$  بیشتر نزدیک است. این اعداد اعشاری را تقریب‌های اعشاری  $\sqrt{2}$  می‌نامند. برای هر عدد حقیقی می‌توان از این تقریب‌های اعشاری یافت و هرچه عدد اعشاری به عدد حقیقی نزدیک‌تر باشد، دقت تقریب بالاتر است.» در ادامه مطلب آمده « $\frac{1}{3}$  برابر هیچ عدد

اعشاری نیست ولی می‌توانیم تقریب‌های اعشاری آن را به‌دست آوریم.  $\frac{1}{3}$  با دقت یک رقم اعشاری برابر است با  $\frac{0}{3}$  و با دقت دو رقم اعشار برابر است با  $\frac{0}{33}$  و با دقت سه رقم اعشار برابر است با  $\frac{0}{333}$ . دقت این تقریب‌ها را هر چقدر بخواهیم، می‌توانیم بالا ببریم».

بیان مطالب فوق به‌گونه‌ای است که هیچ تمایزی بین عدد گنگ و عدد گویا ایجاد نمی‌کند. به‌نظر می‌رسد مؤلف یا مؤلفان این بخش، به ساختار یک دنباله نامتناهی همگرا به یک عدد حقیقی و نیز مفهوم حد در بی‌نهایت توجهی ننموده‌اند. اینکه  $\sqrt{2}$  را با یک نگاه کل‌نگرانه، حد یا جمع‌بندی نهایی یک دنباله نامتناهی از اعداد گویا تلقی کنیم که بازنمایی اعشاری مختوم یا متناوب ندارد، با دیدگاهی که دنباله مذکور هر بار به‌طور مقطعی و جزئی مورد توجه قرار گیرد، تفاوت دارد. با دیدگاه دوم، عدد گنگ (و حتی اعداد گویا به‌ویژه بازنمایی اعشاری متناوب) همواره نادقیق و ناکامل به‌نظر می‌رسند (و بیشتر فرایند هستند تا شیء مستقل).

در توضیحات ارائه شده در مورد  $\frac{1}{3}$  نیز ابهاماتی در کتاب درسی وجود دارد. در کتاب بیان شده است که « $\frac{1}{3}$  برابر هیچ عدد اعشاری نیست». با این وصف عددی با بازنمایی اعشاری  $0.\overline{333}$  باید عددی گنگ باشد زیرا با هیچ کسر متعارفی مساوی نیست<sup>۴</sup>، در حالی که می‌توان نشان داد: «هر کسر گویای  $\frac{a}{b}$  به‌صورت یک عدد اعشاری پایان‌دار یا یک عدد اعشاری دوره‌ای نامتناهی قابل بیان است؛ به عکس هر بسط اعشاری پایان‌دار یا دوره‌ای نامتناهی، مساوی عدد گویایی است» (نیون، ۱۳۶۷). به‌دنبال آن، در مسئله هفتم از مسائل صفحه ۲۰ کتاب، چهار کسر گویا مطرح و پرسیده شده است: «در بین اعداد گویای زیر، عددهایی را که اعشاری هستند مشخص کنید و ...». منظور این پرسش، احتمالاً مشخص نمودن کسرهای بازنمایی اعشاری مختوم (پایان‌دار) می‌باشد. ولی صورت سؤال این ابهام را برمی‌انگیزد که همواره کسرهای گویایی وجود دارند که هیچ بازنمایی اعشاری ندارند و این‌گونه کسرها تنها تقریباً (نه دقیقاً) با یک عدد اعشاری برابرند. رویکرد آموزشی کتاب به‌گونه‌ای

لازم است در مورد اصطلاح «پذیرش عدم بسته بودن بازنمایی» توسط دانش آموزان توضیحاتی داده شود. این اصطلاح، اولین بار توسط کولیس<sup>۵</sup> به کار برده شد. کولیس، بستگی<sup>۶</sup> در بازنمایی را در چهار مرحله تقسیم بندی می نماید. در مرحله اول دانش آموز تنها با جایگزین کردن یک عبارت گسترده، مانند جمع دو عدد، با حاصل جمع که یک عدد است آشناست. در عبارت  $x = 3 + 6$  حالت عملیاتی با جایگزین کردن عدد ۹ به حالت شیء گونی یا محصولی تبدیل می شود. در این مرحله، دانش آموز به طور همزمان، مفهوم عبارت گسترده عدد را به دو گونه محصول و فرایند شناسایی نمی کند.

مثال ۱

آیا می توان  $1 + \sqrt{2}$  را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه؟)

به ولی وقتی هزرمی گیریم  $\sqrt{2}$  هذر کامل ندارد پس وقتی هذر کامل ندارد  
و اعشارهایش معلوم نیست تا کجا ادامه دارد پس چطور می توان به طور دقیق  
محاسبه کرد که کجا وجود دارد؟!!

برای مثال، دانش آموز در این مرحله، جای خالی را در عبارت  $2 + \square = 3 + 6$  با عدد ۹ پر می کند. کولیس سه مرحله دیگر را نیز در رابطه با بازنمایی عدد بیان کرده است. در مرحله دوم فرد قادر است با عناصر ترکیبی کار کند، بی آنکه لازم باشد جواب یا عددی یکتا جایگزین آن ها کند. مثلاً بدون محاسبه جواب، درستی عبارت  $2 + 3 + 8 > 5 + 8$  را می فهمد. در این مرحله قادر است بیش از یک عملگر را به کار برد، مثل:  $3 - 4 + 1$ . دانش آموزان در مقاطع پایین تر، در «پذیرش عدم بسته بودن» بازنمایی یا ALC<sup>۷</sup>، مشکل دارند (کولیس، ۱۹۷۵). این مشکل در توسعه درک جبری دانش آموزان دیده می شود، مثلاً دانش آموزی که مشکل در ALC دارد، مایل است معادله  $3 + 7x = 10x$  را با جایگزین نماید.

در مثال ۲، دانش آموز برای نمایش  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$  روی محور اعداد، تقریبات اعشاری را جایگزین کرده است تا به عددی با بازنمایی بسته  $3/6$  برسد. وی در مورد  $1 + \sqrt{2}$ ، رابطه فیثاغورس را به کار برده است.

است که به جای توسعه مجموعه اعداد گویا به مجموعه اعداد حقیقی، به لحاظ مفهومی، مجموعه اعداد حقیقی را به مجموعه اعداد گویا محدود نموده و این از طریق تأکید بر تقریبات اعشاری، صورت پذیرفته است. تأثیر این دیدگاه را بر بدفهمی دانش آموزان، می توان در مثال ۱ دید.

در مورد فوق، دانش الگوریتمی ساخت هندسی اعداد گنگ مربعی به کار دانش آموز نیامده و در عوض تأکید بر عملیات و فرایند جذرگیری موجب تناقض و ابهام دانش آموز شده است. با رویکرد آموزشی کتاب درسی، انتظار چنین تصویری از جانب دانش آموز بعید نیست، زیرا

توجه او هم به جای جمع بندی و محصول نهایی به عنوان یک عدد گنگ، به فرایند پایان ناپذیر بسط اعشاری معطوف گشته و بنابراین، دانش الگوریتمی ساخت هندسی عدد در عمل فایده و کارایی اصلی خود را، که همان مکان یابی روی محور اعداد است، از دست داده است.

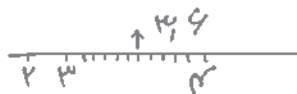
### شکل گسترده اعداد گنگ مربعی

در مطالعه صورت گرفته، بازنمایی اعشاری و جایگزینی آن با تعریف اولیه اعداد گنگ، یکی از دلایل بدفهمی دانش آموزان شناخته شد که با نتایج تحقیقات بین المللی نیز مطابقت دارد (زاز کیس و سیروتیک، ۲۰۰۴؛ سیروتیک و زاز کیس، ۲۰۰۷؛ زاز کیس و سیروتیک، ۲۰۱۰؛ پلد و هرشکو و تیز، ۱۹۹۹ و فوسکو گلو و کسپواس، ۲۰۱۱) و در عین حال، بررسی حل تکالیف دانش آموزان نشان داد جایگزینی اعداد گنگ مربعی با تقریبات اعشاری، یک عادت همیشگی در دانش آموزان نیست، بلکه به نوع اعداد نیز وابسته است. در اینجا

مثال ۲

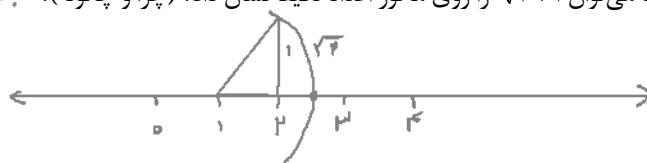
آیا می‌توان  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$  را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه؟)

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} = 1,4 + 2,2 = 3,6$$



آیا می‌توان  $\sqrt{2} + 1$  را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه؟) بپه

$$1 + \sqrt{2} = 1^2 + 1^2$$

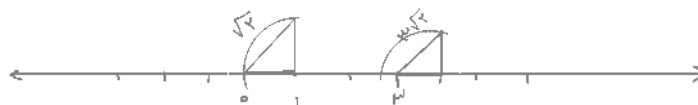


مثال ۳

آیا می‌توان  $\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$  را دقیقاً روی محور اعداد نشان داد؟ (چرا و چگونه؟)

احتمالاً بتوانیم آن را روی محور نشان دهیم ولی به صورت جداگانه می‌شود نشان داد تا شاید اعداد را از فرید برداریم و بتوانیم در یک و یک جمع کنیم

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$$



مثال ۴

آیا می‌توان  $\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$  را دقیقاً روی محور اعداد نشان داد؟ (چرا و چگونه؟)

$\sqrt{2}$  را به وی  $3\sqrt{2}$  را می‌توان نشان داد

آیا می‌توان  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$  را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه؟) به تنهایی به وی با هم نه

آیا می‌توان  $\sqrt{2} + 1$  را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه؟) بپه

شکل دو بخش یا دو عدد جداگانه فرض کرده و نمایش یک‌جای عدد را منوط به جایگزینی تقریب اعشاری، جمع دو بخش و رسیدن به یک عدد نهایی (با بازنمایی بسته) دانسته است. در مورد مثال ۴ نیز، شکل گسترده بازنمایی اعداد، سبب شده تا دانش‌آموز، نمایش یک‌جای عدد را روی محور، امکان‌ناپذیر بداند.

همان‌گونه که گفته شد، تغییر رویکرد دانش‌آموز در مورد سؤال دوم، شاید مربوط به نوع تمرین‌های کتاب باشد.

در مورد مثال ۳، دانش‌آموز توضیح داده است که عدد به شکل داده شده را تنها به صورت جداگانه می‌توان روی محور نمایش داد. به عبارتی، وی کل عبارت را به

## غلبه جنبه فرایندی و عملیاتی بر جنبه ساختاری و محصولی

همان گونه که پیش تر بیان شد، مشکلات ذکر شده در رابطه با اعداد گنگ مربعی گاهی هم پوشانی داشته و گاه رابطه علت و معلولی دارند. به نظر می رسد بین عدم پذیرش شکل گسترده عدد گنگ و غلبه جنبه فرایندی و عملیاتی در ذهن دانش آموزان، ارتباطی وجود دارد. برای حصول اطمینان از این ارتباط، سؤال زیر مطرح و پاسخ ها بررسی شد.

### « $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ » چیست؟

در اینجا نیز لازم است به طور کوتاه، توضیحاتی در رابطه با اصطلاحات **فرهوم**، **فرایند** و **شیء ذهنی** آورده شود. البته در شماره های پیشین این مجله، به بحث مذکور پرداخته شده است و توضیحات آتی، جنبه یادآوری دارد (پگ و تال، ۲۰۰۵).

نظریات شیء- فرایندی در آموزش ریاضیات عنوان کلی، نظراتی همچون APOS<sup>۸</sup>، شیء انگاری<sup>۹</sup> اسفارد<sup>۱۰</sup> و فرهوم<sup>۱۱</sup> تال<sup>۱۲</sup> و گری<sup>۱۳</sup> می باشد. این گونه نظریه ها، نحوه شکل گیری یک مفهوم ریاضی را در ذهن دانش آموز شرح می دهند و از نوع نظریه های موضعی آموزش ریاضیات می باشند. افراد مختلف، نظرات (موضعی) گوناگونی را در رابطه با شکل گیری مفهوم ارائه داده اند (انگلیش و سیریرامن، ۲۰۱۰). پیازه بین تجرید تجربی<sup>۱۴</sup> (از اشیاء درک و مشاهده شده) و تجرید نیمه تجربی<sup>۱۵</sup> (از فعالیت های صورت گرفته روی اشیاء درک شده) تمایز قائل می شود (تال، ۱۹۹۹). تجرید تجربی از مشاهده و حس کردن پدیده ها در جهان واقعی حاصل می شود و در تجرید نیمه تجربی، استخراج دانش از طریق تجرید فرایند عملیات و انجام فعالیت روی اشیاء صورت می پذیرد. تال و گری (۱۹۹۹) تمایزی بین اشیاء **درک شده**<sup>۱۶</sup> و اشیای **حس شده**<sup>۱۷</sup> قائل می شوند. اشیای حس شده، تجریدی از اشیاء در جهان واقعی هستند؛ مثل اشکال هندسی. دایره تجریدی از **اشیاء به ظاهر گرد** و خط تجریدی از **یک امتداد راست** در جهان واقعی و فیزیکی است. نوع دیگر یعنی اشیای ذهنی درک شده، بر اثر تأمل روی فعالیت ها و تأکید بر روند فرایندها حاصل

می شوند. مثلاً تجریدی از شمارش تعداد اشیای واقعی، منجر به ساخت مفهوم عدد می شود. تال و گری (۱۹۹۹)، بین «رویه<sup>۱۸</sup>» و «فرایند<sup>۱۹</sup>» تمایزی قائل می شوند. رویه یک الگوریتم یا روش گام به گام است که در آن، هر گام پس از تکمیل گام قبلی برداشته می شود. فرایند ترکیبی از چندین رویه (همسو و هم اثر) است، بدون آنکه به جزئیات گام ها توجهی شود. اینکه یک مفهوم همزمان، هم فرایند و هم شیء ذهنی محسوب شود، کمی مبهم و پیچیده به نظر می رسد. ساده ترین وسیله این است که یک نقطه نظر مشترک و یکسان از مفهوم شیء و فرایند ارائه دهیم. در سرتاسر ریاضیات، از این ترکیب ها، فراوان می توان یافت:

فرایند شمارش و مفهوم عدد؛ می توان ۷ شیء را شمارش کرد و یا ۷ را یک عدد مستقل پنداشت. فرایند شمارش چند چیز و مفهوم جمع (حاصل جمع)؛ ۴+۵ یک فرایند شمارش برای دو چیز است در عین حال یک حاصل جمع و عدد ۹ می باشد؛ فرایند تقسیم دو عدد طبیعی و یا یک کسر به عنوان یک شیء (۴/۳).

تال و گری (۱۹۹۹) ادعا می کنند که نمادهای ریاضی، اغلب حاوی دو جنبه فرایندی و مفهومی هستند. آن ها واژه ترکیبی و جدید «فرهوم» مرکب از فرایند و مفهوم را برای این مورد ابداع کرده اند. فرهوم نمادگذاری یا نمادی است که هر دو جنبه فرایندی و مفهومی را دربردارد.

برای مثال، ۴+۳ یک فرهوم است. «شمارش همه<sup>۲۰</sup>» و «شمارش یکجا<sup>۲۱</sup>» را می توان دو رویه یا تکنیک جمع دانست. «شمارش همه» برای ۳ و ۴، حالت «فرایند، فرایند» را به وجود می آورد. شمارش یکجای ۳ (۴) و شمارش همه ۴ (۳) حالت «فرهوم - فرایند<sup>۲۲</sup>» را ایجاد می کند. جمع یکجا برای دو عدد، حالت «فرهوم - فرهوم<sup>۲۳</sup>» را ایجاد می کند. شکل های ۱ و ۲، موضوع را روشن تر می کند:

در پاسخ به پرسش اخیر، تنها ۵ درصد از دانش آموزان، عبارت مورد پرسش را به عنوان یک حقیقت شناخته شده<sup>۲۴</sup> یا یک عدد گنگ معرفی کرده بودند. به عبارتی جنبه فرهوم- فرهوم را درک کرده بودند. مثال ۵، پاسخ دانش آموزی است که از عبارت داده شده، درک فرهوم- فرایندی دارد یعنی  $\sqrt{7}$  را

یک عدد گنگ دانسته، در حالی که علامت جمع را بخشی از بازنمایی عدد گنگ محسوب نکرده و کل عبارت را یک فرایند جمع ارزیابی نموده است. در حالت فرایندی- فرایندی<sup>۲۵</sup>، دانش آموزان چنین پاسخ داده بودند که جذر یک عدد، با ۲ جمع شده است.

### عدم درک کارکرد محور اعداد

محور اعداد، مدلی کارآمد جهت شناخت بهتر اعداد و بسیاری از مفاهیم ریاضیات است. فرودنتال<sup>۲۶</sup> (۱۹۷۳)، سه کاربرد را برای محور اعداد نام می برد. اول، به عنوان یک خط کش که نقاط روی آن، مکان ثابتی دارند. دوم، خطی که دارای مبدأ و مقیاس توافقی و قراردادی است و با آن، می توان نقاط روی محور و اعداد را به هم نسبت داد. سوم، یک بنیان دقیق که اعداد، عملگرها و انتقالات روی آن، بازنمایی می شوند. در سنت رایج آموزشی، اعداد گویا از دل اعداد صحیح با عملیات تقسیم و اعداد صحیح از دل اعداد طبیعی با عمل تفریق توسعه می یابند. در حالی که این موضوع روی محور اعداد، بدین شکل اتفاق نمی افتد. محور اعداد، به تدریج و با توسعه مجموعه اعداد، نقاط بیشتری را که از پیش موجود بوده اند، به نمایش می گذارد (فرودنتال، ۱۹۷۳). از لحاظ شهودی، توسعه اعداد از مجموعه اعداد طبیعی تا گویا، معمولاً با مشکلی مواجه نیست. تقسیم کردن بین دو واحد یا عدد صحیح مانند تقسیم کردن یک سیب یا یک تکه نان، ملموس و مطابق با شهود است. رابطه بین مجموعه ها به شکل  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  برقرار است و این رابطه به لحاظ شهودی، در راستای توسعه اعداد روی محور اعداد است. در حالی که مجموعه اعداد گنگ، تابع این سنت توسعه و ساخت شهودی اعداد نیست. با اینکه اعداد گنگ نیز به کمک اعداد گویا ساخته و حتی تعریف می شوند (عددی که برابر نسبت دو عدد گویا نیست)، ولی این بار مجموعه های جدا از مجموعه های پیشین حاصل می شود. هر عدد طبیعی، در عین حال عددی صحیح و گویا نیز هست. ولی عدد گنگ، موجودی جدا و مستقل از اعداد پیشین است. علاوه بر این، حس نیاز به پیدایش اعداد گنگ

مثال ۱-۵

$2 + \sqrt{7}$  چیست؟ می عدد گنگ به علامت جمع طبیعی چون  $\sqrt{7}$  جواب دقیق (جزء کامل) ندارد نمی توانیم حاصل جمع را بدست آوریم.

مثال ۲-۵

$2 + \sqrt{7}$  چیست؟ مجموع عددی گنگ و عددی گویا که روی محور می توان آن را نمایش داد

مثال ۶

آیا می توان  $\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$  را دقیقاً روی محور اعداد نشان داد؟ (چرا و چگونه؟)  
خیر زیرا گنگ است.  $3\sqrt{2}$

آیا می توان  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$  را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه؟)  
نه چون دو رادیکال را نمی توان با هم جمع کرد.

آیا می توان  $1 + \sqrt{2}$  را روی محور اعداد دقیقاً نشان داد؟ (چرا و چگونه؟)



مثال ۷

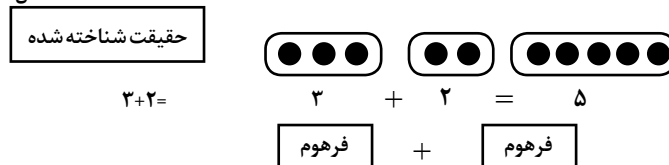
آیا می توان  $\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$  را دقیقاً روی محور اعداد نشان داد؟ (چرا و چگونه؟)  
بله به کمک اندازه گیری  $3\sqrt{2}$  را به  $\sqrt{2}$  اضافه می کنیم



شکل ۱



شکل ۲



در برنامه درسی ایجاد نمی‌شود، لذا دانش آموز عدد گنگ را عددی اعشاری یا گویا فرض می‌کند، با این تفاوت که مقدار دقیق و مکان معینی روی محور ندارد. نتیجه این است که به جای توسعه مفهومی مجموعه اعداد گویا به اعداد حقیقی، با جایگزین کردن تقریب‌های اعشاری برای اعداد گنگ، اعداد حقیقی به مجموعه اعداد گویا تبدیل می‌شود. در مطالعه صورت گرفته، چه در قالب پاسخ به پرسش‌ها و چه در قالب مصاحبه‌ها، بیشتر دانش آموزان روش ساخت هندسی اعداد گنگ مربعی را می‌دانستند، ولی این نوع ساختن، دانشی الگوریتمی و رویه‌ای بود که بین عدد گنگ و اندازه ارتباط معناداری ایجاد نمی‌کرد.

برای مثال، در مصاحبه‌ها از دانش آموزان سؤال شد «چگونه می‌توان تکه چوبی را به اندازه  $\sqrt{2}$  برش زد». بسیاری به دلیل نامتناهی بودن بخش اعشاری در بازنمایی اعشاری، این کار را ناممکن دانستند، در حالی که با روش هندسی این عدد را روی محور اعداد می‌ساختند. در عین حال، در ادامه مصاحبه بیان می‌کردند که «اعداد گنگ را نمی‌توان روی محور اعداد نمایش داد، زیرا دقیق نیستند». این تناقض گویی‌ها حاکی از آن است که دانش آموزان قادر نبودند بین عدد مجموعه‌ای و عدد اندازه‌گیری<sup>۲۷</sup>، ارتباط ایجاد نمایند. محور اعداد حقیقی، یک مدل ریاضی و ذهنی است که بین عدد و اندازه ارتباط ایجاد می‌کند. به عبارتی، ویژگی ترتیبی و شمارشی اعداد روی محور، به اندازه یک پاره خط یا فاصله بین یک نقطه تا مبدأ مختصات، مرتبط می‌گردد. محور اعداد، محل پیوند تفکر حسابی و تفکر هندسی است. جمع دو عدد شمارشی<sup>۲۸</sup> (مقدار) در خارج محور، متناظر با جمع دو اندازه (فاصله) یا جمع دو عدد اندازه‌گیری روی محور است که منجر به ایجاد یک اندازه (فاصله) جدید می‌گردد. در تحقیق صورت گرفته، در رابطه با اعداد گنگ مربعی با شکل گسترده نمایش  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$  یا  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ ، جمع حسابی با جایگزینی تقریب‌های اعشاری، یا ساده کردن رادیکال‌ها انجام شده است. در حالی که روی محور اعداد، جمع هندسی که آن را به عنوان جمع دو اندازه یا دو فاصله تعریف می‌کنیم، معنایی نیافته است.

در مثال اخیر (مثال ۶ و ۷)، از دیدگاه ریاضیات وابسته به جسم<sup>۲۹</sup>، بین استعاره حرکت روی مسیر<sup>۳۰</sup> که منجر به ایجاد مدل محور اعداد می‌شود و استعاره چوب اندازه‌گیری<sup>۳۱</sup> که جمع فاصله‌ها را با اعداد مرتبط می‌سازد، ارتباط عرضی مناسبی ایجاد نشده است، یعنی کارکرد محور به درستی شناخته نشده است (لکاف و نونز، ۲۰۰۰).

### نتیجه‌گیری و پیشنهاد

از آنچه گفته شد، چنین برمی‌آید که رویکرد آموزشی اعداد گنگ در برنامه درسی، چندان مناسب نیست. برنامه درسی به آرامی از کنار مفهوم عدد گنگ که آخرین حلقه تکمیل کننده مجموعه اعداد حقیقی، است عبور کرده و به سرعت، این مفهوم را با تأکید بر تقریبات اعشاری، به مفهوم عددی گویا و «نادقیق» تقلیل داده است. در برنامه درسی، حرکت از جنبه فرایندی به جنبه محصولی و جمع‌بندی نهایی عدد گنگ، به شکل ناقصی صورت می‌پذیرد. در این میان، تأکید کتاب درسی و دانش آموزان بر عمل جذرگیری در رابطه با اعداد گنگ مربعی، موجب غلبه دیدگاه عملیاتی و فرایندی در دانش آموزان می‌گردد. مبدأ تاریخی پیدایش مفهوم عدد گنگ، توسط یونانیان و ارائه تعریف رسمی عدد گنگ توسط دکدکند در قرن نوزدهم میلادی، هر دو بر مبنای کمیات نامتوافق<sup>۳۲</sup> بوده است (ایوز، ۱۹۹۰). شاید بازگشت به این مبدأ و شروع از مفهوم کمیات متوافق و نامتوافق، شروع خوبی برای آموزش اعداد گنگ باشد. فیشباین<sup>۳۳</sup> چهیم و کوهن (۱۹۹۵) نیز ایجاد کنجکاوی و پرسش از مفاهیم متوافق<sup>۳۴</sup> و نامتوافق را آغازگر مناسبی برای تدریس اعداد گنگ می‌دانند. انتظار می‌رود که ایجاد حس نیاز اولیه در دانش آموزان به وجود اعداد گنگ، منجر به درک بهتر آنان از این اعداد شود؛ حسی که در رویکرد فعلی آموزشی ایجاد نشده است. پایان بخش این مقاله، نقل قولی است که از لکاف و نونز (۲۰۰۰)، از دکدکند آورده‌اند: دکدکند خود، این حس را چنین تجربه نموده است: اگر نقطه  $p$  متناظر با عدد گویای  $a$  باشد، آن‌گاه چنانچه متداول است،  $op$  کمیتی متوافق با واحد اندازه‌گیری نامتغیری است که در ساخت /محور/ به کار گرفته شده است. ولی یونانیان باستان، این موضوع را از پیش می‌دانستند و اثبات کرده

- منابع
1. Collis, K. (1975). *The Development of Formal Reasoning*. Newcastle, Australia: University of Newcastle.
  2. Fisschbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The Concept of Irrational Numbers in High School Students and Prospective Teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 29-44.
  3. Freudenthal, H. (1999). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*.
  4. Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Kluwer.
  5. Lakoff, N., & Nunez, R. (2000). *where mathematics come from?* Basic Books.
  6. Peled, I., & Hershkovits, S. (1999). Difficulties in Knowledge Integration: Revisiting Zeno's Paradox with Irrational Numbers. *INT. J. Math. Educ. SCI. Technol.*, 39-46.
  7. Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers on the number Line-Where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 477-488.
  8. Sriraman, B., & English, L. (2010). *Theories of Mathematics Education*. springer.
  9. Stein, H. (1990). Eudoxos and Dedekind: On the ancient Greek theory of ratios and its relation to modern mathematics. *Synthese*, 163-211.
  10. Tall D., T. M. (1999). What Is the Object of the Encapsulation of a Process? *Journal of Mathematical Behaviore*.
  11. Tall, D., & Gray, E. (1991). Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking. *PME 15*, (72-79). Assisi.
  12. Voskoglou, M., & Kosyvas, G. (2011). A study on the comprehension of irrational numbers. *Quaderni Di Ricerca in Didattica (Mathematics)*.
  13. Zazkis, R., & Sirotic, N. (2004). Making Sense of Irrational Numbers: Focusing on Representation. *PME 28*, (497-504).
  14. Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing Missing Link. *CBMS Issues in Mathematics Education American Mathematical Society*.
  ۱۵. ایوز، ه. و. (۱۹۹۰). *آشنایی با تاریخ ریاضیات*. ترجمه محمدقاسم وحیدی اصل (۱۳۸۶). مرکز نشر دانشگاهی.
  ۱۶. پگ، ج.، تال، د. (۲۰۰۵). چرخه بنیادین ساخت مفهوم: زیربنای چارچوب‌های نظری گوناگون. ترجمه حسین عبدی، محمدرضا فدایی و زهرا گویا (۱۳۸۶). مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۸۸، صص ۴ تا ۱۵، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
  ۱۷. ساویزی، ب. (۱۳۹۱). *بررسی ساختار مفهومی اعداد گنگ در دانش آموزان*. رساله منتشر نشده دکتری ریاضی با گرایش آموزش ریاضی. واحد علوم و تحقیقات دانشگاه آزاد اسلامی.
  ۱۸. نیون، ا. م. (۱۹۶۱). گویا و گنگ. ترجمه غلامحسین اخلاقی نیا (۱۳۶۷). مرکز نشر دانشگاهی.

بودند که همواره اندازه‌هایی نامتوافق با واحد اندازه‌گیری فرض شده، وجود دارند. اگر طول‌ها یا چنان اندازه‌هایی را از نقطه مبدأ ۰ روی امتداد خط [محور] قرار دهیم، نقاط انتهایی را خواهیم یافت که با هیچ عدد گویایی متناظر نمی‌باشند... دامنه اعداد گویا دیگر کفایت نخواهد کرد و کاملاً ضروری می‌نماید که دستگاه اعداد  $R$  (حقیقی) که با خلق اعداد گویا ساخته شده بود، این بار با خلق اعداد جدیدی توسعه یابد» (لکاف و نونز، ۲۰۰۰).

#### پی‌نوشت‌ها

1. structural
  2. objective
  ۳. حتی نام اعداد گنگ در زبان انگلیسی از تعریف آن یعنی نسبت دو عدد صحیح با مخرج غیرصفر گرفته شده است. rational از واژه انگلیسی ratio گرفته شده است. (نیون ۱۳۶۷)
  ۴. اثبات اینکه عدد  $\frac{1}{3}$  با کسر  $\frac{1}{3}$  دقیقاً برابر است با معلومات ابتدایی ریاضی امکان‌پذیر است.
  5. Collis
  6. closure
  7. Acceptance of the lack of closure
  8. Action-process-object- schema
- این نظریه توسط دوبینسکی ارائه شده است.
9. reification
  10. Sfard
  11. Procept و concept ترکیبی از واژگان : Procept
  12. Tall
  13. Gray
  14. Empirical abstraction
  15. Semi-empirical abstraction
  16. Conceived
  17. Perceived
  18. Procedure
  19. process
  20. Counting- all
  21. Counting - on
  22. Procept-process
  23. Procept-procept
  24. Known fact
  25. Process-process
  26. Freudenthal
  27. Measuring number
  28. Counting number,
- این اصطلاح و اصطلاحاتی نظیر عدد اندازه‌گیری و عدد محاسباتی را فرودنتال (۱۹۹۹، ۱۹۷۳) در برخی کتب خود به کار برده است.
29. Embodied mathematics
  30. Motion on the path metaphor
  31. Measuring stick metaphor
  32. Incommensurable
  33. Fischbein
  34. Commensurable



# مدل مفهومی تصور مفهوم- تعریف مفهوم واهمیت آن در آموزش ریاضی

زهرا محتشم، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی بوشهر

## چکیده

عملکردهای ضعیف و دور از انتظار بسیاری از دانش آموزان و حتی دانشجویان، در انجام تکالیف مختلف وابسته به تعریف، ذهن بسیاری از آموزشگران ریاضی را به خود مشغول کرده است. برای توضیح این مسئله، آموزشگران ریاضی بیان می کنند که در واقع، فرایندی که یک دانش آموز در یادگیری مفاهیم ریاضی دنبال می کند، با آنچه که یک ریاضی دان انجام می دهد، متفاوت است. برای توضیح چگونگی شکل گیری مفاهیم ریاضی و نشان دادن نقشی که ساختار مفهومی ذهن شخص در این ساخت و ساز دارد، همچنین برای تحلیل درک دانش آموزان و تعریف های آن ها از مفاهیم مختلف، «مدل شناختی تصور مفهوم- تعریف مفهوم»، به وسیله تال و وینر (۱۹۸۱)، معرفی شد. براساس این مدل، برای هر مفهوم ریاضی یک «تصور مفهوم» و یک «تعریف مفهوم» وجود دارد و بسیاری از مشکلاتی که دانش آموزان در ساخت و درک مفاهیم ریاضی دارند، بستگی به تشخیص تعریف رسمی یک مفهوم توسط فرد و تصور مفهوم وی دارد. در توضیح این مدل، وینر بیان می کند که تصور مفهوم، هنگام حل مسئله و اثبات، نقش اصلی را به عهده دارد و تعریف ها نقشی حاشیه ای دارند. همچنین، ضعف در تصور مفهوم دانش آموزان، ممکن است بازتاب تمرین های نامناسب کتاب درسی یا شیوه آموزشی نامناسب باشد. از جمله راه های بهبود تصور مفهوم برای دانش آموزان، توجه مؤلفان کتاب های درسی بر میزان تأکید و تعیین اولویت تصور یا تعریف مفهوم در برنامه درسی گروه های مختلف دانش آموزان است، همچنین طراحی فعالیت ها و هدایت بحث های کلاسی هدفمند توسط معلمان، برای تشخیص تناقض های دانش آموزان در درک مفهوم، و اتخاذ رویکردهایی مناسب جهت رفع آن ها ضروری است.

**کلیدواژه ها:** تصور مفهوم، تعریف مفهوم، مدل مفهومی، تعریف های ریاضی.

## مقدمه

تحقیقات در آموزش ریاضی نشان داده است که با وجود نقش مهمی که تعاریفها در یادگیری ریاضی و نیز انجام عملیات ریاضی به عهده دارند، تعداد زیادی از دانش آموزان دبیرستانی و فارغ التحصیلان، برای درک تعاریفهای جدید و کاربرد تعاریفها به طور مناسب، دچار مشکل هستند و از نقش تعاریفها در حل مسئله و ایجاد اثباتها آگاهی ندارند (زاسکیس<sup>۱</sup> و لیکن<sup>۲</sup>، ۲۰۰۸).

آموزشگران ریاضی بیان می کنند که بخش عمده ای از این مشکلات از تفاوت بین مراحل منطقی (ریاضی) تشکیل مفهوم و فرایندهای ذهنی فرد برای دریافت مفهوم ناشی می شود. در واقع، فرایندی که یک دانش آموز در یادگیری مفاهیم ریاضی دنبال می کند، با آنچه که یک ریاضی دان انجام می دهد، متفاوت است. برای نشان دادن نقشی که ساختار ذهنی مفهومی شخص دارد، «مدل شناختی تصور مفهوم<sup>۳</sup> و تعریف مفهوم<sup>۴</sup>» به وسیله تال و وینر (۱۹۸۱) معرفی شد. براساس این مدل، تعداد زیادی از مشکلاتی که دانش آموزان در ساخت معنایی مفاهیم ریاضی دارند، به تشخیص<sup>۵</sup> فرد از تعریف رسمی یک مفهوم و تصویری که وی از آن مفهوم دارد مرتبط است (تال<sup>۶</sup>، ۱۹۸۸). در واقع، در فرایند یادگیری یک مفهوم معین، ابتدا در ذهن یک تصور مفهوم و یک تعریف مفهوم ساخته می شود. «تصور مفهوم» یک ساختار شناختی کلی است که به مفهوم وابسته است، اما «تعریف مفهوم»، شکلی از کلماتی است که برای معرفی مفهوم به کار می رود. شخص ممکن است دارای تعریف مفهومی باشد که با تعریف ریاضی آن سازگار نباشد یا تعریف مفهومی که لزوماً مرتبط با تصور مفهوم او نیست. در نتیجه، فاصله ای بین تعریف ریاضی مفهوم و روشی که شخص آن را درک می کند وجود دارد. در ادامه، این مدل با تفصیلی که استفاده از آن را ممکن کند تشریح می شود.

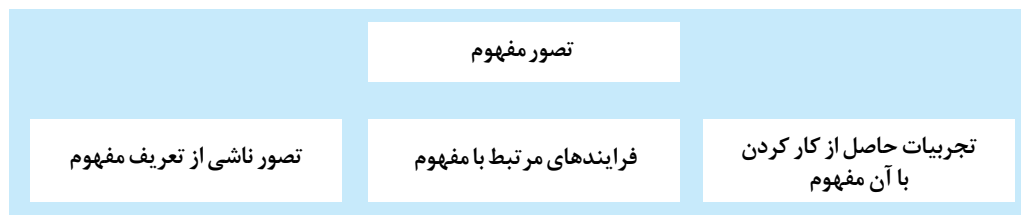
## تصور مفهوم و تعریف مفهوم

به گفته وینر<sup>۷</sup> (۱۹۷۶)، اگرچه به نظر می رسد دانش آموزان هیچ تصور خاصی نسبت به ساختار ریاضی «تعریف - قضیه - اثبات» نداشته اند، براساس نظریه پیازه<sup>۸</sup>، انسان به ویژه در سال های جوانی، تجارب خود

را در تعامل با محیط سازمان دهی می کند و حتی بدون اینکه صریحاً چیزی به او گفته شود، می تواند به طور مستقیم، نتایجی را از این تجارب استنباط کند. او اضافه می کند که چگونه در موارد زیادی، دانش آموزان حتی درباره موضوعاتی که برای اولین بار به آنها ارائه می شد تصویری داشتند (تارسکی<sup>۹</sup>، ۱۹۶۵؛ وینر، ۱۹۷۵ و ۱۹۷۶؛ نقل شده در وینر، ۱۹۷۶). وینر با تأکید بر دیدگاه پیازه درباره تجسم ذهنی<sup>۱۰</sup>، آن را به حوزه تفکر ریاضی (بیشتر درباره تعریف) گسترش داد و با تأکید بر اهمیت ایجاد یک چارچوب مرجع<sup>۱۱</sup> برای تصور ذهنی، به کمک تال (۱۹۸۱)، یک مدل ساده برای فرایندهای شناختی به منظور تحلیل فرایند یادگیری بعضی مفاهیم ریاضی (وابسته به تعاریفها) ارائه کرد (وونگ<sup>۱۲</sup>، ۱۹۸۹). برای این منظور، تال و وینر، برای هر مفهوم، دو سلول (منظور سلول های زیستی نیست) مختلف در ساختار شناختی در نظر گرفتند؛ یک سلول برای تصور مفهوم و دیگری برای تعریف (یا تعریف های) مفهوم که ممکن است یکی از این دو سلول یا هر دو، خالی یا پر باشند؛ اولی شامل هر تصویر ذهنی<sup>۱۳</sup> از یک مفهوم معین است؛ یعنی اطلاعاتی که مفهوم را برای فرد مشخص می کند، نظیر نمودارها، نمادها و نمایش های کلامی یا اطلاعات عددی و یک مجموعه از خواص وابسته به مفهوم. این مجموعه از خواص، به همراه تصویر ذهنی، «تصور مفهوم» نامیده می شود که طی سال ها، از طریق انواع تجارب شکل می گیرد و در مواجهه شخص با محرک های جدید، تغییر می کند و کامل تر می شود. برای یک مفهوم معین، هر شخص ممکن است تصور مفهومی متفاوتی با دیگران و متناسب با درک و تجارب شخصی خود تشکیل دهد که لزوماً همه بخش های آن با هم مرتبط و سازگار نیستند، یعنی ممکن است تصور مفهوم، حتی شامل بخش های متناقضی هم باشد. همچنین، یک فرد می تواند واکنش های متفاوتی نسبت به یک مفهوم خاص در وضعیت های مختلف نشان دهد که لزوماً، بیانگر همه آنچه که فرد درباره مفهوم می داند نباشد. مثلاً ممکن است فرد در زمان ها یا موقعیت های متفاوت، درباره موضوعی مثل تابع، مثال ها یا توضیحات متفاوتی ارائه کند که تال و وینر (۱۹۸۱)، اصطلاح «تصور مفهوم فراخوانده شده<sup>۱۴</sup>» را برای چنین وضعیتی انتخاب کردند (شکل ۱).

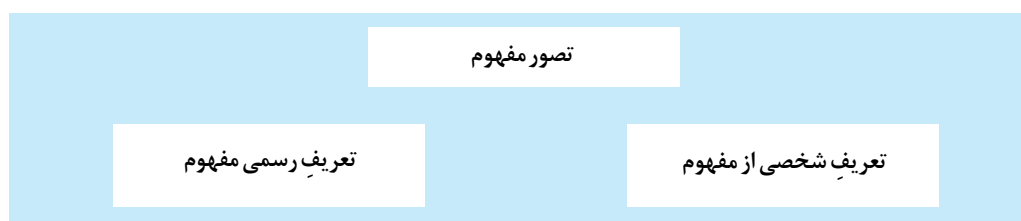
برای نشان دادن نقشی که ساختار ذهنی مفهومی شخص دارد، «مدل شناختی تصور مفهوم و تعریف مفهوم» به وسیله تال و وینر (۱۹۸۱) معرفی شد. براساس این مدل، تعداد زیادی از مشکلاتی که دانش آموزان در ساخت معنایی مفاهیم ریاضی دارند، به تشخیص فرد از تعریف رسمی یک مفهوم و تصویری که وی از آن مفهوم دارد مرتبط است

برای یک  
مفهوم معین، هر  
شخص ممکن  
است تصور  
مفهومی متفاوتی  
با دیگران و  
متناسب با درک  
و تجارب شخصی  
خود تشکیل دهد  
که لزوماً همه  
بخش‌های آن  
با هم مرتبط و  
سازگار نیستند



شکل ۱، جوادى، ۱۳۸۶

هم‌چنین، بخشی از سلول تصور مفهوم که حاصل تأثیر سلول تعریف مفهوم بر سلول تصور مفهوم است، «تصور ناشی از تعریف مفهوم» نامیده می‌شود. سلول دومی یعنی تعریف مفهوم، شامل یک تعریف کلامی از مفهوم است که به‌دقت مفهوم را توضیح می‌دهد و یک تعریف رسمی از مفهوم است (شکل ۲).



شکل ۲، جوادى، ۱۳۸۶

نشده است و با وجود تهی نبودن سلول تصور مفهوم، تعریف رسمی مفهوم ارائه می‌گردد. حالت دوم نیز زمانی است که یک مفهوم، اولین بار به‌وسیله تعریفش معرفی می‌شود. در این حالت، سلول تصور مفهوم در ابتدا خالی است و بعد از ارائه چندین مثال و تشریح آن‌ها، به‌تدریج پر می‌شود. با این حال، ممکن است سلول تصور مفهوم، بازتابی از تمام جنبه‌های تعریف مفهوم نباشد. وی در ادامه توضیح می‌دهد که در هر دو حالت- در حالت اول که تصور مفهوم قبلاً شکل گرفته و در حالت دوم که تصور در مراحل بعدی و به‌تدریج، شکل می‌گیرد- اگر تصور مفهوم ساخته شده منطبق بر تعریف مفهوم باشد، مشکلی وجود ندارد و ایده‌آل است. برای مثال، اگر تعریف «محور مختصات» به‌عنوان دو خط متقاطع در نظر گرفته شده باشد و تکالیف و فعالیت‌هایی که دانش‌آموزان برای یادگیری آن انجام داده‌اند با همان دو خط متقاطع باشد، مشکلی به‌وجود نمی‌آید. اما ممکن است وضع همیشه به این منوال نباشد. مثلاً در حالت اول؛ یعنی زمانی که تصور

در ریاضیات، «تعریف مفهومی» که از سوی اکثریت جامعه ریاضی‌دانان پذیرفته شده است، «تعریف مفهوم رسمی» یا فقط تعریف مفهوم نامیده می‌شود، درحالی که یک شکل از کلماتی که هر شخص برای توضیح تصور مفهوم فراخوانده‌اش به‌کار می‌برد، «تعریف مفهوم شخصی» در نظر گرفته می‌شود. در کل، تعریف مفهوم شخصی ممکن است با تعریف مفهوم رسمی کاملاً متفاوت باشد (شکل ۲). تال و وینر ادعا می‌کنند که ما از طریق تجربیاتمان، با بعضی از مفاهیم آشنا می‌شویم و بدون اینکه تعریف دقیق و مشخصی از آن‌ها داشته باشیم، آن مفاهیم را در زمینه‌های مختلف به‌کار می‌بریم. این در حالی است که فرد می‌تواند تعریف یک مفهوم را، بدون آنکه تصور مناسبی از آن داشته باشد، فقط به‌خاطر بسپارد (حفظ کند). گیرالدو<sup>۱۵</sup> و همکاران (۲۰۰۶)، نقل شده در جوادى، ۱۳۸۶ بیان می‌کنند که یک «تصور مفهوم جامع»، لزوماً یک تعریف مفهوم درست را در بر نمی‌گیرد و در ساختار شناختی یک مفهوم، هر یک از دو سلول «تصور» و «تعریف» مفهوم،

مفهوم دانش‌آموز از مفهوم محور مختصات، در نتیجه دیدن بسیاری از نمودارها در وضعیت‌های مختلف و به‌صورت دو محور عمود بر هم ایجاد شده باشد، آنچه که در تصور مفهوم او از محور مختصات شکل می‌گیرد، احتمالاً دو محور عمود بر هم خواهد بود. حال بعد از اینکه معلم ریاضی، دستگاه مختصات را به‌صورت دو خط متقاطع معرفی کند، پیش‌بینی می‌شود که یکی از سه حالت زیر اتفاق بیفتد:

۱. تصور مفهوم در جهت تعریف مفهوم تغییر می‌کند؛ یعنی تصور مفهوم فرد، محورهایی را که بر هم عمود نیستند نیز، به‌عنوان دستگاه مختصات در نظر می‌گیرد که این اتفاق، یک بازسازی و تطابق ایده‌ال و مطلوب است.

۲. تصور مفهوم به همان صورت باقی می‌ماند درحالی‌که سلول تعریف مفهوم در واقع تعریف رسمی ارائه شده توسط معلم را در برمی‌گیرد که اغلب، این تعریف یا به فراموشی سپرده می‌شود یا پس از مدت کوتاهی تحریف می‌گردد. لذا زمانی که مثلاً از دانش‌آموز خواسته می‌شود یک دستگاه مختصات را تعریف کند، او دربارهٔ محورهایی با زاویه‌های ۹۰ درجه صحبت می‌کند و ممکن است که در این حالت، تعریف رسمی به‌طور کامل درک نشود و جذب نگردد.

۳. هر دو سلول به‌همان صورت که بوده‌اند باقی می‌مانند؛ بدین معنی که سلول تصور مفهوم تغییری نمی‌کند و تنها سلول تعریف مفهوم ارائه شده توسط معلم را درون خود حفظ می‌کند و در لحظه‌ای که از او خواسته می‌شود تا یک دستگاه مختصات را تعریف کند، تعریف معلم را عیناً تکرار می‌کند، درحالی‌که در وضعیت‌های دیگر، او دستگاه مختصات را به‌صورت دو محور عمود بر هم در نظر می‌گیرد.

در حالت دوم، تأثیر سلول تعریف مفهوم بر سلول تصور مفهوم، شبیه سه اتفاق بالاست، یعنی:

- تصور مفهوم بر مبنای تعریف مفهوم شکل می‌گیرد.
- تصور مفهوم با دیدن تمثیل‌ها و کار کردن با آن‌ها، متفاوت از تعریف مفهوم شکل می‌گیرد و تعریف مفهوم فراموش می‌گردد یا تحریف می‌شود. برای مثال، معرفی مفهوم تابع در قالب تعریف، به‌صورت «رابطه‌ای بین دو مجموعه A و B، که هر عضو A فقط با یکی از اعضای B رابطه دارد» عرضه می‌گردد و پس از مدت کوتاهی،

تمام مثال‌های عرضه شده در قالب توابع تک ضابطه‌ای و تک فرمولی ارائه می‌شوند. لذا احتمالاً، تصور مفهوم به‌سمت تک ضابطه‌ای بودن هر تابع می‌رود. برای مثال، یافته‌های تحقیق نشان می‌دهند که اکثر دانش‌آموزان، تناظری را که عدد غیر صفر را به مربعش و صفر را به ۱- نسبت می‌دهد، به‌عنوان تابع قبول نمی‌کنند (وینر ۱۹۸۳ و ۱۹۹۱؛ وینر و دریفوس<sup>۶</sup>، ۱۹۸۹؛ نقل شده در جوادی، ۱۳۸۶).

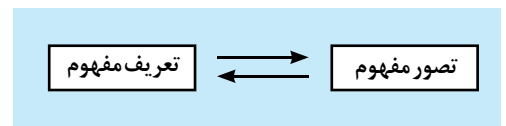
● تصور مفهوم، مستقل از تعریف مفهوم شکل می‌گیرد و تغییری در سلول تعریف مفهوم رخ نمی‌دهد. مثلاً دانش‌آموزان، تعریف را به‌همان صورت رسمی ارائه می‌کنند ولی تناظر مطرح شده در قسمت قبل را به‌عنوان تابع نمی‌پذیرند (وینر ۱۹۸۳ و وینر و دریفوس ۱۹۸۹؛ نقل شده در جوادی، ۱۳۸۶).

وینر (۱۹۹۱) بیان می‌کند که شکل‌گیری یک مفهوم، به‌طور کلی به‌معنای تشکیل یک تصور مفهوم مناسب و جامع برای آن است و تعریف‌های مفهوم بسته به روزمره یا تخصصی بودن، نقش‌های متفاوتی در شکل‌گیری مفهوم به‌عهده دارند. تعریف‌های روزمره، اگرچه به شکل‌گیری تصور مفهوم کمک می‌کنند، اما پس از این شکل‌گیری، تعریف غیرضروری می‌شود و در هنگام کار با آن مفهوم، غیرفعال گشته و حتی ممکن است فراموش شود. درحالی‌که در زمینه‌های تخصصی، تعریف‌ها نه‌تنها به شکل‌گیری و ساخته شدن مفهوم کمک می‌کنند، بلکه اغلب نقشی حیاتی و مهم در انجام تکالیف و فعالیت‌های شناختی به‌عهده دارند و از اشتباهاتی که با تصور مفهوم آمیخته شده است، جلوگیری می‌کنند. برای مثال، نقطهٔ زاویه‌دار روی نمودار یک تابع، ممکن است براساس تصور مفهوم، یک نقطهٔ عطف محسوب شود، اما براساس تعریف نقطهٔ عطف، چون در این نقطه مماس واحد وجود ندارد، نقطهٔ عطف در نظر گرفته نمی‌شود.

### مدل شناختی تصور مفهوم و تعریف مفهوم

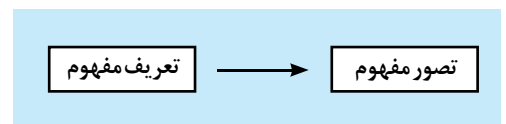
تال و وینر (۱۹۸۱)، فرایند یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان را بررسی کردند. آن‌ها تفاوت بین استدلال در ریاضی پیشرفته را که براساس تعریف‌های رسمی است- تعریف مفهوم- و استدلالی که دانش‌آموزان

براساس درک خود از مفهوم- تصور مفهوم- به کار می‌برند، توضیح دادند. تال و وینر، مدل خود را برای توصیف بعضی عامل‌هایی که ممکن است منشأ تناقض شناختی یادگیرندگان- شرکت‌کنندگان در تحقیق آن‌ها دانش‌آموزان پایه دوم دبیرستان و دانشجویان دانشگاه- در مورد مفاهیم حد دنباله، حد توابع و توابع پیوسته باشد به کار بردند (ولا<sup>۱۷</sup>، ۲۰۱۱). تال و وینر، ارتباط متقابل تصور مفهوم و تعریف مفهوم را، حتی زمانی که هر کدام به‌طور مستقل شکل گرفته باشند، به‌صورت زیر مدل‌سازی کردند (شکل ۳).



شکل ۳. فرایند شکل‌گیری مفهوم

وینر (۱۹۹۱) ادعا می‌کند که تعداد زیادی از معلمان ریاضی دوره متوسطه و مدرسان دانشگاهی، فرایند شکل‌گیری مفهوم را فرایندی تک مرحله‌ای می‌دانند (شکل ۴) و معتقدند که تصور مفهوم، به‌وسیله تعریف مفهوم و تحت کنترل آن شکل می‌گیرد.

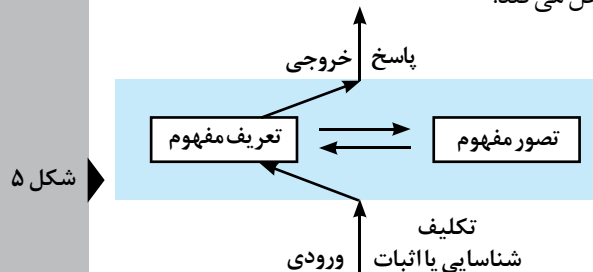


شکل ۴. شکل‌گیری یک مفهوم رسمی

وینر (۱۹۹۱) بیان می‌کند که اگر، برای مثال، از دانش‌آموزی خواسته شود که تشخیص دهد از بین چند نمودار، کدام یک می‌تواند معرف یک تابع باشد، بیشتر معلمان باور دارند که دانش‌آموز، براساس تعریف مفهوم، به این مسئله پاسخ می‌دهد و برایش استفاده از تصور مفهوم اهمیتی ندارد (حمز<sup>۱۸</sup>، ۲۰۱۲). وینر (۱۹۹۱) مدعی است که پاسخ‌های دانش‌آموزان با توجه به تعریف مفهوم، طی یکی از سه فرایند زیر ارائه می‌شود:

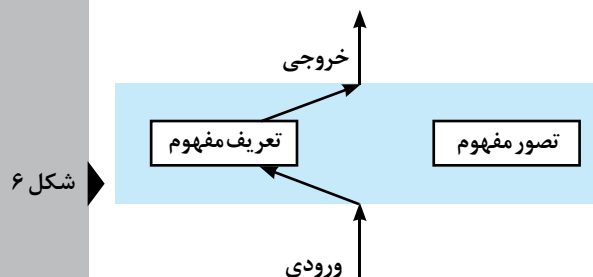
الف. در این حالت، دانش‌آموز، پس از بررسی مسئله، ابتدا تعریف مفهوم را به‌خاطر می‌آورد. بعد به‌کمک تعریف، تصورات وابسته به آن مفهوم از جمله مثال‌ها، نامثال‌ها و به‌طور کلی تجاری را که از دست‌ورزی با آن‌ها، مفهوم را شکل داده است به‌خاطر

می‌آورد. پس از طی این مراحل، جنبه‌های مختلف تعریف مفهوم را درک می‌کند و نحوه به‌کارگیری آن را در مسئله تشخیص می‌دهد و به‌کمک آن مسئله را حل می‌کند.



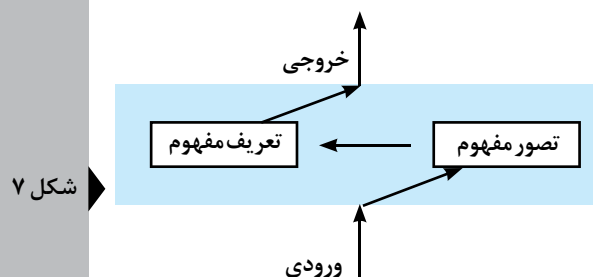
شکل ۵

ب. پس از بررسی مسئله، دانش‌آموز بدون توجه به تصورات مفهوم خود، مستقیماً تعریف مفهوم مناسب با زمینه مسئله را تشخیص و براساس آن پاسخ می‌دهد.



شکل ۶

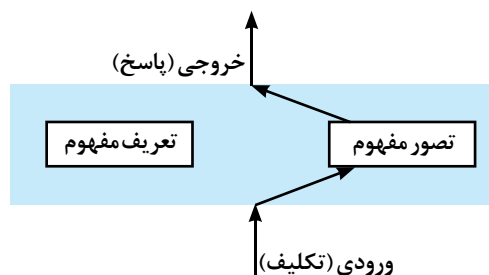
پ. پس از بررسی مسئله، دانش‌آموز ابتدا تصورات وابسته به مفهوم خود را، مانند مثال‌ها و نامثال‌های<sup>۱۹</sup> کمکی و تجاری که از دست‌ورزی با مفهوم در موقعیت‌های مختلف به‌دست آورده است در نظر می‌گیرد و به‌کمک آن‌ها، تعریف مفهوم را به‌یاد می‌آورد یا بازسازی می‌کند. نهایتاً براساس تعریف مفهوم، مسئله را حل می‌کند.



شکل ۷

اما براساس مدل تال و وینر، این شکل‌ها (۳ و ۴ و ۵)، عملاً آنچه را که اتفاق می‌افتد، نشان نمی‌دهند.

بلکه چیزی که در عمل اتفاق می‌افتد، شبیه فرایندی است که در شکل زیر، توصیف شده است (شکل ۸):



شکل ۸

براساس این مدل، دانش‌آموزان اغلب براساس تصور مفهوم خودشان به مسئله پاسخ می‌دهند که وینر (۱۹۹۱) آن را پاسخ شهودی<sup>۲۰</sup> می‌نامد.

به باور بسیاری از معلمان، موقعی که یادگیرنده درگیر انجام یک فعالیت شناختی می‌شود، هر دو سلول تصور مفهوم و تعریف مفهوم وی فعال می‌شوند؛ باوری که مدل وینر آن‌ها را به چالش می‌کشد.

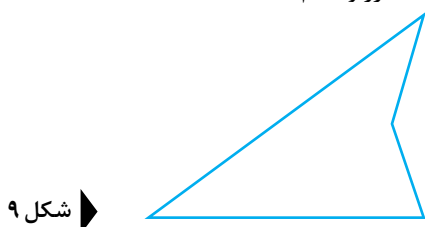
### بازتاب مدل مفهومی تال و وینر در تحقیقات آموزش ریاضی

مدل مفهومی تال و وینر چارچوب مفیدی برای مؤلفان کتاب‌های درسی، آموزشگران و معلمان ریاضی جهت درک فرایندهای ذهنی دانش‌آموزان است. این مدل در مطالعات بسیاری از جمله تال و وینر (۱۹۸۱)، هرشکوویتز<sup>۲۱</sup> و وینر (۱۹۸۴)، هرشکوویتز (۱۹۸۹)، وینر (۱۹۹۱)، روسکین<sup>۲۲</sup> و رولکا<sup>۲۳</sup> (۲۰۰۷)، جوادی (۱۳۸۶) و محتشم و همکاران (۱۳۹۱)، برای بررسی مفاهیم تابع، خط مماس بر منحنی، پیوستگی، حد دنباله، انتگرال و عدد زوج، از منظر دانش‌آموزان، دانشجو-معلمان، دانشجویان و معلمان ریاضی به کار گرفته شده است. برای نمونه، می‌توان به مطالعاتی که هرشکوویتز و وینر (۱۹۸۴) و هرشکوویتز (۱۹۸۹) انجام دادند، اشاره کرد. در این مطالعات، علاوه بر دانش‌آموزان، معلمان و دانشجو-معلمان نیز شرکت کردند که همه آن‌ها، باید تکالیف مشابهی را حل می‌کردند. در هر مطالعه، دو پرسش‌نامه به شرکت‌کنندگان داده شده بود؛ در پرسش‌نامه اول از آن‌ها خواسته شده بود در بین مجموعه‌ای از اشکال هندسی شامل زاویه، مثلث متساوی‌الساقین، مثلث قائم‌الزاویه و چهارضلعی، قطر

را مشخص کنند. در پرسش‌نامه دوم، از آن‌ها خواسته شده بود که مثال‌هایی از یک مفهوم نظیر ارتفاع مثلث، ارائه کنند.

از جمله مهم‌ترین نتایج حاصل از این دو مطالعه، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- زمانی که از معلمان، دانشجو-معلمان و دانش‌آموزان خواسته شد تکالیف مشابهی انجام دهند، بین سه گروه، بدفهمی‌های یکسانی اتفاق افتاد، یعنی «تصور مفهوم» معلمان و دانشجو-معلمان، فقط کمی از «تصور مفهوم» دانش‌آموزان، بهتر بود (هرشکوویتز، ۱۹۸۹؛ هرشکوویتز و وینر، ۱۹۸۴؛ نقل شده در گاتپیرز و جیم، ۱۹۹۹).
- تصور مفهوم تعداد زیادی از معلمان، دانشجو-معلمان و دانش‌آموزان، شامل تعداد کمی از مثال‌های خاص، شکل‌ها و مستقل از تعریف مفهوم آن‌هاست. برای مثال، یک تصور مفهوم مرسوم از قطر چهارضلعی، معمولاً شامل قطرهای داخلی است. لذا فقط یک قطر برای چهارضلعی‌های مقعر<sup>۲۴</sup> (شکل ۹) رسم می‌شود (هرشکوویتز، ۱۹۸۹؛ هرشکوویتز و وینر، ۱۹۸۴؛ نقل شده در گاتپیرز و جیم، ۱۹۹۹).



شکل ۹

- در سؤالاتی که مربوط به شناسایی مفهوم می‌شود، حضور «تعریف مفهوم»، تقریباً هیچ تأثیری روی پاسخ‌ها نداشته است. اما در سؤالی که از دانش‌آموزان خواسته شده بود تا ارتفاع مثلث‌ها را رسم کنند، پاسخ‌هایی که با تعریف ارائه شده بود، به‌طور قابل توجهی بهتر بود (هرشکوویتز، ۱۳۸۹؛ هرشکوویتز و وینر، ۱۹۸۴؛ نقل شده در گاتپیرز و جیم، ۱۹۹۹).

مثال دیگر، مطالعه روسکین و رولکا (۲۰۰۷) درباره یادگیری مفهوم انتگرال معین است که توسط دانش‌آموزان دبیرستانی انجام شد. پژوهشگران، پرسش‌نامه‌ای درباره مفهوم انتگرال و به‌منظور آشکار کردن «تصور مفهوم» دانش‌آموزان طراحی کردند. بر اساس نتایج به‌دست آمده، آن‌ها دریافتند که تعریف‌ها، نقش حاشیه‌ای در یادگیری دانش‌آموزان دارند و

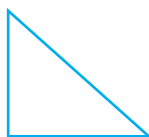
استدلال‌های آن‌ها درباره مفهوم انتگرال به‌طور عمده، براساس «تصور مفهوم» و شهود، صورت می‌گیرد. در ایران نیز دو تحقیق با استفاده از این مدل، یکی توسط جوادی (۱۳۸۶) و دیگری محتشم، غلام‌آزاد و ریحانی (۱۳۹۱) انجام شده است. جوادی (۱۳۸۶) در مطالعه خود، به بررسی درک دانشجویان از مفهوم تابع براساس «تصور مفهوم» و «تعریف مفهوم» آن‌ها پرداخت. داده‌های این پژوهش از طریق پرسش‌نامه‌ای شامل ۸ سؤال جمع‌آوری شد. سه سؤال اول، حاوی سه نمودار بود و از شرکت‌کنندگان خواسته شده بود تا نشان دهند کدام یک از آن‌ها، معرف تابع هستند. در سؤال چهارم و پنجم، از دانشجویان خواسته شده بود که مثال‌هایی از دو تابع خاص ارائه کنند که در کتاب درسی، با آن‌ها به‌عنوان «توابع دارای نام» (ثابت و دیریکله) آشنا شده‌اند و پاسخ‌های خود را توضیح دهند. تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان نشان داد که «تصور مفهوم» بیشتر دانشجویان از تابع، به‌صورت یک قانون یا یک ماشین است. جوادی (۱۳۸۶)، نتیجه گرفت که بخشی از «تصور مفهوم» دانشجویان که تابع را یک قانون می‌داند، مانع از درک «تعریف مفهوم» تابع می‌شود. از این گذشته، محتشم، غلام‌آزاد و ریحانی (۱۳۹۱) نیز در مطالعه خود، دو پرسش‌نامه بین دانش‌آموزان پایه دوم دبیرستان توزیع کردند. محققان در پرسش‌نامه اول، از دانش‌آموزان خواستند که عدد زوج را تعریف کنند. پرسش‌نامه دوم نیز حاوی سه سؤال بود که در سؤال اول، دانش‌آموزان باید تعیین می‌کردند که از بین چندین تعریف برای عدد زوج، کدام‌ها تعریفی برای عدد زوج محسوب می‌شوند. در سؤال دوم و سؤال سوم هم، از دانش‌آموزان خواسته شده بود «مناسب‌ترین» و «ضعیف‌ترین» تعریف عدد زوج را از دیدگاه خود مشخص کرده و پاسخشان را توضیح دهند. تجزیه و تحلیل داده‌ها نشان داد که تصور دانش‌آموزان از عدد زوج، در مراحل مختلف درک مفهوم، مانند ارائه تعریفی برای مفهوم و انتخاب از بین تعریف‌های مختلف مفهوم، «تصور مفهوم» نقش اصلی را به‌عهده دارد.

## دسته‌بندی تصورات مفهوم براساس مدل تال و وینر

طبق مدل تال و وینر، زمانی که به یادگیرندگان تکلیفی داده می‌شود، تنها بخشی از سلول «تصور

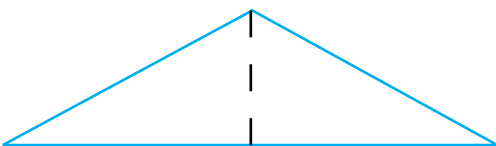
مفهوم»، در لحظات معینی فعال می‌شود. مثلاً، برای اشخاص مختلف، بخش‌های متفاوتی از سلول تصویری و در لحظات متفاوت، فراخوانده می‌شود. در نتیجه، برای درک فرایند شناختی یادگیرندگان، مطالعه «تصورات مفهوم» وابسته به یک مفهوم معین ضرورت دارد. براساس نتایج حاصل از به‌کارگیری این مدل در پژوهش‌های متعدد و متنوع، گاتیپرز و جیم (۱۹۹۹)، «تصور مفهوم» افراد را در سه نوع رفتار<sup>۲۵</sup> زیر شناسایی کردند:

● **افراد با تصور مفهوم غیر منسجم:** تصور مفهوم این افراد، از تعداد کمی مثال مربوط به یک مفهوم خاص، به‌عنوان «مثال‌های نوعی<sup>۲۶</sup>» و برخی ویژگی‌های آن مثال‌ها، ایجاد شده است. این افراد، تکلیف‌های جدیدی را که به آن‌ها ارائه می‌شود، با مثال‌ها و ویژگی‌هایی که در «تصور مفهوم» خود دارند، مقایسه می‌کنند. بنابراین، اگر تکلیفی نیازمند درک جنبه دیگری از مفهوم باشد که با آن مثال‌های نوعی متفاوت باشد، آن جنبه را کنار می‌گذارد. برای نمونه، «تصور مفهوم» بسیاری از دانش‌آموزان از یک مثلث قائم‌الزاویه، اغلب شامل یک ضلع قائم و یک ضلع افقی است (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

● **افراد با تصور مفهوم تا حدی منسجم:** در تصور مفهوم این افراد، علاوه بر تعدادی مثال، برخی ویژگی‌های کلی‌تر مفهوم‌ها نیز وجود دارند که برای بررسی تکلیف‌هایی مربوط به آن‌ها، به‌کار می‌روند. به‌عنوان نمونه، بسیاری از دانش‌آموزان، «تصور مفهوم»‌شان از مثلث، یک سه ضلعی است که فقط زاویه حاده دارد و در نتیجه، همه ارتفاع‌ها داخل مثلث می‌افتند. بنابراین، از نظر این دانش‌آموزان، مثلی با زاویه منفرجه، تنها یک ارتفاع و آن هم ارتفاع وارد از رأس زاویه منفرجه دارد (شکل ۱۱).



شکل ۱۱

آشکار کردن  
«تصور مفهوم»  
دانش آموزان،  
نه تنها درک  
بهتری از نحوه  
تفکر آن‌ها را  
نشان می‌دهد،  
بلکه رویکردهای  
بهتری را هم  
برای تدریس  
پیشنهاد می‌کند

● افراد با تصور مفهوم منسجم: این افراد، «تصور مفهوم» منسجم و کاملی دارند، به‌طوری‌که این تصور، جنبه‌های مختلف مفهوم را دربرمی‌گیرد. تصور مفهوم این افراد، شامل مثال‌های متنوع، همه ویژگی‌های مهم این مثال‌ها و روابط بین آن‌هاست. این دانش‌آموزان می‌توانند با توجه به کلیت این مثال‌ها و امکان تحلیل ویژگی‌های اصلی مفهوم، در انجام تکلیف‌های متنوع مرتبط با مفهوم، بهتر عمل کنند. برای نمونه، این دانش‌آموزان با انواع مثلث، ویژگی‌ها و تفاوت‌هایشان و نحوه رسم اجزای داخلی آن‌ها کاملاً آشنا هستند.

در حقیقت، می‌توان گفت آشکار کردن «تصور مفهوم» دانش‌آموزان، نه تنها درک بهتری از نحوه تفکر آن‌ها را نشان می‌دهد، بلکه رویکردهای بهتری را هم برای تدریس پیشنهاد می‌کند. به هر حال، اغلب آموزشگران و معلمان ریاضی دریافته‌اند که دانش‌آموزان، به واسطه مجموعه خاصی از مثال‌ها، ممکن است «تصور مفهوم» اشتباهی در ذهن خود ایجاد کرده باشند. یعنی، روش ارائه مفهوم‌ها و تعریف‌ها به یادگیرندگان ریاضی، «تصور مفهوم»، «تعریف مفهوم شخصی» و ارتباط بین آن‌ها را شکل می‌دهد تا زمینه مناسب را برای یادگیری معنادار «تعریف مفهوم»، فراهم کند.

### بحث و نتیجه‌گیری

در اواخر دهه ۱۹۷۰ و دهه ۱۹۸۰ میلادی، چگونگی تأثیر مثال‌ها و دست‌ورزی‌ها و تجارب پیشین یادگیرندگان ریاضی بر یادگیری تعریف‌های رسمی مفهوم‌های ریاضی و مشکلات آن‌ها در این باره، موضوعی بود که ذهن بسیاری از آموزشگران ریاضی را به خود مشغول کرد. این دغدغه، نیروی محرکه‌ای قوی برای انجام تحقیقات در این حوزه شد که حاصل آن‌ها، در قالب مقالات متعددی منتشر شد (شوارزنبرگر<sup>۲۷</sup> و تال، ۱۹۸۷؛ تال، ۱۹۷۷؛ وینر، ۱۹۸۰؛ وینر و هرشکوویتز، ۱۹۸۰؛ کورنو<sup>۲۸</sup>، ۱۹۸۱). در این بین، علاقه‌های مشترک نظری و تجربی تال و وینر (۱۹۸۱) باعث شد که آن‌ها بتوانند تلاش‌های مستقل خود را در قالب یک تحقیق طراحی و اجرا کنند. یافته اصلی این تحقیق، تبیین «مدل شناختی تصور مفهوم و تعریف مفهوم» بود. این مدل، ضمن توضیح ارتباط بین «تصور مفهوم» و «تعریف مفهوم» و نقش آن‌ها در شکل‌گیری

یک مفهوم ریاضی، ابزار مناسبی برای تحلیل فرایندهای شناختی یادگیرنده فراهم می‌کند. همچنین، این مدل کمک می‌کند تا تناقض‌های احتمالی بین «تصور مفهوم» و «تعریف مفهوم» یادگیرندگان، شناخته شود. شناسایی این تناقض‌ها و چگونگی شکل‌گیری آن‌ها، به معلمان این امکان را می‌دهد تا رویکردهای تدریسی مناسب‌تری انتخاب کنند.

به اعتقاد وینر (۱۹۹۱)، در حالی که از نظر بسیاری از معلمان ریاضی و مؤلفان کتاب‌های درسی ریاضی، ارائه تعریف رسمی یک وظیفه می‌باشد، اما آن‌ها نمی‌توانند نسبت به اثرات شناختی این تعریف‌ها بر شکل‌گیری تفکر ریاضی و تصور مفهوم دانش‌آموزان، بی‌تفاوت باشند. بنابراین، با وجود اهمیتی که تعریف‌های رسمی در ریاضی دارند، ارائه به‌موقع آن‌ها مهم است و ضروری است که با اهداف آموزشی در نظر گرفته شده برای دانش‌آموزان تناسب داشته باشد. به عبارت دیگر، بسیاری از تکلیف‌ها، تنها با رجوع به تصور مفهوم و بدون نیاز به تعریف رسمی، فهمیده و انجام می‌شود. در این صورت، با تأکید بر «تصور مفهوم» در کنار ارائه تعریف‌ها، لازم است زمینه ایجاد مناسب آن از طریق عرضه مجموعه‌ای از مثال‌ها که جنبه‌های مختلف مفهوم را نشان می‌دهند، فراهم شود. در عین حال، به دلیل اینکه توانایی کار با تعریف‌های رسمی برای موفقیت در ریاضیات ضروری است، پس لازم است که در طراحی برنامه‌های درسی ریاضی برای دانش‌آموزانی که در رشته‌هایی تحصیل می‌کنند که ریاضی در آن‌ها، نقش زیربنایی و بنیادی دارد، «تصور مفهوم»‌های مناسب برای آمادگی جهت درک مناسب از «تعریف مفهوم» و کاربرد آن در زمینه‌های مختلف، ایجاد شود. این کار زمانی امکان‌پذیر است که به دانش‌آموزان، تکلیف‌هایی داده شود که تنها با رجوع به «تصور مفهوم»، درک و انجامشان ممکن نباشد (وینر، ۱۹۹۱). شناسایی مثال‌ها و نامثال‌های<sup>۲۹</sup> یک مفهوم، حل مسئله و اثبات‌های ریاضی، از جمله فعالیت‌هایی هستند که باعث می‌شوند دانش‌آموزان، به جای استفاده صرف از «تصور مفهوم»، «تعریف مفهوم» را هم به کار گیرند. از طرف دیگر، نتایج حاصل از تحقیقات مرتبط نشان می‌دهد که در بعضی موارد، معلمان نیز مشکلات

نقش تعریف در یادگیری ریاضی. مقاله ارائه شده در دوازدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، شهریورماه ۱۳۹۱، سمنان، اداره آموزش و پرورش سمنان

3. Gutierrez, A., & Jaime, A. (1999). Pre-service primary teachers' understanding of the concept of altitude of a triangle. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2, 253-275.
4. Hamza, Safia F. (2012). *A Study of Concept Images and Concept Definitions related to Metric Spaces*. PhD thesis, National University of Ireland Maynooth.
5. Rosken, B., & Rolka, K. (2007). Integrating Intuition: The Role of Concept Image and Concept Definition for Students' Learning of Integral Calculus. *The Montana Mathematics Enthusiast*. Monograph 3, pp.181-204.
6. Schwarzenberger, R. L. E. and Tall, D. O. (1978). Conflict in the learning of real numbers and limits, *Mathematics Teaching*, 82, 44-9
7. Tall, D. O. (1977a). Cognitive conflict and the learning of mathematics. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Utrecht, Holland.
8. Tall, D. (1988). Concept Image and Concept Definition, Senior Secondary Mathematics Education, (ed. Jan de Lange, Michiel Doorman), *OW&OC Utrecht*, 37-41.
9. Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and Concept Definition in Mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
10. Vela, M. J. (2011). A Snapshot of Advanced High School Students' Understanding of Continuity.
11. Vinner, S. (1976). The Naive Concept of Definition in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 413-429.
12. Vinner, S. (1983). Concept definition, Concept Image and the Notion of Function. *Math. Edu. Sci. Technol.* VOL. 14, NO. 3, 293-305.
13. Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concepts of Functions. *Journal for Research in Mathematics Education*. 20 (5), 356-366.
14. Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D.O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.
15. Vong, M. C. (1989). *Concept Image and Concept Definition in the Calculus: A Comparison between their Occurrence in History and in the Class*. Unpublished Master Thesis, Concordia University. Montreal, Quebec, Canada.
16. Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying Definitions: A Case of a Square. *Educational Studies in Mathematics*. 69:131-148.

این مقاله، با همکاری سرکار خانم دکتر سهیلا غلام آزاد و سرکار خانم دکتر زهرا گویا بازسازی شده، بدین وسیله، از آن‌ها تشکر می‌کنم.  
(نویسنده)

مشابهی دارند. یعنی در فرایند یادگیری یک مفهوم، شکاف موجود بین «تصور مفهوم» و «تعریف مفهوم»، به دانش آموزان منحصر نمی‌شود. بلکه در برخی موارد، معلمان نیز به این مشکل دچارند که این نیز به نوبه خود، ممکن است در فرایند یادگیری دانش آموزان، به طور جدی اختلال ایجاد کند. در این رابطه، مدل شناختی تال و وینر در تدوین برنامه‌های آموزش معلمان ریاضی، می‌تواند به طور جدی مورد توجه قرار گیرد تا آموزشگران معلمان با استفاده از آن، قادر به تربیت معلمانی باشند که دارای «تصور مفهوم»‌های قوی و آمادگی برای درک «تعریف مفهوم»‌ها باشند.

#### پی‌نوشت‌ها

1. Zazkis
2. Leikin
3. Concept Image
4. Concept Definition
5. Compartmentalization
6. Tall
7. Vinner
8. Piaget
9. Tarski
10. Mental Imagery
11. Frame of Reference
12. Vong

۱۳. تصویر ذهنی یک اسم (یا یک عبارت) معین در ذهن هر شخص، به عنوان مجموعه همه تصاویر (اطلاعات) وابسته با آن اسم (یا عبارت اسمی) تعریف می‌شود.

14. Evoked Concept Image
15. Giraldo
16. Dreyfus
17. Vela
18. Hamza
19. Nonexamples
20. Intuitive Response
21. Hershkowitz
22. Rosken
23. Rolka

۲۴. چهار ضلعی که یک زاویه آن، از ۱۸۰ درجه بیشتر است.

25. Behavior
26. Typical Examples
27. Schwarzenberger
28. Cornu
29. Nonexamples

#### منابع

۱. جوادی، مهدی (۱۳۸۶). **تصور مفهوم و تعریف مفهوم از مفهوم تابع**. پایان نامه کارشناسی ارشد منتشر نشده آموزش ریاضی. دانشگاه شهید بهشتی، تهران.
۲. محتشم، زهرا؛ غلام آزاد، سهیلا و ریحانی، ابراهیم (۱۳۹۱).

## اشاره

بحث دوزبانگی و حل مسائل کلامی ریاضی، برای بسیاری از پژوهشگران آموزش ریاضی، موضوعی جذاب و پراهمیت بوده و هست. به خصوص در کشورهایی که از تنوع قومی و زبانی چشمگیری برخوردارند، این مطالعات بیشتر انجام شده است. همچنین، با موج شدید مهاجرت‌ها در سراسر دنیا، چالش‌هایی که مسئله «زبان» به وجود آورده، نظام‌های آموزشی را وادار به سرمایه‌گذاری پژوهشی در این حوزه کرده است. در این مقاله و به خصوص در بررسی پیشینه تحقیق، از واژه‌های گوناگون «زبان مادری»، «زبان دوم»، «زبان آموزش»،

## زبان آموزش: زبانی که آموزش فرد، با آن

شروع می‌شود، زیرا زبان رسمی آموزش در یک کشور یا نظام آموزشی است بدین سبب، اغلب زبان دوم و زبان آموزش، یکی گرفته می‌شوند و انتظار می‌رود که فرد به تدریج به هر دو زبان مسلط شده و به اصطلاح، «دوزبانه» شود.

## زبان وارداتی: زبانی است که منحصر به

آموزش رسمی / مدرسه‌ای است و دانش‌آموزان حاضر نیستند که نسبت به آن، «دوزبانه» شوند. یعنی در زندگی واقعی خود، از زبان وارداتی به عنوان ابزار ارتباطی، استفاده نمی‌کنند.

## زبان طبیعی: عمدتاً برای برقراری ارتباط

به هر شکل گفتاری، علامتی یا نوشتاری است.

# دوزبانگی

## و حل مسائل کلامی ریاضی

صابر قدمی، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی شهرستان تکاب  
زهره گویا، دانشگاه شهید بهشتی

## زبان رسمی: هر زبان رسمی، دارای واژه‌ها

و اصطلاحات اختصاصی و منحصر به فرد است. ریاضی نمونه‌ای از زبان رسمی است.

## کلیدواژه‌ها: حل مسئله کلامی، دوزبانگی،

ریاضی سال اول متوسطه

## طرح مسئله

آموزش ریاضیات، همواره جزو یکی از بحث‌های مهم و چالش برانگیز در برنامه درسی مدرسه‌ای بوده و هست. این مهم برای محققان، آموزشگران ریاضی و آنان که سابقه تدریس ریاضیات مدرسه‌ای را داشته‌اند، امری واضح است. دلایل این امر می‌تواند سخت

## «زبان وارداتی»، «زبان طبیعی» و «زبان

رسمی» استفاده شده است که شاید برای خوانندگانی که با این حوزه آشنا نباشند، جای سؤال بیشتری داشته باشد. بدین جهت، قبل از ورود به بحث اصلی، اشاره کوتاهی به هر یک می‌شود تا تمایز بین آن‌ها روشن شود. زیرا اگرچه برای افراد معمولی، شاید این دقت ضرورت نداشته باشد، اما برای سیاست‌گذاران و تصمیم‌گیرندگان و تصمیم‌سازان آموزشی و همچنین معلمان مناطق دوزبانه، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

## زبان مادری: زبانی که کودک با آن، تکلم

را شروع می‌کند.

زبان دوم: هر زبانی به غیر از زبان مادری

بودن ذاتی ریاضی که نیازمند کار فکری و استدلال و استنتاج است، ذهنیت ایجاد شده در دانش‌آموزان حتی قبل از ورود به مدرسه یا روش‌های مختلف آموزش ریاضی باشد. با وجود این، گاهی اوقات شرایطی پیش می‌آید که به سختی کار می‌افزاید. یکی از موضوعات و مسائلی که به فراوانی در کتاب‌های درسی ریاضی وجود دارد، بحث مربوط به مسائل کلامی و حل آن‌هاست. تحقیقات انجام شده در این زمینه (هگارتی، ۱۹۹۵؛ چارلز، ۲۰۰۴)، حکایت از این دارد که مسائل کلامی، جزو یکی از سخت‌ترین مسائل برای دانش‌آموزان و حتی برخی دانشجویان به حساب می‌آید، به‌خصوص وقتی که زبان این مسائل، با زبان مادری دانش‌آموزان فرق دارد. به‌طور مشخص، با توجه به اینکه در ایران زبان رسمی آموزش فارسی است و تمام کتاب‌های درسی به زبان فارسی نگارش شده‌اند، عامل زبان به‌عنوان یک مداخله منفی در آموزش دانش‌آموزانی عمل می‌کند که زبان مادری آنان فارسی نیست. برای نمونه، ترکیب ساختار ویژه زبان ریاضی با زبان فارسی و تشکیل یک مسئله کلامی به زبان فارسی، کار حل مسئله را برای دانش‌آموزان ترک‌زبانی که زبان فارسی برای آنان به‌عنوان «زبان دوم»<sup>۱</sup> و در بیشتر مناطق به‌عنوان «زبان وارداتی»<sup>۲</sup> محسوب می‌شود، مشکل‌تر می‌کند. چرا که ساختار مسائل کلامی، به‌گونه‌ای است که دانش‌آموز ابتدا باید بتواند مسئله را بخواند، توانایی فهمیدن مسئله و بازنمایی آن را داشته باشد و بتواند داده‌ها و خواسته‌های مسئله را به زبان ریاضی بیان کند و بعد، برای حل آن اقدام کند. اما وقتی این مسائل در زبان دیگری برای دانش‌آموزان مطرح می‌شود که گاهی نمی‌توانند مسئله را به درستی بخوانند و استراتژی‌های درک مطلب محدودی در زبان مسئله دارند، حتی کار به فهمیدن و بازنمایی مسئله هم نمی‌کشد چه رسد به حل آن؛ در نتیجه مسئله را بدون پاسخ رها می‌کنند. از نظر سیاست‌گذاری‌های آموزشی، درک تمایز بین «زبان دوم» و «زبان وارداتی» حائز اهمیت است. دانش‌آموز دارای «زبان دوم» یا دوزبانه

به هر دو زبان تسلط دارد. در حالی که اگر یک زبان به‌عنوان «زبان وارداتی» برای دانش‌آموز به حساب آید، تنها مواجهه وی با آن زبان، فقط در محیط مدرسه خواهد بود و در محیط‌های اجتماعی خود، با زبان مادری‌اش ارتباط برقرار می‌کند. بی‌توجهی به عامل «دوزبانگی» در آموزش ریاضی در حالی است که معیار و ملاک رسمی برای سنجش مهارت‌های زبانی دانش‌آموزان در زبان دوم وجود ندارد و اقدامات لازم در این زمینه، صورت نگرفته است.

با این توصیف، شاید این انتظار بجاست که دانش‌آموزانی که زبان مادری آنان فارسی است، در حل مسائل کلامی در کتاب‌های درسی ریاضی که به زبان فارسی است، مشکلی نداشته باشند، زیرا این دانش‌آموزان، توانایی خواندن مسئله و فهمیدن اصطلاحات مطرح شده در مسئله را دارند و اگر در ادامه حل مسئله با مشکل روبه‌رو شوند، ناشی از ضعف دانش ریاضی و آشنا نبودن آن‌ها با استراتژی‌های حل مسائل کلامی است. اما دانش‌آموزان دوزبانه در ایران، که در اینجا به‌طور خاص دانش‌آموزان مناطق ترک‌زبان مورد نظر است، برای حل مسائل کلامی، با سختی‌های بیشتری مواجه‌اند که ریشه آن، در بیان این مسائل به زبان دوم آن‌ها یعنی زبان فارسی است. این دانش‌آموزان، ابتدا باید صورت مسئله را به زبانی بخوانند که آشنایی کامل با آن ندارند و حتی گاهی در حرف زدن به آن زبان با مشکل مواجه‌اند. این امر می‌تواند انگیزه دانش‌آموزان را برای سعی در خواندن دوباره و چندباره مسئله و فهمیدن آن، تحت تأثیر قرار دهد. تحقیق انجام شده بر روی دانش‌آموزان دوزبانه در آموزش و حل مسائل کلامی توسط مولیگان (۲۰۱۳)؛ بیان‌گر چنین واقعیتی است. این تحقیق نشان می‌دهد که برای حل این مشکل، تأثیر مداخله‌هایی مانند اینکه معنای کلمات و عبارات مطرح شده در مسائل کلامی به زبان دوم هم گفته شود، بسیار ناچیز است و حتی در صورت اثربخشی چنین کاری، این مداخله فقط در کلاس درس می‌تواند صورت گیرد چرا که در آزمون‌های پایانی و سراسری، ممکن است دانش‌آموز با

مسائل کلامی،  
جزو یکی از  
سخت‌ترین مسائل  
برای دانش‌آموزان  
و حتی برخی  
دانشجویان به  
حساب می‌آید،  
به‌خصوص وقتی  
که زبان این مسائل،  
با زبان مادری  
دانش‌آموزان فرق  
دارد

یافته‌های  
تحقیقی هم‌چنان  
حاکمی از این  
حقیقت است  
که آموزش‌های  
شناختی  
به تنهایی،  
دانش‌آموزان  
را قادر  
نساخته‌اند که  
از توانایی‌های  
خود، در  
موقعیت‌های  
جدید  
استفاده کنند

مسئله‌ای روبه‌رو شود که برخی اصطلاحات خاص مربوط به آن را در زبان مادری خود نمی‌داند.

اهمیت این موضوع برای محققان و آموزش‌گران ریاضی، باعث شده است که پژوهش‌های زیادی در سراسر دنیا، در ارتباط با آموزش ریاضی به «زبان دوم» انجام شود. بنابراین، لازم است در ایران نیز، به منظور بهبود کیفیت آموزش و بالا بردن توانایی‌های حل مسئله دانش‌آموزان دوزبانه در مناطق مختلف کشور، توجه ویژه‌ای به این موضوع صورت گیرد.

### ضرورت و اهمیت مسئله

مسئله‌های کلامی ریاضی، هسته اصلی برنامه درسی ریاضی را تشکیل می‌دهند. در بسیاری از کشورها، کتاب‌های درسی و ارزشیابی‌ها، دانش‌آموزان را به حل مسائل کلامی نیازمند می‌کنند. به‌عنوان مثال، گارنر<sup>۳</sup> (۲۰۰۶) ادعا کرد که در آمریکا، بخش اعظمی از برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای، به مسائل کلامی اختصاص دارد. اهمیت مسئله‌های کلامی به حدی است که در اغلب آزمون‌های هوش و استعداد تحصیلی، جایگاه ویژه‌ای به آن‌ها اختصاص داده شده است. با این وجود، پژوهشگران نشان داده‌اند که اغلب دانش‌آموزان و حتی برخی دانشجویان، از عهده حل مسئله‌های کلامی برنمی‌آیند (لوییس و مایر<sup>۴</sup>، ۱۹۸۷). این مطالعات، بعضی از محققان آموزش ریاضی از جمله شونفیلد (۱۹۸۵) و کای<sup>۵</sup> (۱۹۹۸) را، علاقه‌مند به آسیب‌شناسی این پدیده کرد. آنان در مطالعات خود دریافتند که لازمه موفقیت در حل مسائل ریاضی، علاوه بر درک اصول و مفاهیم ریاضی، مجهز بودن به راهبردهای شناختی و فراشناختی است. بر این اساس، جهت رفع مشکلات یادگیرندگان در حل مسائل، بیشتر بر آموزش‌های شناختی از جمله آموزش استراتژی‌ها یا روش‌ها و رهیافت‌های اکتشافی تأکید می‌شود. این در حالی است که یافته‌های تحقیقی هم‌چنان حاکمی از این

حقیقت است که آموزش‌های شناختی به تنهایی، دانش‌آموزان را قادر نساخته‌اند که از توانایی‌های خود، در موقعیت‌های جدید استفاده کنند. کامینز<sup>۶</sup> (۱۹۷۹) و وروزوسا و مولیگان<sup>۷</sup> (۲۰۱۳)، یکی دیگر از عوامل مؤثر را بر نحوه عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل کلامی پدیده «دوزبانی» می‌دانند. یعنی اینکه گاهی دانش‌آموزان مجبور می‌شوند مسائل کلامی را در «زبان دوم» حل کنند در حالی که زبان اصلی آن‌ها نیست و تسلط چندانی به آن ندارند و در محیطی‌های اجتماعی خود، استفاده زیادی از آن نمی‌کنند. مولیگان (۲۰۱۳) معتقد است که یک دلیل مهم عملکرد ضعیف دانش‌آموزان فلیپینی در پاسخ به مسائل کلامی، این است که آن‌ها زبان آموزششان انگلیسی است و مسائل کلامی نیز به زبان انگلیسی مطرح می‌شوند که دانش‌آموزان، تسلط زیادی به آن ندارند.

با توجه به اینکه نویسنده اول این مقاله، دبیر ریاضی در مناطق ترک‌زبان ایران است، بارها شاهد ضعف عملکرد دانش‌آموزان در رابطه با حل مسائل کلامی ریاضی بوده است. بدین سبب، دو سؤال پژوهشی شکل گرفت تا معلوم شود علت این ضعف چیست، و چرا اغلب دانش‌آموزان در این مناطق، در برخورد با مسائل کلامی ریاضی، نسبت به مسائل دیگر، ضعیف‌تر عمل می‌کنند. پیشینه تحقیق نشان داد که این مشکل منحصر به دانش‌آموزان دوزبانه ایرانی نیست، بلکه بسیاری از دانش‌آموزان دوزبانه در کشورهای دیگر نیز در این زمینه مشکل دارند (هگارتی<sup>۸</sup>، ۱۹۹۵). تبدیل عبارات کلامی به زبان ریاضی در صورتی به‌درستی انجام می‌پذیرد که دانش‌آموزان به مهارت‌های زبانی زبان مسئله مجهز باشند تا بتوانند با خواندن مسئله و درک آن و استفاده از دانش ریاضی خود، مسئله را به زبان ریاضی تبدیل کنند، آنگاه به حل مسئله بپردازند. نویسنده اول بیان می‌کند که روزی در کلاس درس ریاضی وقتی از دانش‌آموزی خواستم مسئله کتاب را حل کند، او پس از اینکه چند بار صورت مسئله را

خواند گفت: «یعنی چی؟»، البته او همین را هم به ترکی گفت [من از او خواستم مسئله را به زبان ترکی بیان کند اما توانست فقط بخشی از آن را به زبان ترکی برگرداند و باز هم بقیه آن را متوجه نمی‌شد. نمونه‌هایی از این قبیل از زبان دبیران ریاضی دیگر هم برای او نقل می‌شد و آن‌هایی که در مناطق دوزبانه مشغول به تدریس ریاضی هستند، این امر برایشان ملموس است. با این توصیف، در چنین مواقعی نمی‌شود از دانش‌آموز انتظار داشت که توانایی حل مسئله ریاضی خود را به‌طور کامل بروز دهد.

## مسائل کلامی

آموزشگران ریاضی، تلاش می‌کنند تا چگونگی استفاده از ریاضی را در موقعیت‌های زندگی واقعی، از طریق تدریس ریاضی، به دانش‌آموزان بیاموزند که یکی از ابزارهای این کار، استفاده از مسائل کلامی است. محققان آموزش ریاضی، تعریف‌های متعدد اما مشابهی از مسائل کلامی ارائه کرده‌اند. برای مثال، چارلز<sup>۴</sup> (۲۰۰۴) مسائل کلامی را در زمینه مسائل واقعی دنیای اطراف معرفی می‌کند که در آن مقدار یک یا چند کمیت معلوم، و مقدار یک یا چند کمیت دیگر مجهول است، رابطه بین کمیت‌ها شرح داده شده است و مسئله، به دنبال یافتن یک یا چند کمیت مجهول است. وی ادامه می‌دهد که در حل مسائل کلامی، مشکل، اغلب تلاش برای مشخص کردن کمیت‌های معلوم یا یافتن کمیت‌های مجهول نیست، بلکه برای روشن شدن ارتباط بین کمیت‌ها و فهمیدن این رابطه و انتخاب عملگر مناسب برای نشان دادن این ارتباط‌هاست. به گفته وی، این نوع مسائل ممکن است شامل داده‌های اضافی نیز باشند و یک مسئله ممکن است یک یا چند سؤال مستتر هم داشته باشد که به‌منظور حل آن مسئله، لازم است جواب آن سؤال‌ها را نیز پیدا کرد. درواقع، مسائل کلامی، توضیح‌های کوتاه و طراحی شده‌ای از روابط بین اشیای مختلف هستند که برای

حل، نیاز به راه‌حل‌های ریاضی دارند (مارتین و باسوک<sup>۱</sup>، ۲۰۰۵).

## مسائل کلامی و زبان دوم

هگارتی (۱۹۹۵) معتقد است که یکی از مهم‌ترین استراتژی‌های حل مسائل کلامی، خواندن آن است. حل مسئله‌های کلامی مستلزم فهمیدن مسئله است. فهمیدن صورت مسئله عبارت از ایجاد یک بازنمایی مفهومی از شکل کلامی مسئله به گونه‌ای است که بتوان با توجه به آن، فرایند حل مسئله را تا رسیدن به راه‌حل، طی نمود.

زبان یکی از مؤلفه‌های مهم در یادگیری، فکر کردن، فهمیدن و برقراری ارتباطات میان انسان‌ها است و برای یادگیری ریاضی و به‌خصوص فهمیدن مسئله نیز ضروری و مهم است. زبان با فکر کردن، یادگیری و توسعه شناختی ارتباط دارد. زبان و ارتباطات، عناصر ضروری و اساسی آموزش و یادگیری ریاضی به‌شمار می‌روند و این، از نتیجه تحقیقات انجام شده بر روی دوزبانی آشکار شده است (نیریوردین و آدنقو<sup>۱۱</sup>، ۲۰۰۹). سوفونگ و لی<sup>۱۲</sup> (۲۰۰۹)، ضمن اشاره به اینکه مسائل کلامی حساب و جبر، جزو کلیدی برنامه درسی ریاضی سنگاپور هستند، می‌افزایند که مسائل کلامی، توجهات بیشتری را در ادبیات آموزشی به خود جلب کرده است، زیرا این موضوع، دربرگیرنده یکی از موضوعات سخت در کلاس‌های درس ریاضی است. دلیل این سختی هم، بیشتر به ساختار معنایی مسئله و تأثیرات فهمیدن و خواندن مسئله بر حل مسائل کلامی مربوط می‌شود که هر دو، در ارتباط مستقیم با زبان هستند. از این گذشته، ریاضی به نوبه خود، یک «زبان رسمی» است که بیشتر از لغات دربرگیرنده واژه‌های فنی و کلمات، عبارات و روش استدلال در یک وضعیت داده شده است و توسط زبان طبیعی<sup>۱۳</sup>، با یادگیرندگان ارتباط برقرار می‌کند. اما ریاضی یک زبان طبیعی نیست، زیرا دربرگیرنده واژه‌ها و اصطلاحات اختصاصی و منحصر به فرد است و به دلیل

زبان یکی از  
مؤلفه‌های مهم  
در یادگیری،  
فکر کردن،  
فهمیدن و  
برقراری  
ارتباطات میان  
انسان‌ها است و  
برای یادگیری  
ریاضی و  
به‌خصوص  
فهمیدن مسئله  
نیز ضروری و  
مهم است

## زبان با فکر کردن، یادگیری و توسعه شناختی ارتباط دارد. زبان و ارتباطات، عناصر ضروری و اساسی آموزش و یادگیری ریاضی به شمار می‌روند و این، از نتیجه تحقیقات انجام شده بر روی دوزبانگی آشکار شده است

واژگان خاص و نحوه گفتمانی که دارد، می‌تواند باعث بروز مشکلاتی، به خصوص برای دانش‌آموزانی شود که زبان آموزش، زبان دوم آن‌هاست (بارتون، ۲۰۰۳).

تحقیقات اولیه در یادگیری ریاضی در جمعیت‌های دوزبان، با کارهای جیمز کامینز (۱۹۷۶) آغاز شد. به گفته نی‌ریوردین و اُدُنکو (۲۰۰۹)، پس از کامینز، بررسی اثرشناختی دوزبانگی بر یادگیری ریاضی، با کارهای داو<sup>۱۴</sup> (۱۹۸۳) و کلارکسون<sup>۱۵</sup> (۱۹۹۲) ادامه پیدا کرد. آن‌ها دریافتند که دانش‌آموزانی که در هر دو زبان مهارت دارند، نسبت به دانش‌آموزانی که فقط در یک زبان مهارت دارند، توانایی ریاضی بیشتری از خود نشان می‌دهند و دانش‌آموزانی که در هر دو زبان ضعیف هستند، عملکرد ضعیفی در ریاضی بروز می‌دهند.

این در حالی است که کامینز (۱۹۷۹)، معتقد بود که دوزبانگی، مانع یادگیری نیست و حتی ممکن است مزایای شناختی تسلط به هر دو زبان را نیز داشته باشد. طبق نظریه او، مشکلات حل مسئله در «زبان دوم» صرفاً به خاطر زبان دوم نیست، بلکه به مهارت‌های محدود کودکان در فهم و به کارگیری زبان مسئله مربوط می‌شود.

بنابراین، انتظار می‌رود کودکانی که مسائل کلامی را در زبان اولشان حل می‌کنند، بتوانند همان مسائل را در زبان دیگری که مهارت دارند نیز حل کنند. به گفته وروزسا و مولیگان (۲۰۱۳)، باید توجه داشت که پژوهش‌های کلارکسون (۲۰۰۷) و کلارکسون و داو (۱۹۹۴)، در ارتباط با دوزبانگی و حل مسئله کودکانی است که قادر به استفاده از زبان دوم، در موقعیت‌های دیگر اجتماعی هستند. یک موقعیت متفاوت که ممکن است عامل بازدارنده‌ای در یادگیری ریاضی برای کودکان باشد، زبان دوم به عنوان «زبان وارداتی» است. در این حالت، دانش‌آموز با زبان آموزش، فقط در مدرسه روبه‌رو می‌شود. آن‌ها اشاره می‌کنند که با وجود تحقیقات گسترده در زمینه کلاس‌های چندزبانه، مطالعات اندکی بر روی کودکانی انجام

گرفته است که ریاضی را در زبان وارداتی یاد می‌گیرند. البته به دلیل بروز مسائل اجتماعی ناشی از ضرورت آموزش ریاضی به دانش‌آموزانی که زبان آموزش آن‌ها با زبان مادری‌شان متفاوت است، تعدادی از پژوهشگران آموزش ریاضی، مشغول به تحقیق در این زمینه‌اند که از آن جمله، می‌توان به لئن، کلمنتس و دلکامپو (۱۹۹۰) در گینه نو، ستاتی و بارول<sup>۱۶</sup> (۲۰۰۶) در آفریقای جنوبی و جورگنسن<sup>۱۷</sup> (۲۰۱۱) در استرالیا اشاره نمود. این پژوهشگران دریافتند که کودکان برای فهمیدن کلمات مشابهی که در زبان مادری و زبان رسمی‌شان به یک معنا استفاده نمی‌شوند، نیازمند حمایت قابل توجهی از طرف معلمان خود هستند. در تحقیق دیگری، وروزسا و مولیگان (۲۰۱۳)، با اشاره به یافته‌های پژوهش‌های آدتولا<sup>۱۸</sup> (۱۹۹۰) و برناردو<sup>۱۹</sup> (۱۹۹۹) در رابطه با حل مسائل کلامی، بر «زبان وارداتی» تأکید کرده و اشاره کرده‌اند که بعضی مطالعات نشان می‌دهند دانش‌آموزان فیلیپینی و نیجریه‌ای، حل مسئله را در زبان اولشان آسان‌تر انجام می‌دهند. در حالی که مطالعات دیگری هم نشان می‌دهند که کودکان، لزوماً در حل مسئله کلامی ریاضی در زبان دوم، ناتوان نیستند که از آن جمله، تحقیقات ونگ<sup>۲۰</sup> (۱۹۹۶) و سِکادا<sup>۲۱</sup> (۱۹۹۱) بر روی کودکان اقلیت<sup>۲۲</sup> در آمریکا قابل توجه است. این پژوهشگران تأکید کردند که مقایسه مستقیم این دو نوع تحقیق امکان‌پذیر نیست، زیرا اگرچه برای کودکان در اقلیت آمریکایی نیز زبان رسمی آموزش انگلیسی است که در حکم زبان دوم آن‌هاست، اما آن‌ها از این زبان دوم، یا زبان انگلیسی، به‌طور گسترده‌ای در تعاملات اجتماعی استفاده می‌کنند، در حالی که کودکان فیلیپینی و نیجریه‌ای، با زبان دومشان فقط در مدرسه روبه‌رو می‌شوند.

وروزسا و مولیگان (۲۰۱۳) در تحقیق خود، به بررسی عملکرد دانش‌آموزان فیلیپینی در حل مسائل کلامی که نیازمند استفاده از عملگرهای جمع و تفریق بودند، پرداختند. زبان آموزش دانش‌آموزانی که در این تحقیق شرکت داشتند انگلیسی بود؛ زبانی که فقط در

مدرسه با آن روبه‌رو می‌شدند، ولی تسلط کمی به آن داشتند، چون در محیط زندگی خود به زبان انگلیسی صحبت نمی‌کردند. از نظر این پژوهشگران، این وضعیت عادی ولی حیرت‌آور است، زیرا بعضی از معلمان فیلپینی در استفاده از زبان انگلیسی که زبان تدریس آنان است، روان و سلیس نیستند و این مشکل، نیازمند توجهی خاص است. در این وضعیت، زبان آموزش که می‌تواند ابزاری قوی برای برقراری ارتباط باشد، خود به مانع ارتباط تبدیل می‌شود و دستاورد آن برای یادگیرندگان ریاضی، پایین ماندن سطح درک و فهم ریاضی آن‌هاست. در این تحقیق، وروزسا و مولیگان (۲۰۱۳) به این جمع‌بندی رسیدند که مهم‌ترین مشکلات این دانش‌آموزان در حل مسائل کلامی ریاضی، محدود بودن مهارت‌های رمزگشایی آنان، ناشی از کمبود دانش زبان انگلیسی، و استراتژی‌های محدود خواندن و درک مطلب است. برای نمونه، از نظر آن‌ها، کودکانی که جمله‌های ساده انگلیسی مانند «Alvin had three coins» را هم نمی‌فهمند، موظف به یادگیری ریاضی به زبان انگلیسی می‌شوند. این در حالی است که پژوهشگران تلاش کردند مسائل کلامی را که در زبان دوم طراحی شده بود، مجدداً برای آنان شرح دهند. با این حال، بسیاری از دانش‌آموزان در عمل، فاقد مهارت‌های لازم زبانی برای فهم مسئله به زبان دوم بودند و موفق به ساخت مدل‌های معنایی از موقعیت مسئله نمی‌شدند. در نتیجه، مداخله‌های جزئی مانند توضیح تعریف‌ها و واژگان کلیدی انگلیسی به کار رفته در مسائل کلامی به زبان مادری آن‌ها هم مؤثر واقع نشد. یعنی در چنین شرایطی، تجربه‌های مدرسه‌ای کودکان از زندگی واقعی‌شان حذف می‌شود و نمی‌توان انتظار داشت که آن‌ها بتوانند مسائل کلامی ریاضی را به زبانی حل کنند که آموزش آن زبان، به‌طور معنادار، موضوع آموزش آنان نبوده است. در واقع، محدود کردن کتاب‌های درسی و ارزشیابی‌ها به زبان دوم یا زبان رسمی آموزش، مزایای آموزش در زبان

اول را نادیده می‌گیرد که این امر باعث وارد آمدن ضربات جبران‌ناپذیری بر آموزش ریاضی این دانش‌آموزان دوزبانه می‌شود.

## معرفی یک تحقیق در ایران

نویسنده اول این مقاله، در کلاس‌های درس ریاضی و در رابطه با آموزش حل مسائل کلامی به‌طور دائم شاهد تأثیر عامل زبان بر عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان بوده است. بدین سبب، مصمم شد تا با همکاری نویسنده دوم، این مشکل را به‌صورت منظم، مورد بررسی قرار دهد. برای این کار، تحقیقی با همکاری دانش‌آموزان چهار کلاس ریاضی پایه اول متوسطه در یکی از شهرستان‌های شمال غربی کشور انجام شد که در آن، دانش‌آموزان به مسائل کلامی انتخاب شده از متن کتاب درسی پایه اول متوسطه، پاسخ دادند. برای اطمینان از روایی سؤال‌های آزمون که ابزار جمع‌آوری داده‌ها بودند، یک مطالعه مقدماتی انجام شد و پس از آن، بعضی از سؤال‌های آزمون که دانش‌آموزان را دچار بدفهمی می‌کرد، مورد ویرایش قرار گرفت تا در مطالعه اصلی، جلوی بدفهمی‌های احتمالی ناشی از زبان برای دانش‌آموزان دوزبانه، گرفته شود. به‌طور مشخص، مطالعه مقدماتی نشان داد که ترجمه تحت‌اللفظی، ضرورتاً مؤثر نیست و نمی‌توان منظور و معنای برخی واژگان و اصطلاحات را از این طریق به دست آورد. پس از این مرحله، در مطالعه اصلی، ویرایش‌های زبانی صورت گرفت که باعث شد درصد پاسخ‌های درست به سؤال‌های تصحیح شده، به‌طور چشمگیری افزایش یابد. برای نمونه، به دو مورد از مسئله‌هایی که نیازمند ویرایش زبانی بودند، اشاره می‌شود:

**مسئله ۱: مربع یک عدد، ۱۲ واحد بیشتر از خود آن عدد است. آن عدد را بیابید.**

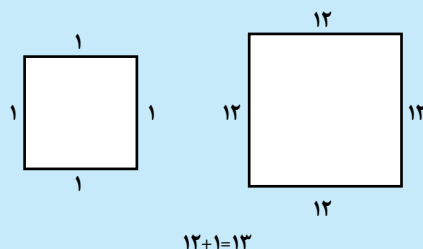
در مطالعه مقدماتی معلوم شد که بسیاری از دانش‌آموزان در پاسخ به این سؤال، از «شکل مربع»، به جای «مفهوم مربع» استفاده کرده بودند. در حالی که دانش‌آموزان در چند فصل

**ویرایش: از تعداد سیبی که احمد داشت، نیمی را به بهنام و نیمی از باقی‌مانده سیب‌ها را به علی داد. احمد برای خودش ۵ سیب باقی ماند. تعداد سیب‌های اولیه او چند تا بوده است؟**  
با این ویرایش زبانی، پاسخ‌های درست دانش‌آموزان رشد قابل توجهی کرد.

### جمع‌بندی

ناتوانی دانش‌آموزان در حل موفقیت‌آمیز مسائل کلامی، یکی از دغدغه‌های اصلی آموزش ریاضی مدرسه‌ای است. دانش‌آموزان با استراتژی‌های حل مسائل کلامی و دانش‌های لازم برای حل این مسائل، آشنایی کمی دارند. یکی از دلایل این امر، کم‌توجهی به آموزش حل مسائل کلامی در برنامه درسی ریاضی است. از نظر معلمان، دلایل اصلی این کم‌توجهی، ناهماهنگی بین نظام آموزشی و نظام ارزشیابی، زمان‌بر بودن آموزش حل مسائل کلامی، ضعف پایه‌ای ریاضی دانش‌آموزان و نقش عامل زبان در آموزش و یادگیری حل مسائل کلامی است. به‌خصوص با توجه به ساختار مسائل کلامی، عامل زبان یکی از عوامل مهم در نحوه عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل کلامی است، زیرا حل این مسائل، مستلزم خواندن و فهمیدن مسئله است. هر زبان، ساختار معنایی خاص خود را دارد که ترکیب آن با زبان رسمی ریاضی، کار را برای دانش‌آموزانی که در زبان مسئله تسلط و توانایی ندارند، مشکل می‌کند. تحقیق مولیگان (۲۰۱۳) نشان داد که وقتی دانش‌آموزان مسائل کلامی را به زبان اولشان حل می‌کنند، عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهند. به‌عبارتی، وقتی مسائل کلامی به زبان مادری به دانش‌آموزان عرضه می‌شود و حل آن نیز در همان زبان خواسته می‌شود، عملکرد آن‌ها بهتر می‌شود. در حقیقت، تحقیقات حوزه آموزش ریاضی و دوزبانگی نشان می‌دهد که لازم است برنامه‌ریزان درسی و مؤلفان کتاب‌های درسی، سختی‌ها و ظرافت‌های آموزش ریاضی را در شرایطی که زبان آموزش،

قبل‌تر از آن، مبحث تبدیل از زبان نوشتاری به زبان ریاضی و برعکس را خواننده بودند. برداشتی که دانش‌آموزان از عبارت «مربع یک عدد» داشتند، رسم مربع‌هایی با ضلع‌های مختلف بود. یک مورد از پاسخ‌های دانش‌آموزان به‌صورت زیر بود:



این نوع پاسخ‌ها، در نتیجه ضعف آن‌ها در دانش معنایی زبانی بود که از دانش‌های لازم برای حل مسائل کلامی ریاضی است و به گفته موارچ<sup>۲۳</sup> (۲۰۱۰)، مربوط به تأثیرات فهمیدن و خواندن مسئله است. به گفته نی‌ریوردین و اُدُنکو (۲۰۰۹)، ریاضیات بیشتر از واژه‌های محض، دربرگیرنده واژه‌های فنی است و کلمه کلیدی «مربع» در این سؤال نیز، یکی از همین واژه‌های فنی است. این پاسخ‌ها، نمونه‌ای از خطاهای دانش‌آموزان بود که به سبب حل مسئله در زبان دوم اتفاق افتاده بود. آن‌ها مسئله را خوانده بودند اما آن را درست نفهمیده بودند. دقیق‌تر اینکه در حل این مسئله آن‌ها از دوره ابتدایی، واژه «مربع» را، همراه با شکل هندسی آن، در ذهن‌شان بازنمایی کرده بودند. در واقع چون این مسئله در زبان اول آن‌ها مطرح نشده بود، در به خاطر سپردن نقش‌های مختلف واژه مربع در زبان دوم، توانایی کافی نداشتند.

۲. از تعداد سیبی که احمد داشت، نیمی را به بهنام و نیم بقیه را به علی داد. احمد برای خودش ۵ سیب باقی ماند. تعداد سیب‌های اولیه او چند تا بوده است؟  
در مطالعه مقدماتی، اکثر دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ نادرست دادند. اما پس از بررسی ساختار زبانی مسئله، برای آزمون نهایی ویرایش لازم به‌صورت زیر انجام شد:

تحقیقات حوزه آموزش ریاضی و دوزبانگی نشان می‌دهد که لازم است برنامه‌ریزان درسی و مؤلفان کتاب‌های درسی، سختی‌ها و ظرافت‌های آموزش ریاضی را در شرایطی که زبان آموزش، زبان مادری دانش‌آموزان نیست، در نظر بگیرند و از توصیه‌های پژوهشی این حوزه استفاده کنند

3. Barton, B. & Neville-Barton, P. (2003). **Language issues in undergraduate mathematics: A report of two studies.** *New Zealand Journal of Mathematics.* 32, 19- 28 Supplementary Issue.
4. Chi, G. (1998). *The role of metacognition in problem solving. Paper presented at the 1999 Annual Meeting of the American Educational Research Association.*
5. Cummins, J. (1979). *Linguistic interdependence and the educational development of bilingual children. Review of Educational Research.* Vol. 49, 222- 251.
6. Garner, M. (2006). Old problems with new questions. *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) News bulletin.* May/ June. Retrieved from: <http://www.nctm.org/news/content.aspx?id=608>.
7. Hegarty, M. R. E.; Myer, M. C. & Monk, A. (1995). Comprehension of Arithmetic Word Problems: A Comparison of successful and unsuccessful problem solver. *Journal of Educational Psychology.* University of California, Santa Barbara.
8. Lewis, A. B. & Myer, R. (1987). *Students' misconceptions of relational statements in arithmetic word problem.* *Journal of Educational psychology.* Vol. 79. pp 363-371.
9. Ni Riordain, M. & O'Donoghue, J. (2009). *The relationship between performance on mathematical word problems and language proficiency for students learning through the medium of Irish.* Department of Mathematics & Statistics, University of Limerick, Limerick, Ireland *Educ Stud Math.* Vol. 71, pp43- 64. DOI 10.1007/s 10649- 008- 9158 -9.
10. Martin, S. H. & Bassok, M. (2005). *Effects of semantic cues on mathematical modeling: Evidence from word - problem solving and equation construction tasks.* *Memory & Cognition.* Vol. 33, Issue 3, pp. 471- 478.
11. Mevarech, Z. R.; Terkieltaub, S. H.; Vinberger, T. & Nevet, V. (2010). *The effects of meta-cognitive instruction on third and sixth graders solving word problems.* *ZDM Mathematics Education.* Vol. 44, pp. 195-203. DOI 10. 1007/s 11858- 010- 0244- y.
12. Mulligan, J. & Verzosa, D. B. (2013). *Learning to solve addition and subtraction word problems in English as an imported language.* *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 82, Issue 2, pp. 223- 244.
13. Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* San Diego, CA: Academic Press.
14. Swee Fong, N. & Lee, K. (2009). *The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems.* *Journal for Research in Mathematics Education.* 40, 282- 313.

زبان مادری دانش‌آموزان نیست، در نظر بگیرند و از توصیه‌های پژوهشی این حوزه استفاده کنند. همچنین، معلمان ریاضی در مناطق دوزبانه، نیازمند آموزش‌ها و حمایت‌های ویژه در این زمینه هستند. بالاخره، ضروری است به این نکته مهم توجه شود که در حالی که طرح نادرست و مبهم صورت مسئله کلامی برای دانش‌آموزانی که مسئله را در زبان اولشان پاسخ می‌دهند باعث بروز مشکل در فرایند حل مسئله می‌شود، کار برای دانش‌آموزانی که مسئله را به زبان دوم پاسخ می‌دهند، به مراتب سخت‌تر است.

#### پی‌نوشت‌ها

1. Second Language
2. imported Language
3. Garner
4. Leiwis & Mayer
5. Cai
6. Cummins
7. Verzosa & Mulligan
8. Hegarty
9. Charles
10. Martin & Bassok
11. Ni Riordain & O'Donoghue
12. Swee Fong & Lee
13. Natural Language
14. Dawe
15. Clarkson
16. Setati & Barwell
17. Jorgensen
18. Adetula
19. Bernardo
20. Wang
21. Secada
22. Minority Children
23. Mevarech

#### منابع

۱. کریمی، فرهاد. (۱۳۷۵). *مقایسه تأثیر دانش فراشناختی، بازنمایی گزاره‌ای و راهبردهای شناختی بر عملکرد حل مسائل کلامی دانش‌آموزان موفق و ناموفق پسر پایه سوم راهنمایی شهرستان سنقر در سال تحصیلی ۱۳۷۴-۵*. پایان‌نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد روان‌شناسی تربیتی، دانشگاه تربیت معلم.
2. Charles, R. (2004). **Solving word problems: Developing students' quantitative reasoning abilities.** Retrieved from [pearsonschool.com/elementaryproducts](http://pearsonschool.com/elementaryproducts). Pearson Education, Inc. Mat07289.



# دترمینان در سرزمین ریاضیات!

مرتضی بیات، دانشگاه آزاد اسلامی واحد زنجان  
زهرا خاتمی، دبیر ریاضی ناحیه یک زنجان

## مقدمه

در این مقاله، قصد داریم چند روش ساده و بازگشتی برای محاسبه دترمینان ماتریس مربعی ارائه دهیم. روش تراکم برای محاسبه دترمینان اولین بار توسط لوئیس کارول (معروف به داجسون) (۱۸۶۶-۶۷) ریاضیدان و نویسنده کتاب «آلیس در سرزمین عجایب» ارائه گردید (زیلبرگر، ۱۹۹۷). این روش ساده و مبتکرانه متأسفانه در بین علاقه‌مندان ریاضی فراگیر نشده است. اما اخیراً این روش به‌طور مؤثری در بین کارهای تعدادی از ریاضی‌دانان، برجسته شده است، به‌طوری که حدس ماتریس‌های با علامت‌های متناوب به کمک این روش، حل گردیده است (پرسود و پروپ، ۱۹۹۹).

همان‌گونه که می‌دانیم، دترمینان با روش‌های مختلفی به شرح زیر محاسبه می‌شود:

الگوها. روش الگو معمولاً برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های  $2 \times 2$  و  $3 \times 3$  به کار برده می‌شود:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1) \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times 8 - (7 \times 5 \times 3 + 8 \times 6 \times (-1) + 9 \times 4 \times 2)$$

بسط براساس عامل‌ها. براساس بسط لاپلاس نسبت به هر سطر (یا هر ستون)، دترمینان بسط داده می‌شود:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times (-1) \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \times 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

مثلی کردن یا روش حذفی گاوس.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 13 & 18 \\ 0 & 22 & 30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 13 & 18 \\ 0 & 0 & -6/13 \end{vmatrix} = (-1) \times 13 \times (-\frac{6}{13}) = 6$$

سه روش بالا از جهاتی ناکارآمد هستند که در زیر، به آن‌ها اشاره می‌کنیم:

۱. معمولاً الگوها برای ماتریس‌های  $4 \times 4$  و بالاتر، قابل تعمیم نیستند.
۲. بسط براساس عامل‌ها، مستعد خطا و نیز برای محاسبات دستی، خسته‌کننده است.
۳. مثلی کردن، همواره ساده نیست و برای استفاده از این روش، اساساً بایستی از کسرهای استفاده نمود.

## روش تراکم داجسون (یا الگوریتم آلیس)

در ریاضیات، روش تراکم داجسون، روشی برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های مربعی است. باید گفته شود که این روش، یک حالت خاص از قضیه ژاکوبی (۱۸۳۳) است. اما داجسون، به‌طور مستقل، این ایده را کشف و بیان کرده است.

الگوریتم داجسون (یا الگوریتم آلیس) در چهار گام زیر، ارائه می‌شود:

**گام ۱.** فرض کنیم  $A$  ماتریس  $n \times n$  باشد. ابتدا این ماتریس را چنان مرتب می‌کنیم که هیچ صفی در درایه‌های درونی آن اتفاق نیفتد. درایه‌های درونی به شکل  $a_{ij}$  هستند که  $i, j \neq 1, n$ . برای آنکه درایه‌های درونی را ناصفر کنیم با استفاده از اعمال مقدماتی، مثلاً جمع کردن یک سطر با مضربی از سطر دیگر بدون آنکه مقدار دترمینان تغییر کند، به‌دست می‌آوریم.

**گام ۲.** یک ماتریس  $B$  از مرتبه  $(n-1) \times (n-1)$ ، با استفاده از دترمینان‌هایی از زیرماتریس‌های  $2 \times 2$  ایجاد

می‌کنیم.  
به‌طور صریح 
$$B_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

**گام ۳.** عملیات گام ۲ را روی ماتریس  $B$  انجام می‌دهیم و به یک ماتریس  $C$  از مرتبه  $(n-2) \times (n-2)$  می‌رسیم. سپس هر جمله از  $C$  را بر جمله متناظرش در عناصر درونی  $A$  تقسیم می‌کنیم،

یعنی 
$$C_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{11}}$$

**گام ۴.** گیریم  $A=B=C$  و حال گام ۳ را تا رسیدن به یک ماتریس  $1 \times 1$  تکرار می‌کنیم. تنها درایه ماتریس  $1 \times 1$ ، نشانگر مقدار دترمینان ماتریس اصلی است.

**مثال ۱.** با استفاده از روش تراکم داجسون، دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 5$$

**حل.** شرایط گام ۱ برقرار است. حال طبق گام ۲ داریم:

$$B = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

اینک طبق گام ۳ داریم:

$$C = \begin{bmatrix} -13 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\div 5} \text{ض من} = \begin{bmatrix} -13 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

بنابراین،  $|A| = 5$ .

**مثال ۲.** با استفاده از روش تراکم داجسون، دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & -6 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & -8 \end{vmatrix}$$

**حل.** گام ۱ برقرار است، حال طبق گام ۲ داریم:

$$B = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & -6 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & -6 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & -3 & -8 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 2 & \\ -1 & -5 & 8 & \\ 1 & 1 & -4 & \end{array} \right]$$

اینک طبق گام ۳ داریم:

$$B = \left[ \begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & -5 & 8 \\ -1 & -5 & -5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} -16 & 2 \\ 4 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow{\div \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}} \left[ \begin{array}{cc} \frac{8}{-2} & \frac{2}{-1} \\ \frac{4}{-1} & \frac{12}{2} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} 8 & -2 \\ -4 & 6 \end{array} \right]$$

با تکرار مجدد گام‌های بالا برای ماتریس داریم:

$$\left[ \begin{array}{cc} 8 & -2 \\ -4 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{+5 \text{ ض } 2} \left[ \begin{array}{cc} 8 & -2 \\ -4 & 6 \end{array} \right]$$

بنابراین  $|A| = -8$ .

یکی از مشکلاتی که در روش تراکم داجسون وجود دارد، صفر شدن درایه‌های درونی است.

مثال ۳. با روش تراکم داجسون، دترمینان زیر را محاسبه کنید:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

حل. با اجرای گام‌های الگوریتم داجسون داریم:

$$\left[ \begin{array}{cc|cc|c} 2 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc|c} 5 & -5 & -3 & 1 & \\ -3 & -3 & -3 & 3 & \\ 3 & 3 & 3 & -1 & \\ -5 & -3 & -1 & -5 & \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} -30 & 6 & -12 & \\ 0 & 0 & 6 & \\ 6 & -6 & 8 & \end{array} \right]$$

ملاحظه می‌شود که در گام سوم، عنصر درایه‌های درونی صفر است. اینک با تعویض سطر اول و پنجم (با این

عمل مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند)، مجدداً الگوریتم را تکرار می‌کنیم:

$$\left[ \begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc|c} -3 & -3 & -3 & 3 & \\ 3 & 3 & 3 & -1 & \\ -5 & -3 & -1 & -5 & \\ 3 & -5 & 1 & 1 & \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 6 & \\ 6 & -6 & 8 & \\ -17 & 8 & -4 & \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 12 & \\ 18 & 40 & \end{array} \right] \rightarrow \text{نقص}$$

بنابراین  $|A| = 36$ .

## روش انباشتگی محوری

در این بخش، روش دیگری برای محاسبه دترمینان ارائه می‌دهیم که دیگر مشکل صفر شدن درایه‌های درونی

را ندارد.

در این روش، باید یک درایه ناصفر را به عنوان لولا در نظر بگیریم (در اینجا درایه واقع در سطر اول و ستون اول که ناصفر است را لولا در نظر می گیریم، البته می توانیم هر درایه ناصفر را لولا در نظر بگیریم. در این صورت، سطر اول را با سطرهای دیگر برای ساختن دترمینان  $2 \times 2$  استفاده می کنیم.

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ع} & \text{ع} \\ \text{ع} & \text{غ} & \text{غ} \\ \text{غ} & \text{غ} & \text{ق} \end{vmatrix} = \frac{1}{\text{ع}^{3-2}} \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ع} & \text{ع} \\ \text{ع} & \text{غ} & \text{غ} \\ \text{ع} & \text{ع} & \text{ق} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ع} & \text{ع} & \text{ع} \\ \text{ع} & \text{غ} & \text{غ} & \text{غ} \\ \text{ق} & \text{ق} & \text{ك} & \text{ك} \\ \text{ك} & \text{ك} & \text{ل} & \text{ل} \end{vmatrix} = \frac{1}{\text{ع}^{4-2}} \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ع} & \text{ع} & \text{ع} \\ \text{غ} & \text{غ} & \text{غ} & \text{غ} \\ \text{ق} & \text{ق} & \text{ك} & \text{ك} \\ \text{ع} & \text{ع} & \text{ع} & \text{ع} \\ \text{ك} & \text{ك} & \text{ل} & \text{ل} \end{vmatrix}$$

توجه داریم که برای دترمینان ماتریس  $n \times n$ ، در مخرج درایه لولا با توان  $n-2$  ظاهر می شود.

مثال ۴. از روش انباشتگی محوری، مقدار دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

حل. با توجه به فرمول، خواهیم داشت:

$$|A| = \frac{1}{2^2} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 11 & 5 & -2 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

اینک دترمینان ماتریس  $3 \times 3$  را محاسبه می کنیم:

$$|A| = \frac{1}{4} \times \frac{1}{-7} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -7 & 7 \\ 11 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -7 & 0 \\ 11 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -7 & 7 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -7 & 0 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{-28} \begin{vmatrix} -112 & 14 \\ 14 & 28 \end{vmatrix}$$

منابع

1. C.L. Dodgson, *Condensation of Determinants*, Being a New and Brief Method for Computing their Arithmetical Values, Proceedings of the Royal Society of London, 15 (1866-1867), 150-155.
2. D. Zeilberger, *Dodgson's determinant evaluation rule proved by two-timing men and women*, Electronic Journal of Combinatorics, 4 no. 2 (1997).
3. M.D. Bressoud and J. Propp. (1999). *How the alternating sign matrix conjecture was solved*, Notices of the American Mathematical Society, 46, 637-646.
4. C.G.J. Jacobi, *De Binis Quibulibet Functionibus Homogeneis Secundi...*, Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 12 (1833), 1-69.

مرجع

D. Leggett, J. Perry and A. Sanders, *Determinants in Wonderland*, [www.math.usm.edu/perry/Research/determinants\\_in\\_Wonderland.pdf](http://www.math.usm.edu/perry/Research/determinants_in_Wonderland.pdf).

## اشاره

پروژه ۲۰۶۱، یک کار تحقیقی بود که از سال ۱۹۸۶، در ایالات متحده شروع شد. هدف اصلی این طرح، آموزش علوم و ریاضی بود و علت انتخاب ۲۰۶۱، نوبت بعدی دیده شدن سیاره هالی در آسمان است. قبلاً، ترجمه ۶ یا ۷ مقاله از این پروژه، در مجله رشد آموزش ریاضی به چاپ رسیده است و در پژوهشگاه مطالعات آموزش و پرورش اکثر بخش‌های این طرح، به تدریج ترجمه شده‌اند. این بخش به تازگی ترجمه شده است که با توجه به اهمیت آن، در اختیار خوانندگان محترم مجله قرار می‌گیرد. از خانم کائیدی هم که زحمت ترجمه را کشیده‌اند، سپاسگزاریم.

کلیدواژه‌ها: پروژه ۲۰۶۱، تألیف کتاب درسی، تجزیه و تحلیل محتوا، برنامه درسی

### پروژه تجزیه و تحلیل محتوای برنامه درسی ۲۰۶۱

در سال ۱۹۸۵ با نزدیک شدن ستاره دنباله‌دار هالی به کره زمین بنیاد ملی علوم آمریکا اجرای طرحی با عنوان پروژه ۲۰۶۱ را شروع کرد که هدف اصلی آن توجه به نیازهای زندگی در حال تغییر و ارتقاء سطح سواد علمی جامعه آمریکا برای یک دوره ۷۶ ساله، یعنی تا بازگشت دوباره ستاره دنباله‌دار هالی در سال ۲۰۶۱ بود. پروژه ۲۰۶۱ به ما خاطر نشان می‌کند که آموزش امروز، کیفیت زندگی در قرن ۲۱ را شکل می‌دهد. از همان آغاز کار، پروژه ۲۰۶۱ براین باور بود که سواد در علوم و ریاضیات و تکنولوژی برای همه دانش‌آموزان یک نیاز ضروری است. بر این اساس این پروژه معتقد است که سواد در این حوزه‌ها نیازمند دانش و مهارت همراه با عادت‌های خاص تفکر و درک درستی از ماهیت علوم، ریاضیات و تکنولوژی و تأثیر آن‌ها بر افراد جامعه است. برای اینکه دانش‌آموزان بتوانند به چنین سواد دستاند، به نظر می‌رسد که محتوا تحت پوشش در برنامه درسی امروز می‌بایست به میزان قابل توجهی کاهش یابد تا زمان کافی برای یادگیری مهارت‌ها و مفاهیم مهم‌تر وجود داشته باشد.

# از تجزیه و تحلیل محتوای برنامه درسی ۲۰۶۱\* بیاموزیم

اعظم کائیدی

کارشناس ارشد رشته تحقیقات آموزشی دانشگاه تهران

برای بسیاری از معلمان ریاضی، کتاب درسی اولین راهنما برای اجرای برنامه درسی است. پروژه ۲۰۶۱ با سه پیش فرض ارزشیابی کتاب‌های درسی را آغاز کرد: ۱. کتاب درسی مناسب در اصلاح آموزش ریاضی نقش اساسی دارد.

۲. کتاب درسی ریاضی می‌بایست بر اساس میزان اثربخشی‌اش در کمک به دانش‌آموزان برای رسیدن به اهداف مهم آموزش ریاضی که در مورد آن‌ها اجماع وسیع ملی وجود دارد، مورد ارزیابی قرار گیرد.

۳. یک تحلیل عمیق باید مطلوبیت مطالب و موضوعات کتاب را برای یادگیری واقعی دانش‌آموزان ارزیابی کند.

عملکرد ضعیف دانش‌آموزان آمریکایی در سومین مطالعه بین‌المللی علوم و ریاضی (TIMSS) حاکی از آن بود که برنامه درسی ریاضیات برای متوسطه اول<sup>۲</sup> نیاز به توجه فوری دارد. در این مدارس است که خیلی از دانش‌آموزان، خودشان را در یک برنامه ریاضی تکراری و بی‌چالش می‌بینند، در نتیجه پیشرفت و علاقه آن‌ها به ریاضی متوقف می‌شود و آن‌ها از بهره‌مندی از طیف گسترده‌ای از گزینه‌های دانشگاهی و حرفه‌ای در آینده باز می‌مانند. بنابراین مدارس متوسطه اول، یک نقطه اهرمی برای تلاش‌ها در جهت اصلاح آموزش هستند.

رویکرد پروژه ۲۰۶۱ به اصلاحات نظام‌دار است و تصدیق می‌کند که بهبود معنادار و درازمدت در یادگیری دانش‌آموزان، نیازمند تغییر در خیلی از حوزه‌های پیچیده و غیرمتمرکز کشور آمریکا است. در مرکز این نظام، برنامه درسی قرار دارد که تا حد زیادی از طریق کتاب‌های درسی، که دانش‌آموزان استفاده می‌کنند، تعریف می‌شود؛ در نتیجه بهبود کیفیت کتاب‌های درسی برای هرگونه تلاش در بهبود پیشرفت دانش‌آموزان ضروری است.

پروژه ۲۰۶۱ امیدوار است از طریق تمرکز دقیق بر اینکه چگونه کتاب‌های درسی برخی ایده‌های کلیدی را در ریاضیات ارائه می‌دهند و همچنین از طریق هدایت آموزشی که برای رسیدن به این ایده‌ها و مهارت‌های خاص وجود دارد، تدریس و یادگیری ریاضی را اصلاح کند.

پروژه ارزشیابی کتاب‌های درسی ۲۰۶۱ چند ویژگی منحصر به فرد دارد که این پروژه را از سایر تلاش‌های ارزشیابی جدا می‌سازد:

۱. **فرایند کاربردی دقیق و یکنواخت:** تحلیل گران پروژه ۲۰۶۱ معلمان با تجربه و کارآزموده مدارس و اساتید دانشکده‌های آموزش عالی بودند که

همه آن‌ها در زمینه پژوهش در مورد آموزش و یادگیری ریاضی و محتوای ریاضی، افرادی متخصص، ماهر و توانمند بودند و به‌طور گسترده در مورد شیوه تحلیل در پروژه ۲۰۶۱ آموزش دیده بودند. فرایند کار به این شکل بود که ۶ تیم دو نفره کتاب‌های ریاضی پایه‌های ۶ تا ۸ را ارزشیابی کردند. به هر تیم دو معیار برای ارزشیابی کتاب‌ها اختصاص یافته بود و هر تیم در هر

مرحله یک کتاب را با ۲ شاخص خود ارزشیابی می‌کرد. بعد از اتمام تجزیه و تحلیل هر سری از کتاب‌ها، تیم‌ها گرد هم آمده و رتبه‌هایشان را با هم تطبیق می‌دادند، سپس به بررسی سری بعدی کتاب‌ها می‌پرداختند. بدین ترتیب هر تیم شش سری کتاب را با استفاده از ۲ شاخص تعیین شده برای هر تیم تجزیه و تحلیل کردند.

۲. **شیوه تحلیل مبتنی بر شواهد:** تحلیل گران با استفاده از یک نرم افزار نسخه‌های کتاب‌های درسی معلمان و دانش‌آموزان را برای شناسایی درس‌ها، فعالیت‌ها، یادداشت‌های معلم و غیره، بر اساس ایده در هر ۶ معیار آموزش عمومی (مفاهیم عددی، مهارت‌های عددی، مفاهیم هندسی، مهارت‌های هندسی، مفاهیم نمودار جبری و مفاهیم معادلات جبری) که از معیارهای سواد علوم پروژه ۲۰۶۱ بیرون کشیده بودند، ارزشیابی کردند و سپس محتوا را بر اساس یک مجموعه معیار آموزشی مبتنی بر تحقیق (معیار مفهومی هدف،

شکل دادن به ایده‌های دانش‌آموزان درباره ریاضیات، درگیر کردن دانش‌آموزان با ریاضیات، توسعه ایده‌های ریاضیات، ارتقاء تفکر دانش‌آموزان درباره ریاضیات، ارزیابی پیشرفت دانش‌آموزان در ریاضیات و ارتقاء محیط یادگیری ریاضیات) تحلیل کردند. همه تحلیل گران معیارهای آموزشی یکسانی را در کتاب‌ها بررسی کردند و از متدولوژی و دستورالعمل‌های نمره‌گذاری یکسان در رتبه بندی‌های خود استفاده کردند.

و از متدولوژی و دستورالعمل‌های نمره‌گذاری یکسان در رتبه‌بندی‌های خود استفاده کردند.

رویکرد پروژه ۲۰۶۱ به اصلاحات نظام‌دار است و تصدیق می‌کند که بهبود معنادار و درازمدت در یادگیری دانش‌آموزان، نیازمند تغییر در خیلی از حوزه‌های پیچیده و غیرمتمرکز کشور آمریکا است. در مرکز این نظام، برنامه درسی قرار دارد که تا حد زیادی از طریق کتاب‌های درسی، که دانش‌آموزان استفاده می‌کنند، تعریف می‌شود؛ در نتیجه بهبود کیفیت کتاب‌های درسی برای هرگونه تلاش در بهبود پیشرفت دانش‌آموزان ضروری است

### ۳. معیارهای کلیدی در ریاضیات<sup>۵</sup>: تجربه

پروژه ۲۰۶۱ نشان داد که تحلیل کردن تعداد کوچکی از معیارها، اما با دقت، می تواند نیمرخی از نقاط قوت و ضعف مواد درسی را به عنوان یک کل نشان دهد. کتابها ممکن است برخورد متفاوتی با استانداردهای ویژه محتوایی (اعداد، هندسه و جبر) یا در بسط دانش مفهومی شان و کاربرد مهارت ها و رویه ها داشته باشند. این پروژه ۶ معیار را انتخاب کرد که این ۶ معیار، نشان دهنده سه رشته مهم ریاضی (عدد، هندسه و جبر) هستند. این معیارها نمونه ای از محتوای اصلی ریاضیات هستند که به احتمال زیاد، در هر کتاب درسی پایه ۶ تا ۸ دیده می شوند. آن ها عبارتند از: یک معیار مفهومی پیرامون کسرها و عملیات بر روی آن ها، یک معیار مهارتی پیرامون اشکال هم ارز اعداد، یک شاخص مفهومی و مهارتی پیرامون خواص اشکال و محاسبه مساحت و حجم، و دو معیار مفهومی پیرامون نمودار و معادلات.

### ۴. معیارهای آموزشی مبتنی بر پژوهش<sup>۶</sup>:

تحلیل گران هر کتاب را براساس ۲۴ معیاری که از پژوهش ها در مورد آموزش و یادگیری و دانش مهارتی معلمان با تجربه به دست آمده بود رتبه بندی کردند. همچنین آن ها بررسی کردند که آیا کتابها آیتم های ارزشیابی مناسب را که مبتنی بر درک و فهم باشند فراهم می کنند؟ و آیا به معلمان در مورد اینکه چگونه از نتایج ارزشیابی در فعالیتهای کلاس شان استفاده کنند، آگاهی لازم را ارائه می دهند؟

پروژه ۲۰۶۱ دو دسته از کتابهای درسی ریاضی را برای ارزیابی انتخاب کرد. کتابهای دسته اول نماینده پرفروش ترین کتابهای درسی بودند که احتمالاً بیشتر معلمان مدارس میانی در کلاس شان از آن ها استفاده می کردند و یا بیشتر مورد پذیرش بودند و کتابهای دسته دوم نماینده تلاش های اخیر تولید کنندگان برنامه درسی، پژوهشگران و ناشران کتابهای درسی بود؛ کتابهایی که وارد بازار می شدند اما به خوبی شناخته شده نبودند و جنبه تجاری زیادی نداشتند.

### ارزشیابی محتوا

شش معیار به عنوان معیارهای محتوایی برای ارزشیابی پایه های ۶ تا ۸ انتخاب شد. محتوای این معیارها و سایر اهداف یادگیری مشخص شده در

AAAS با استانداردهای ارزشیابی و برنامه درسی ریاضی مدرسه ای (شورای ملی معلمان ریاضی<sup>۷</sup>، ۱۹۸۹) پیرامون مفاهیم و مهارتهایی که تقریباً همه بر روی اهمیت آن ها برای دانش آموزان پایه ۶ تا ۸ توافق دارند، مطابقت دارد. آن ها عبارتند از:

### مفاهیم عددی

عبارت  $a/b$  می تواند معانی مختلفی داشته باشد:

-  $a$  برابر اندازه  $b$

-  $a$  تقسیم بر  $b$

- نسبت  $a$  به  $b$

### مهارت های عددی

کاربرد، تفسیر و مقایسه اعداد در چندین فرم هم ارز مثل کسر، اعشار، درصد

### مفاهیم هندسی

دانش آموز باید بداند که برخی اشکال خواص ویژه ای دارند:

- شکل های مثلثی تمایل به ایجاد ساختارهای صلب دارند و شکل های دایره ای حداقل مرز ممکن را برای یک مقدار داده شده از منطقه داخلی دارند (در دایره نسبت محیط به مساحت آن حداقل است).  
- اشکال می توانند دقیقاً عین هم باشند یا همان شکل را در اندازه های مختلف داشته باشند.

### مهارت های هندسی

محاسبه محیط و مساحت مستطیل و مثلث و دایره و محاسبه حجم اجسام (مثل مکعب، منشور و غیره).

### مفاهیم نمودار جبری

نمودارها می توانند انواع روابط ممکن بین ۲ متغیر را نشان دهند. وقتی یک متغیر به طور یکنواخت افزایش باید متغیر دیگر ممکن است به یکی از شکل های زیر تغییر کند:

- به طور پیوسته افزایش یا کاهش یابد؛
- با سریع تر و سریع تر افزایش یا کاهش یابد؛
- به یک مقدار حدی نزدیک تر و نزدیک تر شود؛
- به برخی مینیمم و ماکزیمم های نسبی برسد؛
- به طور نامحدود متناوباً افزایش و کاهش داشته باشد؛
- به طور پله ای افزایش یا کاهش داشته باشد؛
- به صورتی غیر از موارد فوق.

## مفاهیم معادلات جبری

معادلات نمادین می‌توانند برای به اختصار نشان دادن چگونگی تغییرات یک متغیر برحسب زمان یا برحسب متغیر دیگر مورد استفاده قرار گیرند.

## ارزشیابی آموزشی

بعد از شناسایی فعالیت‌های کتاب‌های درسی، تحلیل گران هر فعالیت را با توجه به اینکه تا چه اندازه ۲۴ معیار آموزشی را مدنظر قرار داده بودند، رتبه‌بندی کردند. این معیارها بر آن نبودند که از نظریه یا ایدئولوژی یادگیری ویژه‌ای فراتر از اصول و راهبردهایی که از طریق شواهد پژوهشی موجود حمایت شده‌اند، پشتیبانی کنند. به‌علاوه این معیارهای آموزشی با اصول آموزش و یادگیری مؤثر ریاضیات در نسخه فعلی NCTM از استانداردهای ریاضی منطبق هستند. این ۲۴ معیار آموزشی که به ۷ دسته تقسیم می‌شوند عبارت‌اند از:

**دسته ۱. شناسایی هدف:** بخشی از طراحی یک برنامه درسی تصمیم‌گیری در مورد انتخاب آن دسته از اهداف و تجربیات یادگیری است که به دستیابی آن اهداف کمک می‌کنند. برای تعیین اینکه آیا کتاب‌ها هدف یک فصل، یک درس را انتقال می‌دهند و یک دنباله از فعالیت‌ها را توجیه می‌کنند، از سه معیار استفاده شد:

۱/۱: انتقال دادن هدف بخش

۲/۱: انتقال دادن هدف درس

۳/۱: توجیه کردن دنباله‌ای از فعالیت‌ها

## دسته ۲. شکل دادن به ایده‌های دانش‌آموزان

**درباره ریاضیات:** برای پرورش درک بهتر دانش‌آموزان، باید به ایده‌هایی که آن‌ها تا کنون داشته‌اند، هم ایده‌های

نادرست و هم ایده‌هایی که می‌توانند برای یادگیری‌های بعدی پایه و اساس باشند، توجه کرد. برای تعیین اینکه آیا کتاب‌ها دانش پیش‌نیاز را مشخص می‌کنند، معلمان را از ایده‌های دانش‌آموزان مطلع می‌کنند و به معلمان در تشخیص ایده‌ها و درنظر گرفتن تصورات غلط کمک می‌کنند، از ۴ معیار استفاده شد:

۱/۲: مشخص کردن دانش پیش‌نیاز

۲/۲: آگاه کردن معلمان از ایده‌های دانش‌آموزان

۳/۲: کمک به معلمان در شناسایی ایده‌ها

۴/۲: پرداختن به بدفهمی‌ها

## دسته ۳. درگیر کردن دانش‌آموزان با

**ریاضیات:** برای اینکه دانش‌آموزان نیرومندی ریاضیات را درک کنند نیاز دارند که مفهومی از دامنه و پیچیدگی ایده‌ها و برنامه‌های کاربردی را، که ریاضیات می‌تواند شرح دهد یا مدل سازی کند، داشته باشند. برای تعیین اینکه آیا مواد درسی زمینه‌های متنوع و تعداد مناسبی از تجارب دست اول را فراهم می‌کنند از ۲ معیار استفاده شد:

۱/۳: فراهم کردن زمینه‌های متنوع

۲/۳: فراهم کردن تجارب دست اول

## دسته ۴. توسعه ایده‌های ریاضیات: سواد

ریاضی مستلزم آن است که دانش‌آموزان ارتباط بین مفاهیم و مهارت‌ها را درک کنند، و درک کنند که ریاضیات علمی منطقی و مفید است و در استفاده از ریاضیات مهارت پیدا کنند. برای تعیین اینکه آیا کتاب‌ها اهمیت ایده‌های معیار را توجیه می‌کنند، در صورت نیاز اصطلاحات و روش‌ها را معرفی می‌کنند، ایده‌ها را به درستی ارائه می‌دهند، ایده‌های معیار را به هم ربط می‌دهند، مراحل را مدل سازی می‌کنند و تمرین ارائه می‌دهند از ۶ معیار استفاده شد:

۱/۴: توجیه اهمیت ایده‌های معیار؛

۲/۴: معرفی اصطلاحات و رویه‌ها؛

۳/۴: ارائه دقیق ایده‌ها؛

۴/۴: مرتبط کردن ایده‌های معیار؛

۵/۴: مدل سازی/نمایش رویه‌ها؛

۶/۴: ارائه تمرین.

## دسته ۵. ارتقاء تفکر

## دانش‌آموزان درباره

**ریاضیات:** دانش‌آموزان می‌بایست ایده‌هایشان را بسازند و به شکل روشن استدلال کنند، استدلالشان را به دقت مورد بررسی قرار دهند و هر جا که نیاز است آن‌ها را از نو بسازند. برای تعیین اینکه آیا کتاب‌ها دانش‌آموزان را به توضیح استدلالشان تشویق

برای پرورش درک بهتر دانش‌آموزان، باید به ایده‌هایی که آن‌ها تا کنون داشته‌اند، هم ایده‌های نادرست و هم ایده‌هایی که می‌توانند برای یادگیری‌های بعدی پایه و اساس باشند، توجه کرد

می‌کنند، دانش‌آموزان را در تفسیر استدلال‌هایشان راهنمایی می‌کنند و آن‌ها را به تفکر در مورد آنچه که می‌خواهند تشویق می‌کنند، از ۳ معیار استفاده شد:

۱/۵: تشویق دانش‌آموزان به توضیح دادن استدلال‌هایشان؛

۲/۵: هدایت تفسیرها و استدلال‌های آن‌ها؛

۳/۵: تشویق دانش‌آموزان به تفکر در مورد آنچه که

یاد گرفته‌اند.

### دسته ۶. ارزشیابی پیشرفت دانش‌آموزان در

ریاضیات: ارزشیابی‌ها باید دامنه وسیعی از مهارت‌ها و کاربردها و زمینه‌هایی را که نشان‌دهنده این است که دانش‌آموزان چه چیزی را باید بگیرند، مد نظر قرار دهد. این امر فقط زمانی امکان دارد که ارزشیابی در طول آموزش صورت گیرد نه فقط در آخر هر بخش. برای تعیین مطالبی که بیان شد، از ۳ معیار استفاده شد:

۱/۶: هماهنگی ارزشیابی‌ها؛

۲/۶: ارزشیابی از طریق کاربردها؛

۳/۶: ارزشیابی به عنوان بخشی از فعالیت‌های یادگیری.

### دسته ۷. ارتقاء محیط یادگیری

ریاضی: فراهم کردن شرایطی که استفاده و کاربرد کتاب درسی را برای همه دانش‌آموزان افزایش دهد مهم است. برای تعیین اینکه آیا مواد محتوای کمکی را برای معلم فراهم می‌کنند، چالش و اشتیاق را در کلاس درس ایجاد می‌کنند و از همه دانش‌آموزان

پشتیبانی می‌کنند، از سه معیار استفاده شد:

۱/۷: تأمین محتوای کمکی برای معلم؛

۲/۷: ایجاد کلاسی شوق‌آور و چالش‌برانگیز؛

۳/۷: پشتیبانی و کمک به همه دانش‌آموزان.

### نتایج

روش تجزیه و تحلیل مواد درسی ۲۰۶۱ را می‌توان یک ابزار قدرتمند پژوهشی در شناسایی نقاط قوت و ضعف کتاب‌های درسی دانست. همچنین، این روش می‌تواند بینش عمیقی را در مورد کیفیت کتاب‌های درسی موجود فراهم کند. برای مثال به یافته‌های زیر توجه کنید:

**عمق مطلب:** با توجه به ۶ معیاری که برای بررسی رشد ایده‌های مهارتی و مفهومی ریاضیات مورد

استفاده قرار گرفت، ۱۲ یا ۱۳ کتابی که ارزیابی شده بودند در شمول مهارت‌های عددی و هندسی تفاوت زیادی نداشتند، ولی در وسعت و عمق مفاهیم کسر، شکل‌ها و معادلات تفاوت‌های قابل ملاحظه‌ای وجود داشت. هیچ یک از کتاب‌های درسی به همه ایده‌ها و مفاهیمی که در ۶ معیار وجود داشت، توجه نکرده بودند. یک مجموعه از کتاب‌های درسی ۵ یا ۶ معیار را عمیقاً مورد توجه قرار داده بودند و ۴ مجموعه ۴ معیار را عمیقاً مورد توجه قرار داده بودند.

**اثر بخشی آموزشی:** تحلیل راهبردهای آموزشی کتاب‌های درسی، تضاد آشکاری را در کفایت آموزشی معیارهای خاص نشان داد. ۴ مجموعه از کتاب‌های درسی در درگیر کردن دانش‌آموزان، توسعه مفاهیم ریاضیات و حمایت از معلم، امتیاز بالایی گرفتند و ۸ کتاب دیگر، امتیازهای مختلفی را در مورد معیارهای آموزشی دریافت کردند.

### نتایج خوب

۱. تعداد اندکی از مجموعه کتاب‌های درسی ریاضی در دوره متوسطه اول بودند که عالی بودند؛
۲. بیش از ۲ مجموعه از کتاب‌های درسی هم از عمق مطلب و هم اثر بخشی آموزشی در حد بالایی برخوردار بودند؛
۳. در بیشتر کتاب‌ها، کارهای مفیدی در زمینه مهارت‌های عددی و هندسی انجام شده بود؛
۴. در اکثر کتاب‌ها، کارهای قابل ملاحظه‌ای در حوزه‌های کلیدی آموزش، چون درگیر کردن دانش‌آموزان در ریاضی و کمک به آن‌ها در توسعه و استفاده از ایده‌های ریاضی، انجام شده بود.

### نتایج بد

۱. هیچ یک از کتاب‌های معروف تجاری، در بین بهترین رتبه‌ها نبودند؛
۲. اکثر کتاب‌ها در پوشش دادن معیارهای مفهومی ریاضی، ضعیف عمل کرده بودند؛
۳. اکثر کتاب‌ها در حمایت آموزشی از معلم و دانش‌آموز، ضعیف بودند؛
۴. اکثر کتاب‌ها، ایده‌های ریاضی را در پایه ۶ تا ۸ به‌طور موشکافانه مورد بحث قرار نداده بودند؛
۵. اکثر کتاب‌ها، در ارائه هدف برای یادگیری ریاضی، بیان ایده‌های دانش‌آموزان و ارتقاء تفکر دانش‌آموزان به‌طور رضایت بخش عمل نکرده بودند.

روش تجزیه و تحلیل مواد درسی ۲۰۶۱ را می‌توان یک ابزار قدرتمند پژوهشی در شناسایی نقاط قوت و ضعف کتاب‌های درسی دانست. همچنین، این روش می‌تواند بینش عمیقی را در مورد کیفیت کتاب‌های درسی موجود فراهم کند

به‌طور خلاصه، یافته‌های پروژه تجزیه و تحلیل محتوای برنامه درسی ۲۰۶۱ هم باعث خوش‌بینی می‌گردد و هم موجب نگرانی. روشن است که اصلاح و بهسازی آموزش ریاضی، بر کتاب‌های درسی و تولیدکنندگان و ناشران آن‌ها تأثیرگذار خواهد بود، با این حال، مقدار زیادی اطلاعات در مورد اینکه چگونه از این کتاب‌های درسی، به‌طور واقعی در کلاس درس استفاده می‌شود و چگونه ارزیابی مناسب از دانش‌آموزان به عمل می‌آید، مورد نیاز است.

### نگاهی به برنامه درسی ریاضی دوره راهنمایی ایران - متوسطه اول - در چارچوب پروژه ۲۰۶۱

روش تجزیه و تحلیل محتوای درسی ۲۰۶۱ را می‌توان یک ابزار قدرتمند پژوهشی در شناسایی نقاط قوت و ضعف کتاب‌های درسی دانست. همچنین، این روش می‌تواند بینش عمیقی را در مورد کیفیت کتاب‌های درسی موجود در ایران فراهم کند. بنابراین، با استفاده از این روش، کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی کشورمان را به منظور بررسی کیفیت کتاب‌های درسی ریاضی این دوره و شناسایی نقاط قوت و ضعف آن‌ها مورد بررسی قرار دادیم. بدین منظور، معیارهای پایه‌های ۶ تا ۸ پروژه تجزیه و تحلیل محتوای برنامه درسی ۲۰۶۱ به طور کامل مطالعه شد و معیارهای محتوایی و آموزشی این پروژه برای پایه‌های ۶ تا ۸ در درس ریاضی استخراج گردید و براساس آن ابزار، پرسش‌نامه‌ای تهیه گردید. در مرحله بعد به سازمان آموزش و پرورش استان مرکزی مراجعه شد و فهرست دبیران ریاضی دوره راهنمایی و مدارس شهر اراک و مدارسی که این دبیران در آن‌ها تدریس می‌کردند، اخذ گردید. سپس به تک تک مدارس مورد نظر شهر مراجعه شد و پرسش‌نامه بین دبیران توزیع گردید. در مجموع ۹۸ پرسش‌نامه توزیع شد. از این تعداد ۷۸ پرسش‌نامه تکمیل شده عودت داده شده که از این تعداد ۱۲ پرسش‌نامه مخدوش بود، لذا تعداد ۶۶ پرسش‌نامه مورد تحلیل قرار گرفت. برای تجزیه و تحلیل سؤالات پرسش‌نامه، از آزمون خی دو تک نمونه‌ای (نیکویی برازش) استفاده شد. نتایج به‌دست آمده به قرار زیر است.

در زمینه معیارهای محتوایی پروژه ۲۰۶۱، نتایج نشان می‌دهند که میزان توجه کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی به مفاهیم عددی، مفاهیم هندسی، مفاهیم نمودار جبری و مفاهیم معادلات جبری پایین‌تر از

حد متوسط است. میزان توجه کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی به مهارت‌های عددی در حد متوسط و میزان توجه آن‌ها به مهارت‌های هندسی بالاتر از حد متوسط است. این نتایج با نتایج پروژه ۲۰۶۱ و پژوهش محمد اسماعیل (۱۳۸۴) همخوانی دارد. در پژوهش‌های ذکر شده، نتایج پروژه ۲۰۶۱ نشان داد که اکثر کتاب‌ها در زمینه معیارهای مفهومی ریاضیات ضعیف عمل کرده‌اند اما در زمینه مهارت‌های عددی و هندسی کارهای مفیدی را انجام داده بودند. همان‌طور که مشاهده می‌شود در پژوهش حاضر هم نتایج حاکی از آن است که در کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی، میزان توجه کتاب‌ها به مهارت‌های عددی و هندسی بیش از میزان توجه به مفاهیم عددی و هندسی است. نتایج پژوهش محمد اسماعیل هم نشان داد که میانگین عملکرد مربوط به تمامی حیطه‌های مختلف محتوایی ریاضیات (اعداد و جبر و اندازه‌گیری و هندسه و داده‌ها) پایین‌تر از سطح بین‌المللی است. در پژوهش حاضر هم همان‌طور که مشاهده می‌شود میزان توجه کتاب به اکثر حیطه‌های محتوایی (مفاهیم عددی، مفاهیم هندسی، مفاهیم نمودار جبری، مفاهیم معادلات جبری) پایین‌تر از حد متوسط است.

در زمینه معیارهای آموزشی پروژه ۲۰۶۱، نتایج نشان می‌دهد، در مورد معیار شناسایی هدف میزان توجه کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی به معیارهای انتقال اهداف هر بخش کتاب و مرتبط کردن دنباله‌ای از فعالیت‌ها در هر درس در حد متوسط رو به بالا است و میزان توجه این کتاب‌ها به معیار انتقال دادن هدف هر درس، بالاتر از حد متوسط است. این نتایج، نشان‌دهنده آن است که کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی به‌طور کلی در زمینه معیار شناسایی هدف نسبتاً خوب عمل کرده‌اند.

در مورد معیار شکل دادن به ایده‌های دانش‌آموزان درباره ریاضیات، میزان توجه کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی به معیار فراهم کردن دانش پیش‌نیاز برای هر قسمت، در حد متوسط رو به بالا، میزان توجه کتاب‌ها به معیار آگاه کردن معلمان نسبت به ایده‌های دانش‌آموزان، در حد متوسط رو به پایین و میزان توجه کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی به معیار پرداختن به بدفهمی‌های دانش‌آموزان، پایین‌تر از حد متوسط است. بنابراین کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی به‌طور کلی در شکل دادن به ایده‌های دانش‌آموزان درباره ریاضیات، به اندازه کافی موفق نبوده‌اند.

در مورد معیار درگیر کردن دانش‌آموزان با ریاضیات، میزان توجه کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی به معیارهای فراهم کردن زمینه‌های متنوع برای دانش‌آموزان و فراهم کردن تجارب دست اول برای آن‌ها پایین‌تر از حد متوسط است. بنابراین، این کتاب‌ها به‌طور کلی در معیار درگیر کردن دانش‌آموزان با ریاضیات موفق نبوده‌اند.

در مورد معیار توسعه ایده‌های ریاضیات، میزان توجه کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی به معیارهای معرفی اصطلاحات و رویه‌ها و مرتبط کردن ایده‌های ریاضی، در حد متوسط، میزان توجه کتاب‌ها به معیار مدل‌سازی یا نمایش رویه‌ها، در حد متوسط رو به پایین است. اما میزان توجه این کتاب‌ها به معیارهای ارائه دقیق ایده‌های ریاضی و فراهم کردن تمرین‌های مناسب برای هر مبحث بالاتر از حد متوسط است. بنابراین کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی به‌طور کلی در معیار ایده‌های مهم ریاضیات به‌طور متوسط موفق بوده‌اند. این نتایج با نتایج پژوهش‌های کلدوی (۱۳۸۳) همخوانی دارد. در بخشی از پژوهش مذکور اشاره شده است که کیفیت و کمیت تمرین‌های مربوط به هر بخش از دید دبیران مناسب است. در مورد معیار ارتقای تفکر دانش‌آموزان در مورد ریاضیات، میزان توجه کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی به معیارهای کمک به دانش‌آموزان در توضیح دادن استدلال‌هایشان و تشویق دانش‌آموزان به تفکر در مورد آنچه یاد گرفته‌اند پایین‌تر از حد متوسط است. بنابراین، کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی به‌طور کلی در معیار ارتقای تفکر دانش‌آموزان در مورد ریاضیات موفق نبوده‌اند. این نتایج با نتایج پروژه ۲۰۶۱ و پژوهش‌های محمدی (۱۳۸۵) و محمد اسماعیل (۱۳۸۴) و کیامنش و نوری (۱۳۷۷) همخوانی دارد. در پژوهش‌های مذکور، اشاره شده که سطح استدلال ریاضی دانش‌آموزان پایین است و به‌ندرت، معلمان نحوه تفکر دانش‌آموزان را بررسی می‌کنند. همچنین، نتایج پروژه ۲۰۶۱ نشان می‌دهد که اکثر کتاب‌ها در ارتقای تفکر دانش‌آموزان، به‌طور رضایت‌بخش عمل نکرده‌اند.

در مورد ارزشیابی پیشرفت دانش‌آموزان در ریاضیات، میزان توجه کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی به معیارهای ارزشیابی از طریق کاربردها و استفاده از ارزشیابی‌ها به‌عنوان بخشی از فعالیت‌های یادگیری، پایین‌تر از حد متوسط است. در نتیجه، کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی به‌طور کلی، در ارزشیابی پیشرفت دانش‌آموزان در ریاضی موفق نبوده‌اند.

در مورد معیار ارتقای محیط یادگیری ریاضی، میزان توجه کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی به معیار فراهم کردن محتوای کمکی برای معلم در حد متوسط رو به پایین است، اما میزان توجه این کتاب‌ها به معیار توجه به تفاوت‌های فردی دانش‌آموزان و ایجاد کلاسی شوق‌آور و چالش‌برانگیز، پایین‌تر از حد متوسط است. بنابراین کتاب‌های ریاضی دوره راهنمایی، به‌طور کلی در معیار ارتقای محیط یادگیری ریاضی موفق نبوده‌اند. این نتایج با نتایج پروژه ۲۰۶۱ همخوانی دارد. نتایج پروژه ۲۰۶۱ نشان داد که اکثر کتاب‌ها در فراهم کردن محتوای کمکی برای معلم و پشتیبانی از دانش‌آموز ضعیف بوده‌اند.

### بحث

از آنجا که آماده کردن دانش‌آموزان برای زندگی آینده، که نیاز به سواد علمی و یادگیری در طول عمر دارد، از طریق آموزش مهارت‌ها و کسب نگرش‌های ضروری امکان‌پذیر می‌شود، برنامه‌ریزان برنامه درسی کوشش می‌کنند دانش‌ها را در حد ضروری کاهش دهند و در عوض، مهارت‌ها و نگرش‌ها را به‌طور گسترده مطرح کنند. پس آموزش مهارت‌ها، باید به‌طور جدی‌تری در کتاب‌ها مورد توجه قرار گیرد و دانش‌آموز بتواند ارتباط درونی مفاهیم و مهارت‌ها را درک کند. همچنین، کتاب‌های درسی می‌بایست ارتباط ریاضی با زندگی روزمره و با سایر علوم را برای دانش‌آموزان به روشنی بیان کنند و ریاضیات را برای دانش‌آموزان علمی مفید و ارزشمند جلوه دهند و اهمیت ریاضیات را در شکل دادن به آینده شغلی و تحصیلی آن‌ها، برایشان مشخص سازند. کتاب‌های درسی ریاضی دوره راهنمایی در ایران در آموزش «مهارت»‌های عددی و هندسی نسبت به «مفاهیم» عددی و هندسی و مفاهیم نمودار جبری و معادلات جبری موفق‌ترند، بنابراین، جا دارد این کتاب‌ها در زمینه آموزش مفاهیم مهم ریاضی، مورد بررسی و تجدید نظر قرار گیرند.

### پی‌نوشت‌ها

\* این ترجمه تحت نظارت خانم دکتر سهیلا غلام‌آزاد، انجام شده است.

1. National Science Foundation
2. Middle school

در آمریکا، پایه‌های ۶ و ۷ و ۸ به‌عنوان دوره متوسطه اول در نظر گرفته می‌شود.

3. A rigorous and uniformly applied process
4. An evidence-based analysis procedure
5. Key mathematics benchmarks
6. Research-based instructional criteria
7. National Council of Teachers of Mathematics

## اشاره

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجله رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

## روایت‌ها

# حال و هوای یک زنگ ریاضی

فاطمه ابراهیمی<sup>\*</sup>، دانشجوی کارشناسی ریاضی

نکته‌ای که با حضورم در کلاس به آن پی بردم، این بود که چقدر کودکان ۶ ساله، از نظر قد و اندازه کوچک هستند؟! یا شاید ما خیلی بزرگ شده‌ایم؟!

اولین نیمکت در ردیف کنار پنجره یک جای خالی داشت که معلم کلاس، مرا به‌سمت آنجا راهنمایی کرد. از دانش‌آموزی که پشت آن نیمکت بود پرسیدم: «به‌نظر تو من اینجا جا می‌شم؟» و او سرش را به‌معنای «تمی‌دانم،



با توجه به اینکه کتاب پایه اول دبستان تغییر کرده است، به کلاس اول دبستان ... واقع در ناحیه ... تهران رفتم تا روایت خود را از آن کلاس، بنویسم. معلم کلاس، سرکار خانم . . . با مدرک کارشناسی آموزش ابتدایی و سابقه ۲۵ سال کار در پایه اول، با روی گشاده از من استقبال کردند و وقت خودشان را به‌طور کامل در اختیارم قرار دادند.

شاید!« تکان داد.

رنگ لباس فرم کودکان، یاسی و بنفش بود. از امسال، کلاس به سیستم کامپیوتر و ویدئو پروژکتور مجهز شده بود و یک میز به‌همین منظور، کنار تخته اضافه شده بود. همچنین، نرم‌افزارهایی برای آموزش شامل خود کتاب درسی نیز به کمک معلم آمده بود. میز اصلی معلم جلوی در ورودی کلاس بود و روی آن دفترهای تکلیف کودکان، یک لیوان پر از قلم‌های مختلف، کیف معلم، یک بسته شکلات و یک دسته

ابعاد کلاس حدود پنج در شش بود و در آن، سه ردیف به‌ترتیب ۷، ۶ و ۶ تایی نیمکت بود که پشت هر کدام، دو صندلی برای دانش‌آموزان قرار داده شده بود. همگی نو و به رنگ‌های سبز و زرد بودند. نیمکت‌ها تا نزدیکی تخته آمده بودند و زیر هر نیمکت، دو جعبه با کارتن پلاست، شامل وسایلی مثل چسب و قیچی و نظایر آن، مربوط به افرادی بود که پشت آن‌ها می‌نشستند و اسم هر کس روی جعبه خودش نوشته شده بود. کلاس ۳۸ دانش‌آموز داشت.



|  |     |   |
|--|-----|---|
|  | /// | ۳ |
|  |     |   |
|  |     |   |
|  |     |   |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۲ | ۳ |   |   |
|   |   | ۱ |   |
| ۴ |   |   |   |
| ۳ |   | ۲ |   |
| ۲ | ۴ | ۱ | ۳ |

|   |   |   |
|---|---|---|
|   | ۴ | ۳ |
| ۳ | ۴ | ۱ |
| ۱ | ۲ |   |
| ۴ | ۳ | ۱ |

دانش آموزان ممکن است جدول‌ها را به روش‌های مختلف حل کنند. به آن‌ها فرصت دهید تا روش خود را در کلاس مطرح کنند. از فرزند خود بخواهید اشکای مختلفی که در منزل می‌بیند بشمارد و عدد مربوط به آن را با چوب خط نمایش دهد و کنار آن بچسباند.

دانش آموزان: پشت نیمکت‌ها روی صندلی.  
معلم: به صورت‌هاشون نگاه کنین! توی قیافه‌شون شیطنتمی‌بینین؟  
دانش آموزان: نه!  
معلم: دوتا دوتا با هم حرف می‌زنن؟  
دانش آموزان: نه!  
معلم: اون آرامش لازم رو، مثل شما که تمام گوش و چشم و حواستون به خانم معلمه، دارن؟ تیز، خوشگل و آماده هستن خانم معلم درس جدید رو شروع کنن؟  
دانش آموزان: خانم معلم! توی تصویر که معلم پیدا نیست؟  
معلم: چرا؟  
دانش آموزان: چون اگر آقا بود باید بگیم آقای معلم! (معلم به استدلال دانش آموزان توجهی نکرد)  
معلم: (دوباره همین سؤال را پرسید)  
دانش آموزان: الان که ما نمی‌بینیم آقا یا خانم هستن!  
معلم: چرا من نگفتم آقای معلم؟ گفتم خانم معلم!  
دانش آموزان: چون نمی‌دونیم!  
معلم: ولی من می‌دونم که معلمشون خانم هستن! کلاس شلوغ شد و دانش آموزان شروع به صحبت پیرامون این موضوع کردند. معلم سعی کرد با این جملات کلاس را آرام کند که «موقع جواب به سؤالات من، فقط باید دست بگیرین و اجازه صحبت زمانی داده می‌شه که خانم معلم بگه بفرمایید!». بالاخره یکی از بچه‌ها گفت «چون دانش آموزان دخترن» و معلم او را تشویق کرد! زیرا جوابی را که می‌خواست بشنود، شنیدند! بعد هم مجدداً توضیح داد که «چون دانش آموزان دختر هستن، حتماً معلمشون خانمه. می‌شه الان معلم شما آقا باشه؟» و بچه‌ها گفتند «نه!» و جواب‌هایی مورد انتظار معلم پیرامون این موضوع دادند. مثلاً یکی گفت که «اگه آقا باشه، زشته ما مقنعه‌مون رو جلوش برداریم». معلم اضافه کرد که «اسلام اجازه این کار رو نمیده که شما جلوی نامحرم، مقنعه‌تون رو بردارین».

برگه بود که همگی با نظم خاصی چیده شده بودند.  
کلاس دو پنجره بزرگ داشت که نور را از سمت جنوب وارد کلاس می‌کرد. پرده‌ها به رنگ صورتی بود (محیط پر از رنگ‌های محبوب دختر بچه‌ها بود).  
دیوارهای کلاس پر بود از کاردستی‌های کودکان و نقاشی‌هایی که با اعداد و حروف کشیده شده بودند.  
در گوشه‌های دیوارهای مجاور تخته، یک کمد و چند کتو بود که محل نگهداری پوشه کار دانش آموزان و وسایل مورد نیازشان برای انجام فعالیت‌ها و آزمون‌های عملی بود.  
روی تخته گچی، یک تخته وایت‌برد نصب شده بود و پرده ویدئو پروژکتور، هنگام باز شدن، روی آن را می‌پوشاند.  
به‌مرور متوجه شدم که معلم محترم، جای دانش آموزان را به‌گونه‌ای تنظیم کرده است که آن‌هایی که آمادگی کمتری دارند یا بازیگوش‌ترند، جلوی کلاس و تحت نظارت مستقیم وی باشند (برخلاف زمان ما که بازیگوش‌ترها عقب‌تر می‌نشستند!)  
با شروع ساعت مربوط به تدریس ریاضی، خانم معلم یک عکس روی پرده انداخت که جزو ۲۲ مضمونی بود که باید برای تدریس دروس از آن‌ها استفاده می‌شد و مفاهیم اجتماعی و فرهنگی و حتی سیاسی را برای مضمون این درس، از تصویر یک کلاس درس استفاده شده بود که معلم پشت دوربین قرار داشت، به‌عبارت دیگر معلم در تصویر نبود.

### شروع کلاس

معلم محترم سؤالات خود را شروع کرد:  
معلم: بچه‌ها! [در این عکس]، دانش آموزها کجا نشسته‌اند؟

با شروع ساعت مربوط به تدریس ریاضی، خانم معلم یک عکس روی پرده انداخت که جزو ۲۲ مضمونی بود که باید برای تدریس دروس از آن‌ها استفاده می‌شد و مفاهیم اجتماعی و فرهنگی و حتی سیاسی را برای دانش آموزان باز می‌کرد

تحلیل: (آموزش مباحث دینی در ساعت ریاضی شاید به‌منظور توجه به رویکردهای فرهنگی-دینی است که در سند تحول آموزش و پرورش بر آن تأکید شده، شاید هم به‌عنوان وجهی از رویکرد تلفیقی به برنامه‌دستی ریاضی؟! نمی‌دانیم).

معلم به پرسش‌هایش، دربارهٔ تصویر، ادامه داد:

معلم: کلاس [در تصویر] چه وضعیتی داره؟ به زمین کلاس نگاه کنید؛ تراشه‌های مداد رو کجا می‌ریزن؟ دانش‌آموزان: سطل آشغال.

معلم: به مقنعه‌ها نگاه کنین! سفید هستن! لکی روی آن‌ها می‌بینین؟

دانش‌آموزان: نه!

معلم: چرا؟

دانش‌آموزان: چون کلاه! (با صدای کش‌دار!) (بچه‌ها فقط با لحن معلم پیش می‌رفتند و کمتر فکر می‌کردند. نشانه آن هم سکوت‌های کش‌دار بعد از هر «چون» که در جواب هر «چرا» بود. چند بار چون که را تکرار می‌کردند و بعد جوابی می‌دادند که مورد نظر معلم نبود.) آشغالی توی میزشون نیست!

معلم: (با احترام و محبت) من اینو نپرسیدم!

دانش‌آموزان: چون که وقتی می‌آیم بیرون، باید مقنعه‌مون تمیز باشه که خانم مربی ما رو دعوا نکنه!

معلم: سؤال منو نتونستین خوب جواب بدین!

یک دانش‌آموز: (در حالی که دست خود را بالا گرفت) مثلاً غذا می‌خورن، مقنعه‌شون رو می‌زنن بالا به‌خاطر اینکه کثیف نشه!

معلم: چون مراقبت می‌کنن (مضمونی که باید آموزش داده می‌شد، مراقبت بود!)

معلم: درخانه چه کسی به بچه‌های ۲ ساله غذا می‌ده؟ دانش‌آموزان: مادر!

معلم: چرا مادر باید به بچه‌های کوچک غذا بده؟

چند دانش‌آموز: تا رشدش خوب بشه!

دانش‌آموز دیگر: چون که ضعیف نشه بیفته گوشهٔ خونه! بزرگ شه مثل ما، بتونه درسشو خوب بخونه و اینا!

یکی دیگر: اگه مامان بده دست بچه، بچه می‌ریزه روی لباسش!

بالاخره، معلم پاسخ مورد نظرش را یافت و آن را تکمیل کرد: «چون نمی‌تونه مراقبت کنه! اما شما به راحتی و بدون وجود مادر، از لباساتون و از خودتون و وسایلتون مراقبت می‌کنین! بزرگ شدین!»

معلم پیرامون مضمون روی پرده راجع به تعداد پنجره‌ها، لزوم وجود پنجره در کلاس و همچنین، تابلویی که در آن، تصویر نقشهٔ ایران بود سؤال‌هایی را پرسید. از جمله ویژگی‌های پرچم ایران را توضیح داد و گفت که چرا پرچم‌های کشورها با هم متفاوت هستند. بعد در این باره سؤال‌هایی پرسید و دانش‌آموزان پاسخ‌های صحیحی دادند. هرچند که هم‌چنان، هنگام جواب به سؤالاتی که با چرا شروع می‌شدند، کودکان به شیوهٔ قبل، یعنی گفتن **چون که و سکوت و کمی مکث تا بیان استدلال** عمل می‌کردند.

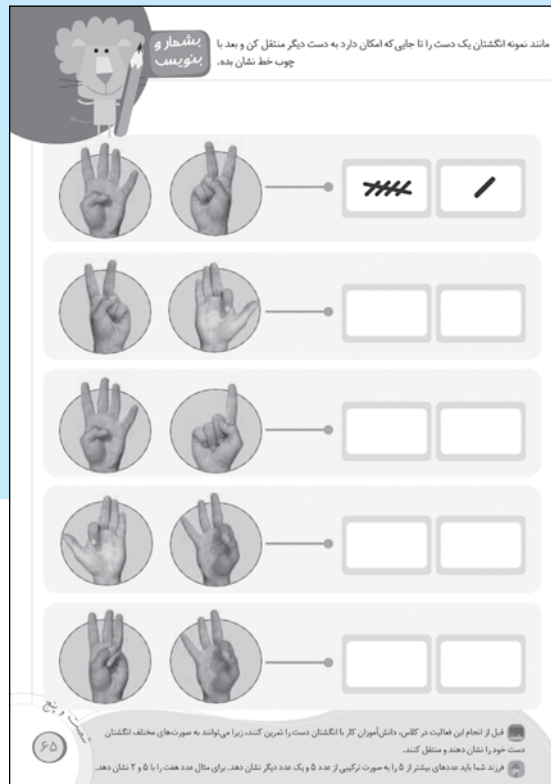
با این حاشیهٔ طولانی و غیرمرتبط، درس ریاضی آن روز به‌طور رسمی شروع شد.

## شروع درس

معلم از سه نفر از دانش‌آموزان خواست پای تابلو بیایند. سپس از سایر کودکان، نام و تعداد دوستان پای تختهٔ آن‌ها را پرسید و از آن‌ها خواست با انگشت‌های خود، تعداد دوستان پای تخته را نشان بدهند. او چندین بار این جمله را به‌صورت آهنگین تکرار کرد که «چندتا دانش‌آموز؟ سه‌تا دانش‌آموز!»

**بازتاب:** به این روش تمرین و تکرار<sup>۱</sup> گفته می‌شود و یکی از رایج‌ترین شیوه‌های آموزشی رفتارگرایان برای یادگیری است که همان ایجاد تغییر در رفتارهای بیرونی یادگیرنده است.

در ادامه، معلم از یکی از دانش‌آموزان خواست تا از وسایلی که روی میزش هست، به تعداد دانش‌آموزان پای تخته انتخاب کند و به همه نشان بدهد. همچنین،



**معلم از کلاس  
خواست  
تا برای  
دانش‌آموزان  
پای تخته  
دست بزنند.  
بعد آن‌ها  
می‌رفتند  
سر جایشان  
می‌نشستند.  
به‌خاطر  
این تشویق،  
همه مشتاقانه  
می‌گفتند  
«خانم  
می‌شه منم  
بیام؟» چون  
می‌خواستند  
بقیه برایشان  
دست بزنند!**

از بقیه خواست به دست آن دانش‌آموز خوب نگاه کنند. آن دانش‌آموز سه مداد برداشت و معلم با ضرب‌آهنگ قبلی چندین بار تکرار کرد: «سه‌تا مداد، سه‌تا دانش‌آموز.»

انتظار داشتیم یکی از دانش‌آموزان، وسایلی غیر از جنس یکسان برگزیند. دانش‌آموز دیگری که معلم همان درخواست قبلی را برای او نیز تکرار کرد، دو مداد و یک پاک‌کن برداشت و به معلم نشان داد. معلم بلافاصله او را تحسین و تکمیل کرد که چون مانند درخواست معلم از وسایل روی میزش شیء انتخاب کرده، کار او درست است؛ البته معلم اضافه کرد که ولی بهتر این است که اشیای انتخابی او از یک جنس باشند. آن‌گاه با مثالی شروع به توضیح بیشتر آن چه گفته بود کرد: «اگر من این کتاب را کنار دو دوست شما بگیرم، می‌توانم برای شمارش هر سه چه بگویم؟ سه‌تا کتاب؟ سه‌تا دانش‌آموز؟» همه از این مثال معلم خندیدند و وی باز مثال زد که «سه‌تا تراش، سه‌تا مداد، سه‌تا دانش‌آموز، سه‌تا پاک‌کن و...!»

بعد از این، معلم تصویر کتاب را روی پرده انداخت. اولین تصویر، نشان دهنده سه پاک‌کن بود. معلم یادآوری کرد که برای نشان دادن این سه پاک‌کن، از دو راه استفاده می‌کردیم که یکی **چوب‌خط** و دیگری **عدد** بود. سپس از یکی از دانش‌آموزان خواست تا از هر دو راه انجام دهد و این جمله را چندین بار تکرار کرد که «سه‌تا پاک‌کن، سه‌تا چوب‌خط.»

تصاویر بعدی یک تراش، چهار قیچی و شکل‌های دیگری بود که معلم برای نشان دادن تعداد آن‌ها به هر دو شیوه، از دانش‌آموزان خواست تا پای تابلو بیایند و همین کار را انجام دهند و هر بار، برای مثال این جمله را آهنگین تکرار می‌کرد: «چهارتا قیچی، چهارتا چوب‌خط.»

معلم: چوب‌خط‌ها کی پُر می‌شن؟

دانش‌آموزان: وقتی می‌شن پنج‌تا.  
یکی از دانش‌آموزان متوجه هدف معلم از این سؤال شد و پرسید:

دانش‌آموز: خانم اگه ۶ تا تراش بود باید چیکار کنیم؟  
یکی از دانش‌آموزان پای تابلو آمد و شکل ۶ تا چوب‌خط را کشید و با گذاشتن پنجمین چوب‌خط روی چهار چوب‌خط دیگر، یک دسته ۵ تایی درست کرد. سپس هر کدام از دانش‌آموزان شروع به پرسیدن شکل چوب‌خط‌های یک عدد کردند مثلاً یکی ۷، بعدی ۸، دیگری ۱۰ و به همین ترتیب.

**بازتاب:** راه کار اصلی معلم برای آرام‌سازی کلاس، نشنیدن سؤالات دانش‌آموزان و در عوض، تکرار سؤال خود تا جایی بود که به **پاسخ مورد انتظار** در برنامه و کتاب درسی برسد.

معلم از کلاس خواست تا برای دانش‌آموزان پای تخته **دست بزنند**. بعد آن‌ها می‌رفتند سر جایشان می‌نشستند. به‌خاطر این تشویق، همه مشتاقانه می‌گفتند «خانم می‌شه منم بیام؟» چون می‌خواستند بقیه برایشان **دست بزنند!** پس از این، باز هم معلم طبق روش قبلی خود، از دانش‌آموزان خواست که قسمت‌های مورد نظر را در کتاب پر کنند. بعد هم یک‌به‌یک بالای سر کودکان رفت تا از درستی کارشان مطمئن شود.

سپس معلم راجع به **جدول‌های سودو کو** توضیح داد و گفت: «مانند همه جدول‌های قبلی که از اول با هم کار کردیم، باید عدد تکراری توی هیچ سطر یا ستونی نباشد. باید هر بار چک کنیم.» با آنکه دانش‌آموزان توضیحات معلم را متوجه نشدند، شروع به پر کردن جدول‌ها کردند.

**بازتاب:** جالب اینجاست که حالت چهره دانش‌آموزان، خبری از نفهمیدن آن‌ها نمی‌داد. شاید مثل بزرگ‌ترها، گاهی وقت‌ها می‌دانستند که نمی‌فهمند، اما به روی خود نمی‌آوردند و سعی می‌کردند چهره‌های مطمئن و موجهی از خود بروز دهند یا اینکه از سر ناچاری (و البته برخلاف ما بدون ترس!) شروع به عددگذاری می‌کردند. شاید هم نمی‌دانستند که نمی‌دانند! انگار بازی می‌کردند و

## جمع‌بندی

در پایان کلاس، خانم ناظم به کلاس آمده و به ما اعلام «خسته نباشید» کرد و زنگ ریاضی این گونه تمام شد.

نظر معلم محترم راجع به تغییرات کتاب درسی، به‌عنوان کسی که ۲۵ سال سابقه تدریس ریاضی داشت، چنین بود:

- کتاب جدید با ۸۰ درصد تغییر نسبت به کتاب قبل، با امکانات آموزشی و استفاده از تکنولوژی، در کلاسی تا سقف حداکثر ۲۵ نفر، جذاب است و می‌توان بالاترین سطح آموزشی را در این شرایط، به دانش‌آموزان ارائه کرد.
- حجم کتاب ۳۰ صفحه افزایش یافته و این ۳۰ صفحه، انرژی زیادی از معلم می‌گیرد.

- مطالبی مانند ساعت و محور و جمع اعداد بالاتر از ۱۰، از پایه دوم به پایه اول منتقل شده که بار سنگینی را بر دانش‌آموز و معلم تحمیل می‌کند. باید آموزش از پیش‌دبستانی هدفمند باشد و دانش‌آموزان به‌جای مفاهیمی مثل فصول و مشاغل و حیوانات، با مطالبی آشنا شوند که به مطالب این کتاب وصل شود تا فرایند آموزش این کتاب تسهیل شود. این کامل نبودن زیرساخت‌ها، به نظام آموزشی ضربه وارد می‌کند. آموزش رسمی باید به پیش‌دبستانی برگردد و هدفمند صورت پذیرد.

- اضافه شدن بخش‌های خلاقیت مثل جدول‌های سودوکو و الگویابی جالب است و همه این‌ها برای کلاسی حداکثر با جمعیت ۲۵ نفر و با کیفیت بالا، قابل اجراست. ۳۸ نفر دانش‌آموز در کلاس، انرژی زیادی از معلم می‌گیرد و باز هدف کتاب برآورده نمی‌شود.

- در رابطه با تم‌های (مضمون‌های) آموزشی نیز، ۲۲ تم موجود در طرح درس به مفاهیم آموزشی، سیاسی، اجتماعی، فرهنگی و ایدئولوژی می‌پردازد که برای هر یک، طرح درس‌های مشخصی داده شده است و مطالبی که در رابطه با هر تم بیان می‌شود، چیزی است که از قبل تعیین شده و معلم ملزم به بیان آن‌ها است.
- برای تدریس این کتاب، حدود ۸۰ ساعت دوره ضمن خدمت دیده‌ام (که خود عدد قابل توجهی است).

به حرف‌های معلم گوش نمی‌دادند و کار خودشان را می‌کردند وقت می‌گذرانند و بدون فکر، عددگذاری می‌کردند تا بالاخره، به نتیجه برسند. دنیای شاد و بی‌غم آن‌ها را، تشویق‌های معلم هم به هم نمی‌زد!

معلم بالای سر تعدادی از کودکان رفت و اشتباهاتشان را به آن‌ها گوشزد کرد. ولی متوجه شد اکثراً دچار مشکل هستند. معلم علت را در کلامش جست‌وجو کرد و گمان نمود به‌خاطر عبارت «چک کردن»، کودکان به اشتباه افتاده‌اند. با این تصور، توضیح داد که «چک کردن یعنی اینکه عدد تکراری در ستون نداشته باشیم. مثلاً الان ۱، ۳، ۴ رو توی یک سطر نوشتی. چه عددی رو از ۱ تا ۴ ننوشتی؟ به این می‌گن چک کردن». دانش‌آموزان با آزمون و خطای زیاد، بالاخره جدول‌ها را پر کردند (نکته خوب این پرسش و پاسخ این بود که معلم به‌طور مستقیم، از روش رد گزینه‌هایی که کودکان پیشنهاد می‌کردند، استفاده نمی‌کرد). ایشان درست فکر کرده بود، چرا که با توضیح معنای چک کردن جدول برای نوشتن هر عدد، دانش‌آموزان آرام آرام شروع به پر کردن جدول‌ها کردند، هر چند هنوز عده‌ای دچار اشتباه می‌شدند. معلم دوباره بلند گفت: «بچه‌ها من هنوز توی جدول بعضی از شما، عدد تکراری می‌بینم. چرا؟ چون می‌خوانین با عجله بنویسین. هر ستون رو نگاه کنین، اگر تکراری دارین عددها رو جابه‌جا کنین.»

**بازتاب:** یافته‌های پژوهشی بسیاری در مورد چگونگی ایجاد درک عددی<sup>۲</sup> در کودکان پیش‌دبستانی و پایه اول ابتدایی وجود دارد. تقریباً در هیچ یک، توصیه‌ای برای ایجاد این فهم و درک از طریق جدول سودوکو نشده است. اگرچه در سال‌های بالاتر، به‌عنوان مهارت‌آموزی و تداوم یادگیری، از چنین راهکارهایی ممکن است استفاده شود. در هر صورت، انتخاب چنین سازوکارهایی برای شروع آموزش ریاضی کودکان، جای بحث و تأمل دارد و نیازمند ارجاع به یافته‌های پژوهشی است.

پی‌نوشت‌ها

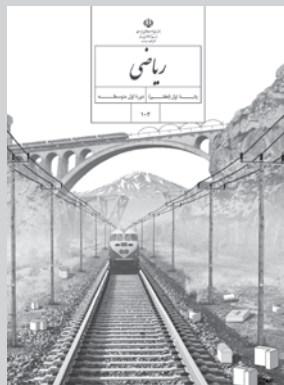
\* با همکاری زهرا گویا،  
دانشگاه شهید بهشتی

1. Drill & Practice  
2. Number Sense



# دوره بازآموزی ریاضی پایه هفتم

صفر جلیلی، دبیر ریاضی شهرستان سیلوانه / آذربایجان غربی  
و کارشناس ارشد آموزش ریاضی



## کلیدواژه‌ها: دوره بازآموزی،

ریاضی پایه ۷، فعالیت

دوره تحلیل روش تدریس ریاضی پایه هفتم و بازآموزی عملی آن با حضور دبیران ریاضی در ارومیه مرکز استان آذربایجان غربی و با حضور مدرسی که در تهران آموزش دیده بود اجرا شد. بنا به گفته مدرس این دوره، «مؤلفان این

کتاب، از جمله... به آن‌ها چند ساعتی آموزش دادند، اما بنا به کسالتی که برای یکی از ایشان پیش آمده بود، آموزش آن‌ها به همین اندازه منتهی شد». در این دوره، کتاب تازه تألیف ریاضی پایه ۷ تا حدودی مورد بررسی قرار گرفت و موارد مختلفی مطرح شد، اما برخی از آن‌ها به نتایج خاصی نرسید. در اینجا، چند مورد از موارد مطرح شده را معرفی می‌کنیم:

## ● بعضی استدلال‌ها و تعریف‌های نادقیق

**یاغیرعلمی:** در بعضی فصل‌های کتاب، استدلال‌ها و تعریف‌های نادقیق و گاهی غیرعلمی ارائه شده است. به عنوان نمونه، در مبحث «عبارت‌های جبری»، اشاره شده که «در یک عبارت جبری اغلب از علامت ( ) یا پرانتز برای حاصل ضرب بین آن‌ها استفاده می‌شود و از نماد  $\times$  پرهیز می‌گردد زیرا ممکن است [نماد] ضرب با نماد انگلیسی  $x$  به عنوان یک متغیر اشتباه شود». این در حالی است که تحقیقات مختلفی که در داخل و خارج از ایران انجام شده، به این نتیجه رسیده‌اند که «معمولی‌ترین نماد میان‌بر در جبر، حذف علامت ضرب است و چون متغیرها ارزش مکانی ندارند، می‌توانیم ضرب را با کنار هم قرار دادن اعداد، حرف‌ها یا پرانتزها، نشان دهیم؛ مانند  $3 \times a = 3a$  و  $\frac{3}{2} \times (-) = 3 \times (-)$ . اما در حساب، پی‌درپی آوردن اعداد (الحاق)، بیانگر «جمع به‌طور ضمنی» است و به عنوان هر دو عدد در محل ارزش مکانی‌شان است. به عنوان مثال،  $27$  به معنای  $20 + 7$  و  $2\frac{1}{2}$  به معنای  $2 + \frac{1}{2}$  است.

## ● عدم توجه به ویژگی‌های فعالیت:

فعالیت به عنوان یک ظرفیت یادگیری، فرایند حل مسئله اکتشافی و خلاقانه است که دانش‌آموزان به صورت گروهی در کلاس انجام می‌دهند تا با راهنمایی معلمان، زمینه یادگیری مطلب جدید ریاضی فراهم شود و بتوانند در شکل‌گیری یا ساختن دانش خویش، سهمیم باشند. به گفته میسون (۱۳۸۶)، از لحاظ

پداگوژیک، فعالیت کارآمد، یادگیرنده را به چالش می‌اندازد تا اعمال آشنا را به روش‌های جدید، به کار بندد. اما در برخی مباحث کتاب تازه تألیف ریاضی ۷، از جمله «میانگین داده‌ها»، از همان ابتدای فعالیت، اول فرمول میانگین به صورت  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$  و میانگین مساوی مجموع داده‌ها تقسیم بر تعداد داده‌ها نشان داده شده است، و بدون اینکه دانش‌آموز را به چالش بکشد، قاعده را در اختیار دانش‌آموز قرار داده است. این طراحی، با هدف «فعالیت» مغایر است.

## ● نامرتب بودن بعضی تصویرها با محتوای فصل:

در این راستا، یکی از دبیران حاضر در این دوره، از مدرس دوره استانی که در تهران به عنوان تأمین مدرس توسط مؤلفان آموزش دیده بود پرسید که «هدف تصویرهای این فصل چیست و چرا به محتوای آن ربطی ندارد؟» و او پاسخ داد «با توجه به سند تحول بنیادین، هدف این تصاویر، پرداختن به مسائل فرهنگی است.»

خلاصه اینکه، برای برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، لازم است حساسیت‌ها بیش از این باشد. کتابی که میلیون‌ها خواننده دقیق و موشکاف-معلم و دانش‌آموز- دارد و قشر عظیمی از مردم لازم است مطالب آن را بیاموزند و براساس آن ارزشیابی شوند، شایسته است کمترین اشکالی نداشته باشد. در پایان این دوره، گفته یکی از دبیران شهر ما خیلی جالب بود و اینکه «چه کلاس‌های تقویتی که از این کتاب بیرون خواهند آمد؟»



# نقدی بر کتاب ریاضی (۲)

## فصل هفتم

مهدی میرزافام، کارشناس ارشد ریاضی کاربردی  
دبیر دبیرستان، عجبشیر، آذربایجان شرقی

### چکیده

در این مقاله، یک تمرین از فصل ۷ کتاب ریاضی ۲ (فصل جایگشت، قسمت ترتیب، ص ۱۸۶، تمرین ۷) مورد توجه قرار گرفته است. از آنجایی که نحوه مطرح کردن مسئله با تداعی و استدلال آن در ذهن دانش آموزان رابطه مستقیم دارد لذا باید تا حد امکان صورت مسئله به شکل مناسبی مطرح شود تا دانش آموز بتواند با استفاده از اصول شمارش، یعنی اصل‌های جمع و ضرب و جایگشت آن را حل کند.  
**کلیدواژه‌ها:** ترکیبیات، جایگشت، نقد و بررسی کتاب درسی، ریاضی دوم دبیرستان.

### مقدمه

**اصل جمع:** اگر کار A را بتوان به  $m_1$  یا  $m_2$  یا  $m_3$  طریق انجام داد، آنگاه به‌طور کلی کار A را می‌توان به  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$  طریق انجام داد.  
**مثال:** محمد می‌تواند با استفاده از ۲ خط تاکسی یا ۳ خط اتوبوس به دانشکده برود، لذا او برای رفتن به دانشکده می‌تواند از ۵ + ۲ راه استفاده کند.

**اصل ضرب:** هرگاه عملی از n جزء مختلف تشکیل شده باشد و جزء اول به  $m_1$  طریق، جزء دوم به  $m_2$  طریق و... جزء nام به  $m_n$  طریق مختلف قابل انجام باشد، آنگاه آن عمل را می‌توان به  $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$  حالت مختلف انجام داد.

**جایگشت:** اگر تعدادی شیء متمایز داشته باشیم، به هر نحوه قرار گرفتن آن‌ها در کنار هم جایگشت می‌گوییم.  
**ترتیب k شیء متمایز از n شیء:** تعداد جایگشت‌های k تایی از n شیء متمایز را معمولاً با نماد  $p(n, k)$  نشان می‌دهیم و داریم:

$$p(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad k \leq n$$

### متن اصلی

این تصویر تمرین ۷ صفحه ۱۸۶ کتاب ریاضی ۲ است.  
۷. اگر در یک سالن دو ردیف صندلی و هر ردیف ۱۰ صندلی باشد، مشخص کنید به چند طریق ۶ دانش‌آموز اول دبیرستان، ۳ دانش‌آموز دوم و ۴ دانش‌آموز سوم دبیرستان می‌توانند روی آن‌ها بنشینند طوری که اولی‌ها در ردیف اول و دومی‌ها در ردیف دوم باشند؟  
به‌نظر نگارنده، با توجه به آنکه ترتیب نشستن یا همان نوبت نشستن در بین گروه‌های دانش‌آموزی اول و دوم و سوم مشخص نشده است، صورت مسئله در این تمرین مبهم است. چنانچه نوبت نشستن بین گروه‌های دانش‌آموزی دلخواه باشد، حل این مسئله سخت و حداقل خارج از توان دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان است. از صورت مسئله ۶

حالت برداشت می‌شود که اکثر همکاران این مسئله را بنا به برداشتی که در حالت اول آمده، حل کرده یا می‌کنند. این ۶ حالت به صورت زیر است و برای حل آن‌ها تنها از اصل جمع و اصل ضرب و تعریف ترتیب استفاده شده است.

**حالت اول:** اگر ابتدا دانش‌آموزان کلاس اول، بعد کلاس دوم و در آخر کلاس سوم روی صندلی‌ها بنشینند، جواب به صورت زیر است:

$$p(10,6) \times p(10,3) \times p(11,4)$$

یعنی ۶ دانش‌آموز اولی در ۱۰ صندلی ردیف اول و ۳ دانش‌آموز دومی در ۱۰ صندلی ردیف دوم و ۴ دانش‌آموز سومی در ۱۱ صندلی باقی‌مانده می‌نشینند.

**حالت دوم:** اگر نوبت نشستن به این صورت باشد که ابتدا کلاس دومی‌ها، بعد کلاس اولی‌ها و در آخر کلاس سومی‌ها بنشینند، جواب به صورت زیر خواهد بود که البته با حالت اول یکسان است.

$$p(10,3) \times p(10,6) \times p(11,4)$$



**حالت سوم:** اگر ابتدا کلاس سومی‌ها، بعد کلاس اولی‌ها و در آخر کلاس دومی‌ها بنشینند، جواب زیر به دست می‌آید:

$$p(20,4) \{ p(10,6)p(6,3) + p(9,6)p(7,3) + p(8,6)p(8,3) + p(7,6)p(7,3) + p(6,6)p(10,3) \}$$

یعنی ۴ دانش‌آموز کلاس سومی در هر یک از ۲۰ صندلی می‌توانند بنشینند و برای اولی‌ها و دومی‌ها حالت‌های زیر وجود دارد:

۱. هیچ‌کدام از سومی‌ها در ردیف اول نشسته باشند و هر چهار نفر آن‌ها در ردیف دوم نشسته باشند. در این صورت برای کلاس اولی‌ها ۱۰ صندلی در ردیف اول باقی‌مانده و برای کلاس دومی‌ها ۶ صندلی در ردیف دوم، پس تعداد حالت‌های نشستن اولی‌ها و دومی‌ها  $p(10,6) \times p(6,3)$  است.

یا

۲. یکی از سومی‌ها در ردیف اول و سه نفر از آن‌ها در ردیف دوم نشسته باشند؛ لذا برای کلاس اولی‌ها ۹ صندلی باقی‌مانده و برای کلاس دومی‌ها ۷ صندلی، پس تعداد حالت‌های نشستن اولی‌ها و دومی‌ها  $p(9,6) \times p(7,3)$  است.

یا

۳. دو نفر از سومی‌ها در ردیف اول و دو نفر از آن‌ها در ردیف دوم نشسته باشند؛ لذا برای کلاس اولی‌ها ۸ صندلی باقی‌مانده و برای کلاس دومی‌ها ۸ صندلی، پس تعداد حالت‌های نشستن اولی‌ها و دومی‌ها  $p(8,6) \times p(8,3)$  است.

یا

۴. سه نفر سومی در ردیف اول و یک نفر از آن‌ها در ردیف دوم نشسته باشد؛ لذا برای کلاس اولی‌ها ۷ صندلی باقی‌مانده و برای کلاس دومی‌ها ۹ صندلی، پس تعداد حالت‌های نشستن اولی‌ها و دومی‌ها  $p(7,6) \times p(9,3)$  است.

یا

۵. در نهایت هر چهار دانش‌آموز سوم در ردیف اول نشسته باشند؛ لذا برای کلاس اولی‌ها ۶ صندلی باقی‌مانده و برای کلاس دومی‌ها ۱۰ صندلی، پس تعداد حالت‌های نشستن اولی‌ها و دومی‌ها  $p(10,6) \times p(6,3)$  است.

**حالت چهارم:** اگر ابتدا کلاس سومی‌ها، بعد کلاس دومی‌ها و در آخر کلاس اولی‌ها بنشینند، جواب به صورت زیر است که با حالت سوم یکسان است.

$$p(20,4) \{ p(10,3)p(6,6) + p(9,3)p(7,6) + p(8,3)p(8,6) + p(7,3)p(7,6) + p(6,3)p(10,6) \}$$

**حالت پنجم:** اگر نوبت نشستن چنان باشد که ابتدا دانش‌آموزان کلاس اول بعد کلاس سوم و در آخر کلاس دومی‌ها بنشینند، جواب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$p(10, 6)p(14, 4)\{p(6, 3)+p(7, 3)+p(8, 3)+p(9, 3)+p(10, 3)\}$$

یعنی کلاس اولی‌ها ۱۰ صندلی ردیف اول را برای نشستن دارند، لذا از ۱۰ صندلی در ۶ تایی آن‌ها می‌نشینند و حال که سومی‌ها می‌خواهند بنشینند ۱۴ صندلی باقی‌مانده است، لذا از ۱۴ تا صندلی در ۴ تایی آن‌ها می‌نشینند و برای کلاس دومی‌ها حالت‌های زیر پیش می‌آید:

۱. هر چهار دانش‌آموز کلاس سوم در ردیف دوم نشسته باشند؛ لذا برای دومی‌ها ۶ صندلی باقی می‌ماند که به  $p(6, 3)$  حالت در ۳ تایی آن‌ها می‌نشینند.

یا

۲. سه دانش‌آموز از سومی‌ها در ردیف دوم نشسته باشند؛ لذا برای دومی‌ها ۷ صندلی باقی می‌ماند که به  $p(7, 3)$  حالت در ۳ تایی آن‌ها می‌نشینند.

یا

۳. دو دانش‌آموز سومی در ردیف دوم نشسته باشند؛ لذا برای دومی‌ها ۸ صندلی باقی می‌ماند که به  $p(8, 3)$  حالت در ۳ تایی آن‌ها می‌نشینند.

یا

۴. یکی از دانش‌آموزان سوم در ردیف دوم نشسته باشد؛ لذا برای دومی‌ها ۹ صندلی باقی می‌ماند که به  $p(9, 3)$  حالت در ۳ تایی آن‌ها می‌نشینند.

یا

۵. هیچ دانش‌آموز سومی در ردیف دوم نشسته باشد؛ لذا برای دومی‌ها ۱۰ صندلی باقی می‌ماند که به  $p(10, 3)$  حالت در ۳ تایی آن‌ها می‌نشینند.

**حالت ششم:** اگر ابتدا کلاس دومی‌ها، بعد کلاس سومی‌ها و در آخر کلاس اولی‌ها بنشینند، جواب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$p(10, 3)p(17, 4)\{p(6, 6)+p(7, 6)+p(8, 6)+p(9, 6)+p(10, 6)\}$$

یعنی کلاس دومی‌ها ۱۰ صندلی ردیف دوم را برای نشستن دارند لذا از ۱۰ صندلی در ۳ تایی آن‌ها می‌نشینند و دانش‌آموزان سوم در ۱۷ صندلی باقی‌مانده می‌نشینند، لذا از ۱۷ تا صندلی در ۴ تایی آن‌ها می‌نشینند و برای کلاس اولی‌ها حالت‌های زیر پیش می‌آید:

۱. هر چهار دانش‌آموز کلاس سوم در ردیف اول نشسته باشند؛ لذا برای کلاس اولی‌ها ۶ صندلی باقی می‌ماند که به  $p(6, 6)$  حالت در ۶ تایی آن‌ها می‌نشینند.

یا

۲. اگر سه دانش‌آموز سوم در ردیف اول نشسته باشند؛ آنگاه برای اولی‌ها ۷ صندلی باقی می‌ماند که به  $p(7, 6)$  حالت در ۶ تایی آن‌ها می‌نشینند.

یا

۳. اگر دو دانش‌آموز سوم در ردیف اول نشسته باشند؛ آنگاه برای کلاس اولی‌ها ۸ صندلی باقی می‌ماند که به  $p(8, 6)$  حالت در ۶ تایی آن‌ها می‌نشینند.

یا

۴. اگر یک دانش‌آموز سومی در ردیف اول نشسته باشد؛ آنگاه برای کلاس اولی‌ها ۹ صندلی باقی می‌ماند که به  $p(9, 6)$  حالت در ۶ تایی آن‌ها می‌نشینند.

یا

۵. اگر هیچ دانش‌آموز سومی در ردیف اول نشسته باشد؛ آنگاه برای کلاس اولی‌ها ۱۰ صندلی باقی می‌ماند که به  $p(10, 6)$  حالت در ۶ تایی آن‌ها می‌نشینند.

#### منبع

کتاب ریاضی (۲) - ۲۳۴/۲ مؤلفان: دکتر علی ایرانمنش، محسن جمالی، حمیدرضا ربیعی، دکتر ابراهیم ریحانی، دکتر احمد شاهورانی و دکتر وحید عالمیان.



گزارشی از  
فعالیت‌های اخیر  
اتحادیه انجمن‌های  
علمی آموزشی  
معلمان ریاضی ایران

محمدباقر منزوی  
دبیر اتحادیه انجمن‌های  
علمی آموزشی معلمان ایران

# افق‌های نو در آموزش ریاضی

علی‌رغم مشکلات فراوان و عدم وجود امکانات لازم برای فعالیت انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی و نیز اتحادیه انجمن‌ها، این اتحادیه تلاش فراوان نمود تا همگام با تغییرات در سیاست‌های وزارت آموزش و پرورش، به دنبال پی‌گیری‌ها و کوشش‌های قبلی، خدمات خود را در جهت حل مسائل آموزش ریاضی کشور گسترش دهد. به همین منظور آخرین مجمع عمومی دوره پنجم اتحادیه در روزهای ۱۰ و ۱۱ مهرماه ۱۳۹۲ در تهران برگزار شد. برای برنامه‌ریزی این مجمع، سه جلسه در دفتر آموزش‌های کوتاه مدت نیروی انسانی وزارت آموزش و پرورش، با پی‌گیری شورای اجرایی اتحادیه تشکیل شد و سرانجام مرکز آموزش نیروی انسانی پیامبر اعظم (ص) واقع در ولنجک تهران برای محل برگزاری جلسات مجمع عمومی انتخاب گردید. برای برنامه‌ریزی علمی این نشست نیز جلسه‌ای در «خانه ریاضیات اصفهان» تشکیل شد.

## برنامه مجمع شامل موارد زیر بود:

۱. دعوت از وزیر آموزش و پرورش، دکتر علی‌اصغر فانی، به‌منظور استماع نظر اتحادیه و نمایندگان معلمان ریاضی کشور توسط ایشان و اعلام سیاست‌های آتی وزارت در حمایت از انجمن‌های علمی و اتحادیه‌های علمی معلمان؛

## کنفرانس‌های آموزش ریاضی ایران با حمایت وزارت آموزش و پرورش به‌طور مرتب برگزار گردد

د. وزارت آموزش و پرورش از انجمن‌ها و اتحادیه‌ها در بررسی و نحوه پیاده‌سازی اسناد بالادستی، تهیه استانداردهای آموزشی، برنامه‌ریزی درسی، ارتقا دانش حرفه‌ای معلمان و برنامه‌ریزی‌های دانشگاه فرهنگیان بهره‌گیری بهتری داشته باشد.

ه. کنفرانس‌های آموزش ریاضی ایران با حمایت وزارت آموزش و پرورش و بدون دخالت در برنامه‌های علمی آن (همانند کنفرانس‌های ریاضی که با حمایت وزارت علوم و زیر نظر انجمن ریاضی ایران برگزار می‌شود) به‌طور مرتب برگزار گردد.

و. مکان مناسب برای استقرار هر انجمن در استان‌ها و اتحادیه در تهران تدارک دیده شود و از این انجمن‌ها و اتحادیه حمایت شود.

دکتر فانی که خود از آغاز گران و حامیان اولیه تشکیل انجمن‌های علمی آموزشی معلمان در دهه هفتاد بوده‌اند نسبت به اجرای درخواست‌های فوق قول مساعد دادند و بر سیاست آتی وزارت، مبنی بر حمایت از نهادهای غیردولتی، مخصوصاً انجمن‌های علمی آموزشی معلمان ریاضی ایران و خانه‌های ریاضیات ایران و استفاده از توانمندی‌های آنان برای ارتقا جایگاه علمی آموزش و پرورش و بهره‌گیری از نظرات معلمان و عدم موازی‌کاری و رقابت بین آموزش و پرورش و این نهادها، تأکید نمودند. ایشان همچنین با بیان برخی از مشکلات موجود در برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های ریاضی، از انجمن‌ها و معلمان ریاضی درخواست همکاری نمودند.

آقای دکتر مهرمحمدی سرپرست محترم دانشگاه فرهنگیان از سیاست‌های جدید دانشگاه فرهنگیان و برنامه‌ریزی‌های آینده آن صحبت کردند و اعلام آمادگی نمودند که از خدمات و نظرات اتحادیه انجمن‌های علمی آموزشی معلمان در ادامه راه بهره‌گیری نمایند. ضمناً قرار شد از نمایندگان اتحادیه و کمیسیون پیشبرد ریاضیات و فرهنگستان علوم

۲. حضور سرپرست محترم دانشگاه فرهنگیان جهت بحث و تبادل نظر در مورد مسائل دانشگاه فرهنگیان و نیز ارتباط این دانشگاه با اتحادیه و استفاده از تجارب معلمان ریاضی؛

۳. سخنرانی رئیس انجمن آمار ایران درخصوص معرفی فعالیت‌های «ستاد ملی سال جهانی آمار» مخصوصاً در رابطه با موضوع آموزش آمار در مدارس؛

۴. سخنرانی آقای دکتر اسمعیل بابلیان، سرکار خانم دکتر زهرا گویا و آقای دکتر علی رجالی؛

۵. حضور مسئول جدید گروه درسی ریاضی دفتر تألیف وزارت آموزش و پرورش و بحث و تبادل نظر پیرامون مسائل و مشکلات تألیف کتب درسی و بیان سیاست‌های گروه ریاضی دفتر تألیف برای استفاده از نیروی بالقوه اتحادیه؛

۶. سخنرانی معاون مرکز آموزش نیروی انسانی وزارت؛

۷. بیان عملکرد و فعالیت شورای اجرایی اتحادیه و انتخاب شورای اجرایی جدید.

در این نشست، جمع‌بندی نظرات نمایندگان انجمن‌های علمی آموزشی معلمان ریاضی به شرح زیر به آقای دکتر علی‌اصغر فانی اعلام شد:

الف. انجمن‌ها و اتحادیه‌ها مجدداً بازشناخت شوند، به‌نحوی که از نیروی بالقوه آن‌ها برای کمک به استانداردسازی، برنامه‌ریزی و تألیف کتب برنامه‌های درسی ریاضی، ارزشیابی‌ها و نیز ارتقا حرفه‌ای معلمان استفاده شود.

ب. وزارت آموزش و پرورش از خدمات و نیروهای انجمن‌ها و خانه‌های ریاضیات ایران که نهادهای غیردولتی هستند، بهره‌گیری بیشتری داشته باشد.

ج. کمیسیون انجمن‌های علمی آموزشی معلمان (همانند وزارت علوم، تحقیقات و فناوری) در وزارت آموزش و پرورش تشکیل شود.

سیزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی با همت  
انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی تهران در  
تهران در سال ۱۳۹۳ و چهاردهمین کنفرانس با  
همت انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی  
استان آذربایجان شرقی در تبریز در سال ۱۳۹۴  
برگزار خواهد شد

جمهوری اسلامی ایران نیز در برنامه‌های آتی این دانشگاه بهره‌گیری شود.

آقای حمیدرضا امیری، رئیس جدید گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، نیز با استماع نظرات نمایندگان انجمن‌ها، آمادگی خود را برای بهره‌گیری از نظرات انجمن‌های علمی آموزشی معلمان و خانه‌های ریاضیات ایران اعلام و درخواست کردند که این نهادها در استانداردسازی، برنامه‌ریزی درسی و تألیف و تصحیح کتب درسی با دفتر تألیف همکاری نمایند.

آقایان دکتر بابلیان، دکتر رجالی و خانم دکتر گویا نیز در رابطه با مسئله دانشگاه فرهنگیان، افت ریاضی و برخی از دلایل این افت که مرتبط با نحوه تدریس معلمان است و نیز ارتقا حرفه‌ای معلمان ریاضی صحبت کردند.

آقای دکتر محمدزاده رئیس انجمن آمار ایران برنامه‌های ستاد ملی سال جهانی آمار را، که به مناسبت سال ۲۰۱۳ در ایران تشکیل شده است، تشریح نمودند و از معلمان ریاضی و انجمن‌های علمی آموزشی معلمان ریاضی سراسر کشور درخواست کردند در زمینه تدریس مناسب دروس آمار، ایجاد علاقه در دانش‌آموزان برای انتخاب رشته آمار و معرفی توانمندی‌های علم آمار و نیاز جامعه به این رشته از دانش بشری همت نمایند.

آقای دکتر جلالی معاون مرکز آموزش نیروی انسانی وزارت آموزش و پرورش راهکارهایی را برای تعامل بیشتر این مرکز با اتحادیه بیان نمودند.

در این جلسات نتیجه عملکرد و فعالیت‌های شورای اجرایی دوره پنجم ارائه شد، همچنین مشکلات و موانع موجود در راستای فعالیت‌های انجمن‌ها مطرح گردید و اظهار امیدواری شد که با تغییرات سیاست‌گذاری در وزارت آموزش و پرورش فعالیت‌های اتحادیه در دوره‌های بعد گسترش یابد.

به جز انجام انتخابات و تعیین اعضای شورای اجرایی جدید اتحادیه، تصمیمات زیر نیز اتخاذ شد.

- سیزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی با همت انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی تهران در سال ۱۳۹۳ و چهاردهمین کنفرانس با همت انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی استان آذربایجان شرقی در تبریز در سال ۱۳۹۴ برگزار خواهد شد (در ضمن قرار شد از هم‌اکنون برنامه‌ریزی علمی این دو کنفرانس آغاز گردد).

- به‌منظور بهره‌گیری اتحادیه از حمایت فکری، علمی و معنوی انجمن‌های علمی آموزشی معلمان ریاضی سراسر کشور امکانات لازم فراهم شود.

- ایجاد وبسایت فعال برای اتحادیه و غنی نمودن آن، ایجاد بانک اطلاعاتی فعال برای دسترسی تمام اعضا، استعدادیابی و به‌کارگیری نیروهای مؤثر و مفید برای غنی‌سازی سایت و بهره‌گیری از امکانات ICT در آموزش ریاضی

- کمیته‌های اتحادیه فعال شوند و این کار در دستور کار اتحادیه قرار گیرد.

- پذیرش دعوت سرپرست وزارت، سرپرست دانشگاه فرهنگیان و رئیس گروه ریاضی دفتر تألیف، مبنی بر همکاری اتحادیه و انجمن‌های علمی با آنان.

- بازنگری کارهای انجام شده اتحادیه هرچه زودتر انجام شود و مستندسازی از فعالیت‌ها انجام گیرد.

- راهکارهایی برای تأمین نیازهای مالی انجمن‌های علمی آموزشی معلمان ریاضی اندیشیده شود.

- تلاش برای قانع نمودن وزارت جهت استفاده از توانمندی‌های انجمن‌ها در مسائل مربوط به آموزش و پرورش مخصوصاً آموزش‌های ضمن خدمت به‌طور کامل، ارتقا حرفه‌ای معلمان، تصحیح، تألیف و نقد و بررسی برنامه‌های درسی و کتب ریاضی، شدت یابد.

- نشریه اتحاد با حمایت علمی انجمن‌ها، با نوشتن مقالات مناسب برای آن تقویت شود.