



دانشکده علوم پایه (رشته آموزش ریاضی)

پردیس علامه امینی تبریز (برادران)

عنوان:

مقالات منتخب از مجلات رشد آموزش ریاضی

طراحی واحد یادگیری برای آموزش ریاضی

دکتر یونس کریمی فردین پور

فروردین ۱۳۹۹

بسم رب الشهدا و الصديقين



سنجش شناختی تشخیصی

چکیده

در دهه گذشته در مطالعات پیزا، از انواع آزمون‌های شناختی تشخیصی برای سنجش سواد ریاضی، علوم و خواندن دانش‌آموزان استفاده شده است. بدین سبب، برای درک بهتر مقالاتی که در رابطه با پیزا و مطالعات مشابه انجام می‌شود، لازم است معلمان ریاضی، با ویژگی‌های این نوع سنجش آشنا شوند. بنابراین هدف اصلی این مقاله، معرفی اجمالی سنجش شناختی تشخیصی است.

کلیدواژه‌ها: روان‌شناسی شناختی، سنجش شناختی تشخیصی، اندازه‌گیری ساختار دانش، اندازه‌گیری صلاحیت‌های پردازشی، روش‌های آماری، روان‌سنجی، نیمرخ صلاحیتی، ماتریس کیو.

مقدمه

روان‌شناسی شناختی، گامی بزرگ برداشته‌اند. آن‌ها در فصل هفتم کتاب اندازه‌گیری آموزشی لین^۵ (۱۹۸۹)، به دلالت‌های روان‌شناسی شناختی برای اندازه‌گیری آموزشی پرداخته‌اند. از نظر لیتونوگیرل (۲۰۰۷)، ایده‌های بیان شده به وسیله اسنو و لومان (۱۹۸۹)، بسیاری از پژوهشگران آموزشی را به بررسی بالقوه یک شاخه به نسبت نوآورانه از روان‌شناسی یعنی روان‌شناسی شناختی، و نقش آن در غنی‌سازی آزمون‌ها ترغیب

یکی از ابعاد مهم فعالیت‌های آموزشی، اندازه‌گیری آموزشی است. از اواسط دهه ۱۹۸۰، با پیوند روان‌شناسی شناختی^۱ و روان‌سنجی به یکدیگر، نقش مهمی که نظریه شناختی می‌تواند در اندازه‌گیری‌های آموزشی داشته باشد، به مرور برای بسیاری از متخصصان آموزشی آشکار گردید. (لیتون^۲، گیرلو هونکا^۳، ۲۰۰۴). به عنوان مثال، اسنو و لومان^۴ (۱۹۸۹) در راستای کمک به بهبود سنجش و اندازه‌گیری آموزشی با استفاده از

کرد. لذا از سال ۱۹۸۹، مقالات و کتاب‌های متنوعی در زمینه سنجش شناختی تشخیصی نوشته شد که از آن بین، می‌توان به فردریک سن، گلیزر، لسگلد و شافتو^۷ (۱۹۹۰)، نیکولز^۸ (۱۹۹۴)، چپمن و برنان^۹ (۱۹۹۵) اشاره کرد.

تعریف سنجش شناختی تشخیصی

رویکرد سنجش شناختی تشخیصی، با هدف ارتقای سنجش برای یادگیری و فرایند یادگیری^۹، اساساً در مقابله با سنجش بازده‌های یادگیری^{۱۰} از طریق فراهم کردن اطلاعات مورد نیاز برای اصلاح آموزش و یادگیری در کلاس درس به وسیله معلم، به وجود آمده است (جانگ^{۱۱}، ۲۰۰۸). به‌طور کلی، هدف از طراحی سنجش شناختی تشخیصی، اندازه‌گیری ساختار دانش و صلاحیت‌های پردازشی^{۱۲} دانش‌آموزان به‌منظور فراهم آوردن اطلاعاتی در زمینه نقاط قوت و ضعف شناختی آن‌هاست. ساختار دانش شامل اطلاعات رویه‌ای و حقایق/ دانش یقینی است، در حالی که صلاحیت‌های پردازشی دربرگیرنده تحولات و راهبردهای مورد نیاز برای دست‌ورزی با این اطلاعات است (لیتون و گیرل، ۲۰۰۷)، به نقل از لومان، (۲۰۰۰). با اندازه‌گیری این صلاحیت‌ها بر مبنای سنجش شناختی تشخیصی، نقاط قوت و ضعف آزمون‌شوندگان شناسایی می‌شود و این چنین، می‌توان درباره صلاحیت‌های شناختی حل مسئله آن‌ها، استنباط‌های تشخیصی به دست آورد.

مدل شناختی در سنجش شناختی تشخیصی

تولید استنباط‌های مبتنی بر شناخت، بدون داشتن یک چارچوب تفسیری صریح، اگر غیرممکن نباشد، مشکل است، زیرا استنباط‌ها در اندازه بزرگ^{۱۳} (یعنی یک نمره آزمون کل) انجام نمی‌شوند، بلکه در اندازه خرد^{۱۴} (یعنی صلاحیت‌های شناختی ویژه) صورت می‌گیرند. گیرل، ونگ و ژو (۲۰۰۸)، معتقدند که مدل‌های شناختی، با فراهم کردن چارچوبی برای مرتبط کردن استنباط‌های مبتنی بر شناخت با تفسیرهای نمره آزمون خرد شده، این هدف را محقق می‌سازند.

یک مدل شناختی^{۱۵} در اندازه‌گیری آموزشی، به «توصیفی ساده از حل مسئله شخص در تکالیف آموزشی استاندارد» اشاره دارد که کمک می‌کند تا دانش و صلاحیت‌های دانش‌آموزان که در سطوح متفاوت یادگیری کسب شده است، دسته‌بندی شود و تبیین و پیش‌بینی عملکرد آن‌ها، تسهیل گردد. از ویژگی‌های مهم مدل‌های شناختی این است که صلاحیت‌های تعیین شده به وسیله مدل، باید در اندازه خرد و قابل اندازه‌گیری باشند، هم‌چنان که از نظر آموزشی مرتبط بوده و برای طیف وسیعی از نفع‌بران آموزشی، معنادار باشند (گیرل، روبرتر، آلوز و گاتزمن، ۲۰۰۹).

در سنجش تشخیصی، برای ساخت مدل‌های شناختی، از روش‌های مختلفی می‌توان استفاده کرد. از نظر روبرتر، آلوز، چو، تامپسون، بحری و گاتزمن^{۱۶} (۲۰۱۲)، روش‌های ساخت مدل‌های شناختی عبارت‌اند از:

۱. **مرور ادبیات نظری (نظریه‌های تجزیه و تحلیل تکلیف)**: یا تجزیه و تحلیل تکلیف توسط یک خبره^{۱۷} که به‌عنوان رویکرد از بالا به پایین مفهوم‌پردازی شده است.

۲. **استفاده از گزارش‌های کلامی**^{۱۸}: پاسخ‌های دانش‌آموزان به یک آزمون در یک حوزه محتوایی، به‌عنوان یک رویکرد از پایین به بالا، مفهوم‌پردازی شده است.

۳. **ترکیب دو روش**: ترکیب دو رویکرد از بالا به پایین و از پایین به بالا.

به عنوان نمونه، در جدول (۱)، یک مدل شناختی هشت صلاحیتی در حوزه حل معادلات خطی ارائه شده است (راپ، تمپلین و هنسون، ۲۰۱۰؛ برگرفته از تحقیقات گیرل و همکاران، ۲۰۰۷).

جدول ۱. یک مدل شناختی هشت صلاحیتی، در حوزه حل معادلات خطی

● درک کردن معنای نمادها و قواعد	● حل معادلات درجه دوم
● فهمیدن توصیفات متنی مسئله	● حل چند معادله به‌طور هم‌زمان
● انجام دادن دست‌ورزی‌های جبری	● ساخت یک بازنمایی جدولی
● حل معادلات خطی	● ساخت یک بازنمایی تصویری

هدف از طراحی سنجش شناختی تشخیصی، اندازه‌گیری ساختار دانش و صلاحیت‌های پردازشی دانش‌آموزان به‌منظور فراهم آوردن اطلاعاتی در زمینه نقاط قوت و ضعف شناختی آن‌هاست. ساختار دانش شامل اطلاعات رویه‌ای و حقایق/ دانش یقینی است، در حالی که صلاحیت‌های پردازشی دربرگیرنده تحولات و راهبردهای مورد نیاز برای دست‌ورزی با این اطلاعات است

مدل‌های آماری در سنجش شناختی تشخیصی

در سنجش شناختی تشخیصی، برای تحلیل داده‌های آزمون‌شوندگان، از مدل‌های آماری روان‌سنجی استفاده می‌شود. هدف از طراحی این مدل‌ها، برقراری پیوند بین نظریه شناختی و ویژگی‌های روان‌سنجی سؤال‌هاست و به طبقه‌بندی پاسخ‌های آزمون‌شوندگان براساس متغیرهای مکنون^{۱۹} چندگانه، می‌پردازند. متغیر مکنون، متغیری آماری است که نمایانگر ویژگی - یا همان صلاحیت - غیرقابل مشاهده پاسخ‌دهندگان است.

از نظر راپ، تمپلین و هنسون (۲۰۱۰)، مدل‌های آماری سنجش شناختی تشخیصی، براساس سه وضعیت زیر، تقسیم‌بندی می‌شوند:

۱. مقیاس اندازه‌گیری متغیرهای پاسخ مشاهده شده (دو ارزشی در برابر چند ارزشی)
۲. مقیاس اندازه‌گیری متغیرهای مکنون (دو ارزشی در برابر چند ارزشی)
۳. شیوه ترکیب متغیرهای مکنون.

در مدل‌های آماری سنجش شناختی تشخیصی، صلاحیت‌های شناختی در قالب نیمرخ‌های صلاحیتی^{۲۰} سؤال‌ها، نمایش داده می‌شوند. منظور از نیمرخ صلاحیتی در هر سؤال، الگویی ترکیبی از صلاحیت‌های مورد نیاز برای آن سؤال است که برای مجموعه سؤال‌ها، در یک ماتریس، به نام ماتریس کیو^{۲۱}، نمایش داده می‌شود. بنابراین ماتریس کیو، نشان‌دهنده ساختار بارگیری در مدل‌های شناختی است. هر سطر این ماتریس، یک نیمرخ صلاحیتی برای یک سؤال، یعنی یک فرضیه درباره صلاحیت‌های مورد نیاز برای کسب پاسخ درست به آن سؤال است و دارای مرتبه $n \times k$ است که در آن، n تعداد سؤال‌ها و k ، تعداد صلاحیت‌های مورد نیاز برای آن سؤال‌هاست. تمام درایه‌های این ماتریس، اعداد صفر و یک هستند. برای یک درایه خاص ماتریس Q در سطر n ام و ستون k ام، عدد ۱ نشانگر آن است که سؤال n ام خصیصه یا صلاحیت

از ویژگی‌های مهم مدل‌های شناختی این است که صلاحیت‌های تعیین شده به وسیله مدل، باید در اندازه خرد و قابل اندازه‌گیری باشند، هم‌چنان که از نظر آموزشی مرتبط بوده و برای طیف وسیعی از نفع‌بران آموزشی، معنادار باشند

k ام را اندازه می‌گیرد و عدد صفر نشان می‌دهد که آن سؤال، صلاحیت مورد نظر را اندازه نمی‌گیرد (همان). در جدول (۲)، مثالی از یک ماتریس کیو برای پنج سؤال و سه صلاحیت شناختی ارائه شده است. به‌عنوان نمونه برای پاسخگویی درست به سؤال اول، تسلط به صلاحیت ۱ کافی است، یا در سؤال پنجم، صلاحیت‌های ۲ و ۳ برای پاسخگویی درست به سؤال مورد نیاز هستند.

جدول ۲. ماتریس کیو برای سنجش تشخیصی

سؤال	صلاحیت ۱	صلاحیت ۲	صلاحیت ۳
۱	۱	۰	۰
۲	۱	۱	۰
۳	۱	۰	۱
۴	۱	۱	۱
۵	۰	۱	۱

در هر یک از مدل‌های آماری سنجش تشخیصی، عملکرد دانش‌آموز برحسب احتمال تسلط وی بر هر یک از صلاحیت‌ها تعیین می‌شود (راپ، تمپلین و هنسون، ۲۰۱۰) و برای هر دانش‌آموز، احتمال تسلط به همه صلاحیت‌ها و در نتیجه یک نیمرخ صلاحیتی، به دست می‌آید. این نیمرخ می‌تواند به وسیله نفع‌بران مختلف از جمله معلمان، به منظور تصمیم‌گیری درباره مداخله بهینه برای بهبود عملکرد دانش‌آموزان، استفاده شود. به‌عنوان نمونه، اگر در یک آزمون تشخیصی با چهار صلاحیت، براساس نتایج آزمون، احتمال تسلط به چهار صلاحیت ۱ تا ۴ برای یک دانش‌آموز، به ترتیب $0/1$ ، $0/7$ ، $0/6$ و $0/3$ باشد، با داشتن یک نقطه بُرش برای احتمال، می‌توان تعیین کرد که آن فرد، به صلاحیت‌های مورد نیاز برای آن آزمون تسلط دارد یا خیر. برای مثال بالا، اگر نقطه بُرش $0/5$ درصدی در نظر گرفته شود، احتمالاً دانش‌آموز مورد نظر، به صلاحیت دوم و سوم تسلط یافته، در حالی که برای تسلط به صلاحیت‌های اول و چهارم، نیازمند تلاش بیشتری است.

جمع‌بندی

به‌طور کلی، تهیه و تدوین ارزشیابی‌های آموزشی بر مبنای سنجش شناختی تشخیصی، مزایای زیادی دارد که از مهم‌ترین آن‌ها، پیوند دادن نظریه‌های شناختی و یادگیری با آموزش است. در دهه اخیر، استفاده از آزمون‌های شناختی تشخیصی جهت سنجش توانایی‌های آزمون‌شوندگان، بیشتر مورد توجه است، زیرا اطلاعات به‌دست آمده از این نوع آزمون‌ها، به‌طور معناداری می‌تواند به‌وسیله نفع‌بران آموزشی که درخواست چنین اطلاعاتی را داده‌اند، تفسیر شود (راپ، تمپلین و هنسون، ۲۰۱۰).

نتایج این نوع سنجش‌ها، تنها محدود به گزارش یک نمره کل برای هر آزمودنی نیست، بلکه می‌تواند تصویری جامع از نیم‌رخ شناختی دانش‌آموزان در زمینه تکلیف‌های درسی فراهم آورد تا براساس آن، بتوان با طراحی‌های آموزشی مناسب، نقاط ضعف شناسایی شده دانش‌آموزان را برطرف نمود.

پی‌نوشت‌ها

۱. روان‌شناسی شناختی به مطالعه ذهن برحسب بازنمایی‌ها و فرایندهای ذهنی که زیربنای رفتار مشاهده شده است، می‌پردازد.
2. Leighton
3. Hunka
4. Snow & Lohman
5. Linn
6. Frederiksen, Glaser, Lesgold & Shafto
7. Nichols
8. Chipman & Brennan
9. Assessment used for Learning and as Learning Process
10. Assessment of Learning Outcomes
11. Jang
12. Processing Competencies
13. Coarse Grain Size
14. Fine Grain Size
15. Cognitive Model
16. Roberts, Alves, Chu, Thompson, Bahry & Gotzmann
17. Expert Task Analysis
18. Verbal Report
19. Latent Variable
20. Competency Profile
21. Q-Matrix
22. Rupp, Templin & Henson

منابع

1. Gierl, M. J., Roberts, M., Alves, C. & Gotzmann, A. (2009). Using Judgments from Content Specialists to Develop Cognitive Models for Diagnostic Assessments. Paper Presented at the Symposium "How to Build a Cognitive Model for Educational Assessments" *Annual Meeting of the National Council on Measurement in Education (NCME), San Diego, CA.*
2. Gierl, M. J., Wang, C. & Zhou, J. (2008). Using the Attribute Hierarchy Method to Make Diagnostic Inferences about Examinees' Cognitive Skills in Algebra on the SAT. *The Journal of Technology, Learning, and Assessment*, Vol. 6(6).
3. Jang E. E. (2008). A Framework for Cognitive Diagnostic Assessment. In C. A. Chapelle, Y. R. Chung, & J. Xu (Eds.), *Towards adaptive CALL: Natural language processing for diagnostic language assessment* (pp. 117-131). Ames, IA: Iowa State University.
4. Leighton, J. P. & Gierl, M. J. (2007). Why Cognitive Diagnostic Assessment. In J. P. Leighton & M. J. Gierl, *Cognitive Diagnostic Assessment for Education: Theory and Applications* (pp. 3-18). New York: Cambridge University Press.
5. Leighton, J. P., Gierl, M. J. & Hunka, S. M. (2004). The Attribute Hierarchy Method for Cognitive Assessment: A Variation on Tatsuoka's Rule-Space Approach. *Journal of Educational Measurement*, Vol. 41(3), pp. 205-237.
6. Roberts, M. R., Alves, C.B., Chu, M., Thompson, M., Bahry, L. M. & Gotzmann, A. (2012). Testing Expert-Based vs. Student-Based Cognitive Models for a Grade 3 Diagnostic Mathematics Assessment. Paper Presented at the Session "Division D Exemplary Work from Promising Researchers", *Annual meeting of the American Educational Research Association*, Vancouver, BC, Canada.
7. Rupp, A.A., Templin, J. & Henson, R.A. (2010). *Diagnostic Measurement, Theory, Methods, and Applications*. New York: The Guilford Press.
8. Snow, R. E., & Lohman, D. F. (1989). Implication of cognitive psychology for education measurement. In R.L. Linn (Ed.), *Educational measurement* (3rd ed., pp. 263-331). New York: Macmillan.
9. Templin, J. & Henson, R.A. (2006). Measurement of Psychological Disorders Using Cognitive Diagnosis Models. *Psychological Methods*, 2006, Vol. 11, No. 3, 287-305.



نقش و جایگاه گروه‌های آموزشی در ارتقای دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی در متوسطه

محمد جواد کارخانه، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی شهرستان پیشوا

چکیده

به دلیل اهمیت نقشی که دانش حرفه‌ای در توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی داراست، در بدنه آموزش و پرورش ایران، ظرفیتی با عنوان «گروه‌های آموزشی» (و در زیرمجموعه آن، گروه آموزشی ریاضی)، با هدف ایجاد دانش حرفه‌ای برای معلمان ریاضی، در سال ۱۳۷۷ ایجاد شد. متأسفانه، در بازبینی شیوه‌نامه گروه‌های آموزشی که در سال ۱۳۹۱ انجام شد، موارد نوآورانه مندرج در آن به طرز غیرمنتظره‌ای حذف شد. در این مقاله، پس از یک مقدمه، و نیز توضیحاتی در مورد ضرورت آموزش‌های مستمر معلمان ریاضی، ویژگی‌های گروه‌های آموزشی در سال‌های ۱۳۷۳ و ۱۳۹۱، با هم مقایسه می‌شوند. این مقاله، در سیزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران که از ۱۷۷ تا ۲۰ شهریور ۱۳۹۳ در دانشگاه شهید رجایی تهران برگزار شد، ارائه گردید و با تغییرات لازم در آن برای مجله آماده شده است.

کلیدواژه‌ها: توسعه حرفه‌ای، مدل‌های مختلف برای توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی دوره متوسطه، گروه‌های آموزشی.

مقدمه

می‌شود؛ چراکه همیشه با انسان‌هایی که سراسر پیچیدگی و ایجازند، در حال کنش و واکنش است. هدف تدریس چنین معلمی، در واقع باور کردن انسان‌ها - دانش‌آموزان یادگیرنده - است و از همین رو شیوه عمل وی در حین تدریس باید هدفمند، ماهرانه و همراه با شکیبایی باشد (گویا، ۱۳۷۲). معلم ریاضی این فرصت را دارد که برای هر جلسه تدریس خود

از آنجا که حرفه معلمی دارای ویژگی‌های خاصی از جمله پیچیدگی، ناپایداری، منحصر به فرد بودن و تضاد ارزشی است، پس تمامی مسائل آن قابل پیش‌بینی نیست (شون، ۱۹۸۷، نقل شده در گویا و مرتاضی مهربانی، ۱۳۸۱). معلم، در کلاس درس خود عموماً با موقعیت‌های پیش‌بینی نشده‌ای مواجه

طرح درسی را تهیه کند و در کلاس آن را راهنمای عمل خود قرار دهد، اما آنچه نمی‌تواند در طرح درس گنجانده شود، مسائلی است که ویژگی بارز آن‌ها ظهور در حین عمل تدریس است (تقاضاهای ریاضی حین تدریس) و معلم از قبل، نمی‌تواند آن‌ها را مشخص کند و در طرح درس خود به آن‌ها بپردازد. این مسائل گستره موضوعی وسیعی را، از قبیل بی‌انگیزگی دانش‌آموزان، کارآمد نبودن روش تدریس، ناتوانی معلم در دادن پاسخ مناسب به سؤالی خاص، عدم آمادگی ذهنی دانش‌آموزان به لحاظ دانش پیش‌نیاز و نظایر آن شامل می‌شود (یزدانفر، ۱۳۹۰). پرداختن به ارتقای دانش حرفه‌ای معلمان، به‌خصوص از این نظر قابل توجه است که اغلب نظام‌های آموزشی، ضمانت بقای خود و امکان هرگونه نوآوری در آن نظام را وجود معلمان توانا می‌دانند. برای مثال، هم‌همایش بین‌المللی بانکوک در ۱۹۹۵، و هم‌کنگره دو سالانه بین‌المللی تعلیم و تربیت ژنو در ۱۹۹۶، بر آموزش معلمان تأکید داشتند. بنابراین، توسعه دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی، امری ضروری به‌نظر می‌رسد، اما آن‌چه بیشتر باید مورد توجه و تحقیق قرار گیرد، راه‌هایی است که می‌تواند منجر به ایجاد چنین دانشی شود. (گویا، ۱۳۷۹)

توسعه دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی، زمانی اهمیت بیشتری می‌یابد که نتایج مطالعه بین‌المللی تیمز^۱ و به‌دنبال آن، دیگر مطالعات متعددی که در بسیاری از کشورهای جهان در مورد ریشه‌یابی نتایج عملکرد نامطلوب ریاضی دانش‌آموزان صورت گرفت، گویای آن است که دانش ریاضی معلمان، در موفقیت تحصیلی دانش‌آموزان سهم به‌سزایی دارد. به‌عنوان مثال، کیامنش (۱۳۷۷) با توجه به یافته‌های پژوهشی در مطالعات تیمز، وضعیت دانش‌آموزان ایرانی را در دو درس علوم و ریاضی نامناسب ارزیابی کرده و علت مشکل را در روش‌های تدریس معلمان می‌داند (دانش‌پژوه، ۱۳۸۲). تجربه نشان می‌دهد که عدم توجه به آموزش‌های حرفه‌ای معلمان، عواقب زیان‌باری را- هم برای معلمان و هم برای دانش‌آموزان- به‌دنبال خواهد داشت و باعث از بین رفتن نیروی انسانی عظیمی می‌شود. (امیریان، ۱۳۹۰)

با وجود اهمیتی که توسعه حرفه‌ای در بحث مربوط به آموزش معلمان دربردارد، تأکید آموزش معلمان در ایران، بیشتر بر روی آموزش‌های موضوعی

بوده و کمتر به دانش حرفه‌ای پرداخته شده است. به گفته گویا (۱۳۸۰)، با توجه به اینکه آموزش معلمان یک فرآیند مستمر است، دانش حرفه‌ای، نمی‌تواند به‌طور مستقل و تنها در دوره‌های قبل از خدمت معلمان ایجاد شود. بدین سبب، در ساختار تشکیلاتی وزارت آموزش و پرورش، ظرفیتی به نام گروه‌های آموزشی ایجاد شده است تا از این طریق، معلمان به‌طور مستمر، دانش حرفه‌ای خود را به‌روز کنند و با هم‌اندیشی، راه‌حلی برای چالش‌های حرفه‌ای خود پیدا کنند.

پیشینه تاریخی

ویلز (۲۰۰۲) توصیه می‌کند که توسعه حرفه‌ای باید در محل آموزشی معلمان^۲ انجام شود، دراز مدت، مستمر، در دسترس و در برگرنده نیازهای همه معلمان، و بخشی از عمل روزانه معلم و فراتر از وظیفه او باشد. در این روش، فرصت‌های یادگیری فعال بیشتری، با توجه به هدف‌ها و نیازهای فردی معلم، می‌تواند فراهم شود؛ بلند مدت بودن آن، نیز فرصتی برای معلمان ایجاد می‌کند که در صورت تشویق و حمایت، آن‌ها می‌توانند به‌طور متناوب تفکر کنند (بال، ۱۹۹۶، لوکس-هرسلی^۳ و ماتسوموتو^۴، ۱۹۹۹، زاسلاوسکی و لیکین^۵، ۱۹۹۹، نقل شده در میلر^۶، ۲۰۰۷). یکی از هدف‌های توسعه حرفه‌ای معلمان، این است که آن‌ها را در محیطی قرار دهد تا تفکر و عمل تدریس‌شان، مورد چالش قرار گیرد و در نتیجه، رفته‌رفته نیاز به تغییر در آن‌ها ایجاد شود (شیفتر^۷، ۲۰۰۸، نقل شده در چمن‌آرا، ۱۳۸۸) مرور ادبیات این حوزه نشان می‌دهد که سازوکارهای توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی، بر کلاس درس استوار است و ریشه در بازتاب آن‌ها بر عمل تدریس، به‌منظور کم کردن فاصله زیاد بین نظریه و عمل و بهبود کیفیت تدریس دارد. لازمه موفقیت برنامه‌های توسعه حرفه‌ای نیز مشارکت بالنده و تعامل همه‌جانبه معلمان با یکدیگر است. یکی از این سازوکارها، آموزش معلمان توسط خودشان است.

آموزش معلمان توسط خودشان

دشواری آموزش سنتی این است که این نوع آموزش، همیشه در دسترس نیست (داروین، پالمر، ۲۰۰۹) و یافتن آموزش‌گران به قدر کافی خوب، که زمان مناسب در اختیار داشته باشند، می‌تواند

مسئله برانگیز باشد (اریج و همکاران، ۲۰۰۴، نقل شده در میلر، ۲۰۰۷). هم‌چنین، کمبود زمان، برنامه‌ریزی ضعیف، عدم درک فرایند آموزش، عدم تطابق آموزشگران و شاگردان با یکدیگر و عدم دسترسی به آموزشگران، در رابطه با آن، می‌تواند وجود داشته باشد (اوینگ و همکاران، ۲۰۰۸). با در نظر گرفتن این دشواری‌ها، مدل آموزش همکاران توسط خودشان، مدلی است برای یادگیری و توسعه حرفه‌ای معلمان در مدارس سطح پایین اجتماعی-اقتصادی است که توسط کنسینتون میلر (۲۰۰۷)، ارائه گردید. با اجرای این نوع آموزش، ارتباطات بین معلمان رشد کرده و توسعه می‌یابد و اعتماد به وجود آمده و ایده‌های رایج و باورها، به چالش کشیده شده و یا در یک محیط امن اعتبار می‌یابد (راب^۸، ۲۰۰۰). این نوع آموزش می‌تواند نگاه‌های جدیدی را در کلاس درس به وجود آورد و به بازشناسی آنچه که اتفاق افتاده است و نیز ملاحظه سختی‌هایی که به وجود آمده و شناسایی دلایل آن‌ها، کمک کند (برگ، ۲۰۰۲، زاسلاوسکی و لیکین، ۲۰۰۴). از جمله این برنامه‌ها، برنامه تدریس فعال و بازتابی در دوره متوسطه^۹ (ARTISM) در استرالیا است که به دلیل کارایی آن، به اختصار معرفی می‌شود.

برنامه تدریس فعال و بازتابی در دوره متوسطه (ARTISM)

این برنامه توسعه حرفه‌ای از طریق همکاری معلمان سه مدرسه، مسئولان یک ناحیه آموزشی و متخصصان یک دانشگاه در استرالیا، تولید و اجرا شد. اینکه شرکت‌کنندگان در برنامه، با یادگیری روش‌های جدید تجربه شده در دوره از جمله مشارکت با سایر معلمان، می‌توانند تدریس کلاسی خود را جرح و تعدیل کنند، به‌عنوان پیش فرض این برنامه محسوب می‌شود. نتایج مطلوب این برنامه چنین گزارش شده است:

- توسعه یافتن مجموعه استراتژی‌های تدریس، تمرین و توفیق با ایده‌های جدید
- بهبود بخشیدن به یادگیری دانش‌آموز؛
- ایجاد تمایل در معلمان به آزمایش؛
- تغییرات در عمل کلاسی مدرسه؛
- تغییرات در برنامه درسی ریاضی در مدرسه؛
- منابع (و جایی برای دریافت آن‌ها)؛
- تأثیر عاطفی مثبت بر معلم.

به‌طور خلاصه، در اجرای این برنامه، چهار مرحله زیر قابل تشخیص است:

مرحله ۱. برگزاری نشست‌های اولیه

مرحله ۲.

الف. به کار بردن عمل‌های جدید کلاسی

ب. ایجاد آمادگی گروهی برای تدریس

مرحله ۳. مرور جمعی و بازتاب روی جلسات و کاربردهای کلاسی ایده‌های جدید

مرحله ۴.

الف. تداوم عمل‌های جدید کلاسی

ب. تدریس طراحی شده واحد کار و بازتاب روی

نتایج.

گروه‌های آموزشی در ایران، ظرفیتی برای ارتقای دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی

در ساختار تشکیلاتی نظام متمرکز آموزش و پرورش ایران، برای افزایش دانش حرفه‌ای و توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی، از سال ۱۳۵۹، گروه‌های آموزشی به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از معاونت آموزشی و سپس گروه آموزشی درس ریاضی، تشکیل شد تا از این طریق، معلمان به‌طور مستمر، دانش حرفه‌ای خود را به روز سازند و با هم‌اندیشی، راه‌حلی برای چالش‌های حرفه‌ای خود پیدا کنند.

شواهد نشان می‌دهد که این ظرفیت بالقوه، به‌درستی مورد استفاده قرار نگرفت و هدف اصلی ایجاد آن، مورد غفلت واقع شد. به‌ویژه، فعالیت گروه‌های آموزشی در چند سال اخیر، بیشتر نشان داد که تصمیم‌گیری‌های غیر کارشناسانه و غیراصولی در این حوزه، موجب شده تا این ظرفیت موجود در آموزش و پرورش ایران، که با فکر اولیه پیشرفته‌ای ایجاد شده بود، کارایی لازم را نداشته باشد و به‌جای ایجاد ارتباط بالنده و مستمر بین معلمان و توسعه حرفه‌ای آن‌ها، گاهی تنها به برگزاری یک یا دو جلسه کلیشه‌ای در طی سال، محدود شود. مروری بر دستورالعمل جامع گروه‌های آموزشی وزارت آموزش و پرورش در سال ۱۳۷۷، نشان می‌دهد که آن دستورالعمل، حاوی موارد بسیاری است، که به عنوان نیازهای توسعه حرفه‌ای محسوب می‌شوند. نکات برجسته دستورالعمل مذکور به شرح زیر است:

- وجود گروه‌های آموزشی در مدارس (Site - based)
- ادامه فعالیت‌های گروه‌های آموزشی در تابستان (استمرار)

• اختصاص بخشی از ساعات‌های موظف معلمان برای شرکت در گروه‌ها و در غیر این صورت، پرداخت حق‌الزحمه به آن‌ها (حمایت سازمانی)

• اختصاص زمان کافی به گروه‌های آموزشی (حمایت سازمانی)

• واگذاری مدیریت هر درس به یکی از استان‌های فعال و توانمند (تمرکززدایی)

• انتخاب سرگروه درسی از طریق مجمع دبیران (انتخابی بودن)

• شرکت سرگروه منطقه در گروه‌های مدارس و ارزیابی کلاس درس آن‌ها (نظارت)

• تعیین صلاحیت علمی معلمان غیرمرتبط، توسط سرگروه مرتبط (مسئولیت علمی)

این موارد مهم و اساسی که در دستورالعمل جامع گروه‌های آموزشی در سال ۱۳۷۷ آمده بود، به یک‌باره در شیوه‌نامه گروه‌های آموزشی در سال ۱۳۹۱، حذف گردید و این تشکیلات به دوره راهنمایی تحصیلی، در دو محور «پایگاه کیفیت بخشی به فرایند آموزش درس ریاضی» مستقر در یکی از استان‌های کشور و «گروه‌های درسی» در استان‌ها، تغییر یافت. موارد تغییر یافته به شرح زیر است:

• حذف گروه‌های درسی در مدارس (که محل اصلی کار معلم است)

• کاهش چشمگیر زمان اختصاص داده شده به گروه‌های آموزشی (در برخی مناطق و ناحیه‌ها، این زمان به کمتر از یک‌سوم زمان اولیه رسیده است)

• انتصاب سرگروه، به جای انتخاب از طریق مجمع دبیران

• پررنگ‌تر شدن بحث نظارت نسبت به دستورالعمل قبلی، به‌طوری که علاوه بر نظارت داخلی که به‌صورت سلسله مراتبی در گروه‌های آموزشی وجود داشت، نظارت ستادی نیز (از طریق کارشناسی تکنولوژی و گروه‌های آموزشی)، به آن اضافه شده است.

نگاهی به دستورالعمل جامع گروه‌های آموزشی در سال ۱۳۷۷، نشان می‌دهد که در آن زمان این گروه‌ها با هدف بهبود کیفیت آموزش و پرورش و با تأکید بر ارتقای مهارت‌های ادراکی و حرفه‌ای نیروی انسانی و به‌کارگیری یافته‌های نوین حوزه علوم تربیتی شروع به کار کرده بود. هم‌چنین رویکردها و برنامه‌های این گروه‌ها عبارت بوده است از:

رویکردها: بهبود کیفیت آموزش، تحول مهارت‌های ادراکی، فنی و حرفه‌ای معلمان، توجه به

تجربه‌های معلمان در آموزش، انسجام بین عناصر برنامه‌درسی، مسئله‌یابی و جست‌وجوی حل آن، تحقیق و پژوهش، تمرکززدایی تدریجی از برنامه‌های آموزشی، نظارت، کنترل و ارزشیابی از برنامه‌های آموزشی.

برنامه‌ها: طراحی آموزشی، خلاقیت و نوآوری، نقد و بررسی کتب درسی و سنجش و اندازه‌گیری.

در شیوه‌نامه سال ۱۳۹۱، علت تغییرات ایجاد شده و پشتوانه‌های پژوهشی آن - در صورت وجود - بیان نشده است. اما با توجه به اینکه دستورالعمل سال ۱۳۷۷، با پژوهش‌های حوزه آموزش‌های ضمن خدمت و حرفه‌ای معلمان ریاضی همسو بود، دانستن تفاوت‌های این دو که در جدول (۱) آمده، محل تأمل است.

جدول (۱): تفاوت‌های اجرایی دو سند مهم آموزش و پرورش در مورد گروه‌های آموزشی در سال‌های ۱۳۷۷ و ۱۳۹۱

دستورالعمل جامع گروه‌های آموزشی در سال ۱۳۷۷	شیوه‌نامه گروه‌های آموزشی در سال ۱۳۹۱
زمان اختصاص داده شده به مناطق، ۶۵ ساعت	زمان اختصاص داده شده به مناطق ۳۶ ساعت و مناطق کوچک‌تر ۱۸ ساعت
انتخاب سرگروه از طریق مجمع دبیران	انتصاب سرگروه
تنوع گروه‌های آموزشی (مدرسه، منطقه، استان)	گروه‌های آموزشی فقط در منطقه یا ناحیه وجود دارند
نظارت داخلی توسط سرگروه‌ها	نظارت داخلی (توسط سرگروه‌ها) و نظارت ستادی

نکته تعجب‌برانگیزی که در شیوه‌نامه جدید به چشم می‌خورد این است که با وجود توصیه‌های فراوان مبنی بر این که برنامه‌های توسعه حرفه‌ای معلمان، باید در محل کار معلم انجام گیرد، از سال ۱۳۹۱، گروه‌های آموزشی در مدارس، که محل اصلی کار معلم است، تعطیل شده‌اند.

جمع‌بندی

گروه‌های آموزشی در ایران، ظرفیت بالقوه مناسبی برای افزایش دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی هستند که آن‌طور که باید، مورد استفاده قرار نمی‌گیرند. لازم است برنامه‌ریزان آموزش معلمان در وزارت آموزش و پرورش، نیازهای حرفه‌ای معلمان ریاضی را جهت برنامه‌ریزی مناسب در این حوزه، مورد نظر

قرار داده و از تصمیم‌گیری‌های عاجل در این حوزه، بهره‌مندند.

پی‌نوشت‌ها

1. The Third International Mathematics and Science Study: TIMSS
2. Site-based
3. Loucks-Horsley
4. Matsumoto
5. Leikin
6. Miller
7. Schifter
8. Robb
9. Active and Reflective Teaching In Secondary Mathematics: ARTISM

منابع

1. Kensington-Miller, B. (2007). Professional Development for Secondary School Mathematics: a Peer Mentoring Model. **Center for Academic Development, the University of Auckland, New Zealand.**
2. Clark, D.; Carlin, P. & Andrea, P. (1992). Professional Development and the Secondary Mathematics Teacher: A Case Study
3. Lloyd, G. (2013). The ongoing development of mathematics teachers' knowledge and practice: considering possibilities, complexities, and measures of teacher learning. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 16:161-164. Springer.
۴. گويا، ز. (۱۳۸۰). توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی: یک ضرورت. مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۶۴، صص. ۴ تا ۸. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۵. مرتضی‌مهربانی، ن. و گويا، ز. (۱۳۹۰). آموزش معلمان ریاضی یک حوزه تحقیقی. مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۶۹، صص. ۱۹ تا ۳۳. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۶. گويا، ز. (۱۳۷۲). تاریخچه تحقیق عمل و کاربرد آن در آموزش، فصلنامه تعلیم و تربیت، شماره ۳۵ و ۳۶، صص. ۲۳ تا ۴۰. پژوهشکده تعلیم و تربیت، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۷. گويا، ز. (۱۳۸۶). یادداشت سردبیر، مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۸۷، صص. ۲ و ۳. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۸. ایوبیان، م. (۱۳۸۵). جای خالی مطالعه تدریسی، مجله

رشد آموزش ریاضی، شماره ۸۵، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش، صص ۹ تا ۱۹.

۹. یزدانفر، م. (۱۳۹۰). تحقیق عمل بازتابی و بازتاب آن در آموزش دانشجو-معلمان ریاضی، مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۱۰۳، صص. ۴۴ تا ۴۹. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۰. دانش‌پژوه، ز. (۱۳۸۲). ارزشیابی مهارت‌های حرفه‌ای معلمان علوم و ریاضی در دوره راهنمایی و ارائه روش‌های ارتقای کیفی آن. فصل‌نامه نوآوری‌های آموزشی، شماره ۶، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش، صص ۹۳ تا ۹۶.

۱۱. شیفت، دیورا. (۱۳۸۸). درک درست مفاهیم ریاضی از طریق پاسخ‌های نادرست دانش‌آموزان. ترجمه سپیده چمن‌آرا. مجله چشم‌انداز آموزشی، شماره ۴، صص. ۲۷ و ۲۸. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۲. طاهری، م. عارفی، م. پرداختی، م. قهرمانی، م. (۱۳۹۲). کاوش فرایند توسعه حرفه‌ای معلمان در مراکز تربیت معلم: نظریه داده بنیاد، فصل‌نامه نوآوری‌های آموزشی، شماره ۴۵، صص ۱۴۹ تا ۱۷۶.

۱۳. رفیع‌پور، ا. گويا، ز. (۱۳۸۶). برنامه درسی مدرسه‌محور در ایران: افسانه یا واقعیت؟، فصل‌نامه مطالعات برنامه درسی، شماره ۴، انجمن مطالعات برنامه درسی ایران (ICSA)، صص ۱۹ تا ۲۴.

۱۴. اکتفایی‌نژاد، ح. (۱۳۸۵). تأثیر درس‌پژوهی بر معلمان ریاضی، پایان‌نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید باهنر کرمان.

۱۵. امیریان، ط. (۱۳۹۰). چالش‌های یادگیری حرفه‌ای معلمان ریاضی تازه‌کار دوره متوسطه، پایان‌نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی.

۱۶. محمدی، ژ. (۱۳۸۵). بررسی دانش جبری معلمان ریاضی دوره راهنمایی، پایان‌نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی.

۱۷. عسگری، م. (۱۳۹۱). برنامه درسی ریاضی در مدارس هوشمند ایران، پایان‌نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی.

اسناد استفاده شده، برگرفته شده از منابع وزارت آموزش و پرورش.

- شیوه‌نامه فعالیت گروه‌های آموزشی دوره راهنمایی تحصیلی (۱۳۹۱)،

- دستورالعمل جامع گروه‌های آموزشی (۱۳۷۷)،

- شیوه‌نامه اجرای جشنواره درس‌پژوهی ریاضی بایگاه کیفیت‌بخشی به فرایند آموزش درس ریاضی (۱۳۹۲)،

- فرم ارزیابی عملکرد سرگروه‌های مناطق شهرستان‌های استان تهران



بدفهمی‌های دانش‌آموزان از مباحث مثلثات

مجتبی علامه، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی شِروان
زهر اگویا، دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

در ایران، موضوع مثلثات، به لحاظ تاریخی و فرهنگی، همیشه مورد توجه برنامه‌ریزان درسی بوده است. علاوه بر این، مثلثات یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که در علوم دیگر کاربرد فراوانی دارد و مانند هر علم دیگری، در ابتدای آموزش آن، لازم است دانش‌آموزان با مفاهیم، اصول، واژه‌ها و تعریف‌ها آشنا شوند. همان‌طور که گلیمن (۱۹۹۱) تأکید نموده است، مثلثات بخش جدانشدنی ریاضی دبیرستان است، این در حالی است که بعضی تحقیقات نشان می‌دهند که مثلثات، یکی از مباحثی است که دانش‌آموزان کمتر آن را دوست دارند و در آن موفق‌اند؛ حتی گاهی از آن بیزارند. برای آن‌ها، مثلثات در مقایسه با مباحث دیگر ریاضی مدرسه‌ای، دشوارتر و انتزاعی‌تر است (هولیا گور^۱، ۲۰۰۹). تجربه‌های بسیاری از معلمان ریاضی نیز حاکی از این است که دانش‌آموزان در فهم و درک مفاهیم پایه‌ای و توابع مثلثاتی، با چالش‌های جدی مواجه‌اند.

وجود اشتباهات مفهومی و بدفهمی‌ها، دانش‌آموزان را در مواجه شدن با مسئله‌هایی مثلثاتی دچار اشکال می‌کند و باعث می‌شود تا حتی برای حل برخی از مسائل معمولی ریاضی که، دانش‌مورد نیاز را هم برای حل آن‌ها در اختیار دارند، باز به نتیجه نرسند و تلاش آن‌ها با شکست مواجه گردد. مثلاً بارها شاهد بوده‌ایم که تعداد قابل توجهی از دانش‌آموزان در پاسخ به این سؤال که اگر،

$\frac{1}{4} = \sin 30^\circ$ ، آنگاه $\sin 60^\circ$ چقدر می‌شود، گفته‌اند که:

$$\sin 60^\circ = \sin(30^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ + \sin 30^\circ = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

و یا اینکه، یکی از پاسخ‌های متداول دانش‌آموزان درباره مفهوم درجه این است که: «اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت آن یک درجه است»، در صورتی که می‌دانیم زوایای مرکزی متناظر با این قسمت‌ها یک درجه‌اند، نه خود آن قسمت! شهریار (۱۳۷۹) معتقد است که «مثلثات در همه زمینه‌های دانش بشری (از علوم نظری گرفته تا صنایع و فنون) ریشه دوانیده و بدون استفاده از آن، همه رشته‌های علمی دچار نوعی توقف می‌شوند.» (ص ۳۴). شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا (۲۰۰۰) نیز بر ضرورت وجود مثلثات در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای، تأکید کرده است. با این وجود، تحقیقات حاکی از آن است که فعالیت‌های تدریسی در کلاس‌های ریاضی نتوانسته‌اند فهم درستی از توابع مثلثاتی را ایجاد کنند (ربانی فرد و گویا، ۱۳۸۶).

هدف کلی این تحقیق، شناخت بدفهمی‌های مثلثاتی دانش‌آموزان پایه دوم دبیرستان و ارائه راهکارهایی برای رویارویی مناسب با این بدفهمی‌ها بود.

این پژوهش، در پی آن بود که ابتدا، بدفهمی‌های دانش‌آموزان پایه دوم دبیرستان را در رابطه با مثلثات شناسایی کند و بعد، برای رویارویی مناسب با آن‌ها، راهکارهایی ارائه دهد. براساس این هدف‌ها، سؤال‌های پژوهشی زیر صورت‌بندی شدند:

۱. اشتباهات مفهومی رایج دانش‌آموزان پایه دوم دبیرستان در رابطه با مثلثات کدام‌اند؟

۲. نقش کتاب‌های درسی تازه‌تألیف در رفع یا ایجاد این بدفهمی‌ها چیست؟

۳. چه راهکارهایی برای مواجهه با این بدفهمی‌ها مناسب‌اند؟

در این مقاله، ابتدا گذری کوتاه بر سیر تاریخی مثلثات داریم. در ادامه، به اهمیت و ضرورت حضور مثلثات در برنامه‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای، و نیز بعضی یافته‌های تحقیقی در رابطه با ریشه مشکلات و بدفهمی‌های مثلثاتی اشاره می‌کنیم.

کلیدواژه‌ها: مثلثات، بدفهمی، زاویه، رادیان، پایه

دهم.

یافته‌های تحقیقی در رابطه با بدفهمی‌های مثلثاتی

استانداردهای شورای ملی معلمان ریاضی امریکا (۱۹۸۹، ۲۰۰۰)، با تأکید بر ارتباط بین زمینه‌های مختلف مثلثاتی، مثلثات را از دیدگاه دانش‌آموزان و معلمان، موضوعی سخت برای فهم و درک معرفی کرده است. هم‌چنین، مطالعه وبر (۲۰۰۵) نشان داد که بسیاری از دانشجویان بعد از یک دوره کامل یادگیری مثلثات، هنوز درک محدودی از توابع مثلثاتی دارند.

تامسون و همکاران (۲۰۰۷)، براون (۲۰۰۶) و وبر (۲۰۰۵) اظهار نموده‌اند که با این وجود، معلمان ریاضی و تولیدکنندگان برنامه‌های درسی، توجه اندکی به مثلثات داشته‌اند. آن‌هایی هم که به مثلثات توجه کرده‌اند، به افزایش تمرکز و نیاز به توسعه فهم بنیادی مثلثات و انسجام بیشتر بین زمینه‌های متعدد مثلثات اشاره کرده‌اند.

البته مور (۲۰۱۰)، مشکلات دانش‌آموزان را در توسعه ارتباطات مثلثاتی، به احتمال زیاد، چندوجهی می‌داند. به این معنا که آن را ناشی از زمینه‌های آموزشی نامرتبط یا با ارتباط کم در آموزش مثلثات است. وبر (۲۰۰۵) پیشنهاد می‌کند که دانش‌آموزان باید قادر باشند از هندسه، به‌عنوان اهرمی در مثلثات استفاده کنند (مانند دایره واحد و مثلث قائم‌الزاویه) تا بتوانند از استدلال‌هایشان در ارتباط با فرمول‌های توابع سینوس و کسینوس دفاع کنند. این در حالی است که مور (۲۰۱۰)،

ادبیات تحقیق در زمینه تفکر دانش‌آموزان را در مثلثات نادر می‌داند. مارکل نیز با توجه به محدودیت تحقیقات آموزش ریاضی و آموزش مثلثات، از مثلثات با عنوان «فراموش‌شده و مورد آزار قرار گرفته» یاد می‌کند. براون (۲۰۰۶) بیان می‌کند که ممکن است کم‌توجهی نسبت به تحقیقات مربوط به مثلثات و به‌طور طبیعی، کمبود یافته‌های پژوهشی در حوزه آموزش مثلثات، به‌علت سهم کم و مختصری باشد که مثلثات، در برنامه‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای دارد.

وبر (۲۰۰۸) معتقد است که یادگیری توابع مثلثاتی برای دانش‌آموزان، در ابتدا، مملو از مشکلات است. مثلثات چالش‌های زیادی برای اولین بار برای دانش‌آموز ایجاد می‌کند، او نیاز دارد اشکال مثلثات را با روابط عددی مرتبط کند و نمادهای درگیر در این ارتباط را با مهارت بیاموزد. به‌علاوه، تابع‌های مثلثاتی از اولین تابع‌هایی هستند که دانش‌آموزان قادر نیستند مستقیماً با انجام محاسبات، مقدار آن‌ها را به‌دست آورند. وبر تأکید دارد که با وجود اهمیت مثلثات و مشکلات بالقوه دانش‌آموزان در یادگیری آن، تحقیقات مرتبط اندکی بر این موضوع متمرکز شده است.

گور (۲۰۰۹) در تحقیقی، خطاهای شناسایی شده در مثلثات را در پنج مقوله، شامل «استفاده نادرست از داده‌ها»، «تفسیر نادرست زبانی»، «استنباط‌های منطقی غیرمعتبر»، «تعریف‌های مخدوش» و «خطاهای تکنیکی- مکانیکی» دسته‌بندی کرد. وی دریافت که بعضی دانش‌آموزان، دارای بدفهمی‌ها و پیچیدگی‌های یادگیری زیادی در مثلثات هستند که حاکی از آن است که قبل از یادگیری مفاهیم اصلی مثلثات، بعضی از مفاهیم ریاضی را نادرست یا ناقص یاد گرفته‌اند؛ مفاهیمی که برای یادگیری مفاهیم مثلثاتی، پایه‌ای هستند، مفاهیمی مانند دایره واحد، مختصات نقاط محیط دایره و ارتباطش با طول و عرض، فاکتورگیری و رابطه فیثاغورس.

کندل^۲ و استیسی^۳ (۱۹۹۶) با بررسی دو روش تدریس مثلثات، یعنی روش نسبت و روش دایره، نقاط ضعف و قوت هر یک را بررسی کردند و نتیجه گرفتند که دانش‌آموزان در روش نسبت (استفاده از مثلث قائم‌الزاویه)، درک مناسبی از توابع سینوسی و کسینوسی به‌دست نمی‌آورند. آن‌ها مشکلات دانش‌آموزان را در مسائل کلامی مثلثات، در دو دسته طبقه‌بندی کردند:

۱. قدرت تشخیص تابع مثلثاتی مناسب برای حل مسئله؛ به این معنی که در حل مسئله مرتبط با مثلث قائم‌الزاویه، نمی‌توانند تابع مثلثاتی مناسب را تشخیص دهند.

۲. مدل سازی مسئله به صورت معادله قابل حل.

برای نمونه، براون (۲۰۰۶) و وبر (۲۰۰۵) به نقل از مور (۲۰۰۹) بیان می کنند که دانش آموزان در ساختن درک منسجمی از مثلثات و توابع مثلثاتی مشکل دارند و مور (۲۰۰۹) دریافت که مشکل اصلی، ناشی از درک ضعیف دانش آموزان از اندازه زاویه و دانش تکه تکه ای است که از مثلث قائم الزاویه و دایره مثلثاتی در رابطه با اندازه زاویه به دست می آورند. مور (۲۰۰۹) با بیان اینکه موضوعات مختلف فیزیک، مهندسی، و علوم دیگر بر فهم مثلثاتی (به عنوان مثال، سرعت پرتابه و حرکت موجی) تکیه می کنند، بنا به یافته های براون (۲۰۰۶)، تامپسون (۲۰۰۸) و وبر (۲۰۰۵) معتقد است که اغلب دانش آموزان، در موضوعات مبتنی بر فهم تابع های مثلثاتی، مشکل دارند. اورهان (۲۰۰۸) نیز در تحقیق خود به این نتیجه رسید که اشتباهات دانش آموزان در مثلثات، نظام وار است و اکثر آن ها، ریشه در چگونگی ارتباط بین اضلاع مثلث قائم الزاویه و زاویه های آن دارد. شاید یکی از علت های اصلی این بدفهمی ها، همان طور که کی پرن^۴ (۱۹۹۴) معتقد است، این است که در گذشته، به طور سنتی، مهارت در روابط مثلثاتی خیلی مهم در نظر گرفته می شد و یکی از اهداف اصلی تدریس مثلثات، افزایش توانایی دانش آموزان در انجام عملیات با این روابط بود.

مور (۲۰۱۲) با بررسی برنامه های درسی ریاضی مدرسه ای آمریکا، دریافت که در آن ها، توابع مثلثاتی اغلب به دو روش معرفی می گردد؛ یکی با مثلث قائم الزاویه و دیگری با دایره واحد. او مشکلات دانش آموزان را در ارتباط با توابع مثلثاتی، نتیجه بی ارتباطی یا ارتباط کم بین این دو زمینه می داند و معتقد است که به سبب این عدم ارتباط، دانش آموزان نمی توانند درک منسجمی از تابع های مثلثاتی داشته باشند. مور مدعی است که چنین انسجامی، نیازمند توسعه تصورات دانش آموزان از اندازه زاویه و استفاده از آن، به عنوان پایه ای برای ایجاد انسجام بین این دو روش، است.

مور (۲۰۱۲) توضیح می دهد که منظور وی از انسجام مثلثاتی، چیزی بیش از ارائه فهرستی از موضوعات، تعریف ها و قراردادهای ریاضی با اهداف دسته بندی شده است. از نظر تامپسون (۲۰۰۸)، انسجام مثلثاتی یعنی توسعه مفاهیم مثلثاتی و ایجاد روابط معنادار بین آن ها. تامپسون (۲۰۰۸) ادامه می دهد که منظور از «انسجام»، تأکید بر مفاهیم و ایده ها، برقراری ارتباط بین مفاهیم و نقش هر مفهوم در ساخت و ایجاد سایر مفاهیم مثلثاتی است. به طور مثال، معرفی اندازه زاویه قبل از توابع مثلثاتی،

اگرچه حسی قوی نسبت به تلفیق مفاهیم مثلثاتی ایجاد می کند، اما این تلفیق به تنهایی، مترادف با «انسجام» نیست. بلکه انسجام، به معنای تولیدی از مفهوم اندازه زاویه است که با ساخت و سازهای دانش آموزان از توابع مثلثاتی سازگار باشد.

در همین رابطه، مور (۲۰۱۰) نشان داده است که بسیاری از مشکلات دانش آموزان و معلمان در درک مفاهیم مثلثاتی، ریشه در درک ناقص آن ها از مفهوم اندازه زاویه دارد. پرسود^۵ (۲۰۱۰) و تامپسون (۲۰۰۸) نیز دریافتند که در برنامه های درسی ریاضی مدرسه ای ایالات متحده آمریکا معمولاً اندازه زاویه و توابع مثلثاتی به روشی ارائه می شود که ممکن است مفاهیم ناسازگاری برای اندازه زاویه بر حسب درجه و بر حسب رادیان ایجاد شوند. ناسازگاری هایی که باعث به وجود آمدن یک شکاف ذاتی در درک مثلثاتی دانش آموزان شود. حتی ممکن است مثلث قائم الزاویه را تنها برای اندازه زاویه بر حسب درجه و دایره مثلثاتی واحد را فقط برای اندازه زاویه بر حسب رادیان، تصور کنند.

به گفته مور (۲۰۱۲)، اولین تجربه دانش آموزان از اندازه زاویه، به استفاده آن ها از زاویه سنج برای اندازه گیری زاویه برمی گردد، هنگامی که استفاده از زاویه سنج را آموخته و قادر به دسته بندی زاویه ها می شوند (مثل زوایای حاده، باز، متمم، مکمل) و از انواع استراتژی های محاسباتی مرتبط برای اندازه گیری زاویه ها استفاده می کنند. این استراتژی ها و ارتباطات برای هندسه مهم هستند، ولی در این روش محاسباتی برای اندازه زاویه، توجه ویژه ای به دایره مثلثاتی با شعاع واحد که برای اندازه گیری زاویه استفاده شده، وجود ندارد. تدریس به دانش آموزان با استفاده از یک زاویه سنج بدون توجه به واحد اندازه گیری، از فیلترهای کمی اندازه گیری زاویه است (تامپسون، ۲۰۱۱). در نتیجه، روش های آموزشی که به درستی و به طور کمی زاویه را اندازه گیری می کنند، برای توسعه یک درک ملموس از اندازه گیری زاویه، احتمالاً به شکست می انجامند (مور، ۲۰۱۲).

این در حالی است که اغلب، تدریس «رادیان» از روی دایره مثلثاتی، بدون توجه به زمینه آموزشی «درجه» انجام می شود که معمولاً مبتنی بر مثلث قائم الزاویه است. این اولین تجربه دانش آموزان از اندازه زاویه بر حسب درجه است. بنا به گفته آکوک (۲۰۰۸) و تاپکو و همکاران (۲۰۰۶)، در چنین وضعیتی، ایجاد بدفهمی ها در رابطه با مفاهیم درجه و رادیان در دانش آموزان، دور از انتظار نیست، زیرا هر دو، اندازه های زاویه بر حسب دو مقیاس متفاوت اند. به دلیل اینکه رادیان و درجه، واحدهای اندازه گیری

متفاوتی برای کمیته واحد به نام زاویه هستند، پس بهتر است برای ایجاد قدرت مقایسه بین این دو واحد، از زمینه تدریسی استفاده شود که مور (۲۰۱۲) این زمینه مشترک را دایره واحد مثلثاتی معرفی می کند. مور (۲۰۱۲) در تحقیقش به این جمع بندی رسید که تدریس مثلثات، دارای پیچیدگی های زمینه ای زیادی است و همین پیچیدگی ها، فرصت مغتنمی برای یادگیری مثلثات ایجاد می کند. علاوه بر این، به باور وی، معمولاً هنگامی که یک مفهوم جدید ریاضی به دانش آموزان معرفی می شود، بدفهمی های جدی رخ می دهد. علت این است که یا دانش آموزان آمادگی لازم را برای درک مفهوم جدید ندارند یا اینکه مفهوم جدید، بسیار مجرد است. لنسدل^۷ معتقد است برای اینکه بدفهمی های جدی دانش آموزان نسبت به مفهوم جدید تشخیص داده شده و برطرف شود، لازم است شرایط بیان توضیح و توجیه پاسخ های داده شده از طرف دانش آموزان ایجاد شود، و برای این کار، استفاده از روش ارزشیابی مبتنی بر استدلال کردن، رویکردی مناسب است.

ویر (نقل شده از ربانی فرد و گویا، ۱۳۸۶) نیز به دو محدودیت در فهم توابع مثلثاتی اشاره می کند که یکی از آن ها، مربوط به نقشی است که نمودارهای هندسی در فهم توابع مثلثاتی و ارتباط دادن این توابع به مدل های هندسی مناسب، بازی می کنند. مطالعه وی نشان داد که دانش آموزان، توابع مثلثاتی را با مدل هندسی شان مرتبط نمی کنند. مثلاً هنگامی که از آن ها خواسته شد $\sin \theta$ را برای یک θ خاص تقریب بزنند، بیشتر دانش آموزان عنوان کردند که اطلاعات آن ها برای این کار کافی نیست. بعضی ها هم ادعا کردند اگر مثلث مناسبی داشته باشند، می توانند $\sin \theta$ را تقریب بزنند. علاوه بر این، براون^۸ (نقل شده در ربانی فرد، ۱۳۸۶) دریافت که فهم مثلثاتی دانش آموزان در رابطه با سینوس و کسینوس، ناقص است. وی این بدفهمی ها را در سه دسته زیر معرفی کرد:

۱. سینوس و کسینوس به عنوان مؤلفه های یک نقطه در دایره واحد؛
۲. سینوس و کسینوس به عنوان فاصله های عمودی و افقی آن نقطه؛
۳. سینوس و کسینوس به عنوان نسبتی از اضلاع مثلث.

در همین راستا، تحقیقات بلکت و تال (۱۹۹۱) در تأیید تأثیر مثبت استفاده از تکنولوژی، و در اینجا بهتر است بگوییم ابزار، در تدریس مثلثات است. در تحقیقی که بلکت و تال انجام دادند، دو گروه از دانش آموزان شرکت

کردند که گروه اول، با ابزار آموزش دیدند که به آن ها اجازه می داد تا اعداد و روابط هندسی را در یک حالت تعاملی کشف کنند. مثلاً دانش آموزان با امتحان کردن چند زاویه خاص، می توانند حدس بزنند که تانژانت زاویه، با سینوس زاویه تقسیم بر کسینوس زاویه مساوی است. در صورتی که گروه دوم در همان مدرسه، توسط معلمی آموزش دیدند که به صورت سنتی مثلثات را تدریس می کرد. یافته های این مطالعه نشان داد که دانش آموزانی که با کمک ابزار آموزش دیده بودند، عملکرد بهتری نسبت به گروه دیگر داشتند. آنان به این نتیجه رسیدند که با استفاده از ابزار، دانش آموزان می توانند با شکل های متنوع و مختلف هندسی دست و پاز می کنند و خود، روابط عددی و مثلثاتی را کشف می کنند. از طرف دیگر، استفاده از ابزار در تدریس مثلثات باعث می شود تا دانش آموزان به مفاهیم بیشتر توجه کنند و برای محاسبات عددی غیر ضروری، وقت خود را تلف نکنند.

در این مطالعه ۵۴ دانش آموز پایه دهم شرکت کردند که همگی، در کلاسی بودند که نویسنده اول مقاله، معلم ریاضی آن بود. ابزار جمع آوری داده ها، آزمونی با هفت دسته سؤال بود که در این مقاله، تنها به ارائه نتایج سؤال های سه دسته اول می پردازیم. همه سؤال ها برگرفته از کتاب درسی مربوط بود.

سؤال های دسته اول

سؤال ۱: زوایای ۳- رادیان و ۳π- رادیان، چه کسری از دایره مثلثاتی هستند؟ اندازه آن ها را برحسب درجه بیان کنید (با تقریب سه رقم اعشار)

این سؤال، تمرین شماره دو از مسائل صفحه ۱۲۸ کتاب ریاضیات ۲ متوسطه است که با انجام ویرایش های زیاد انتخاب شد:

- اضافه کردن «ر» بعد از رادیان، حذف «ی» دایره ای، حذف عبارت مبهم «طی شده» و جایگزینی «مثلثاتی» به جای آن، حذف «ی» اندازه ی.

سؤال ۲: π رادیان با π درجه چه فرقی می کند؟ توضیح دهید.

هدف از سؤال های این دسته، بررسی درک مفهومی دانش آموزان از مفاهیم درجه و رادیان، ارتباط بین درجه و رادیان و سنجش قدرت به کارگیری این مفاهیم برای حل مسائل کاربردی بود.

سؤال‌های دسته دوم

سؤال ۱:

- الف. اگر $\cos \theta = \frac{2}{5}$ باشد، $\sin \theta$ چقدر است؟
 ب. این مقدارها را روی صفحه مختصات نشان دهید.
 (تمرین شماره ۲ صفحه ۱۳۱ کتاب ریاضیات ۲ متوسطه)

سؤال ۲:

اگر زاویه θ در موقعیت استاندارد باشد، یعنی نقطه انتهایی کمان θ ، دایره مثلثاتی را در نقطه $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$ قطع کند، مقادیر $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ و $\tan \theta$ را در این نقطه حساب کنید.

این سؤال، تمرین شماره ۳ از مسائل صفحه ۱۳۱ کتاب ریاضیات ۲ متوسطه است که با انجام ویرایش‌های زیر انتخاب شد:

حذف «ی» از انتهای کلمات زاویه‌ی، دایره‌ی، نقطه‌ی؛

جایگزینی «یعنی» به جای «به‌طوری که»؛

جایگزینی «این نقطه» به جای «نقطه فوق».

سؤال ۳:

با استفاده از دایره مثلثاتی، درستی یا نادرستی عبارت $\cos 4 = \cos(-4)$ را بررسی کنید. (زوایای فوق برحسب رادیان هستند).

این سؤال، تمرین شماره ۲ از مسائل صفحه ۱۳۸ کتاب ریاضیات ۲ متوسطه است که با انجام ویرایش کامل، صورت سؤال بازنویسی شد. صورت سؤال در کتاب درسی به‌صورت زیر بود:

۲. عبارت $\cos 4 = \cos(-4)$ درست یا نادرست است؟ با استفاده از دایره مثلثاتی، جوابتان را بررسی کنید. (زوایای فوق برحسب رادیان هستند).

هدف از سؤال‌های این دسته، بررسی درک رابطه بین توابع مثلثاتی و ارتباط آن‌ها با دایره مثلثاتی، و مفاهیم پایه‌ای مثلثات از جمله موقعیت استاندارد زاویه و کمان بود. به‌دلیل هم‌پوشانی هدف سؤال‌های اول و سوم توسط سؤال دوم، این دو سؤال از سؤال‌های آزمون اصلی حذف شدند.

سؤال‌های دسته سوم

سؤال ۱: دو مقدار برای θ بین $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ پیدا کنید، به‌طوری که $\cos \theta = \frac{1}{2}$ باشد.

این سؤال، تمرین شماره ۶ از مسائل صفحه ۱۳۲ کتاب ریاضیات ۲ متوسطه است که با انجام ویرایش زیر انتخاب شد:

جایگزینی «برای» به جای «از».

سؤال ۲: اگر $\cos \theta = \frac{5}{13}$ باشد (برحسب رادیان)، بدون استفاده از ماشین‌حساب، مقادیر $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ و $\cos(\pi + \theta)$ را به‌دست آورید.

این سؤال، تمرین شماره ۴ از مسائل صفحه ۱۳۹ کتاب ریاضیات ۲ متوسطه است که با انجام ویرایش زیر انتخاب شد:

جایگزینی «بدون استفاده از ماشین‌حساب» به جای «بدون ماشین‌حساب».

سؤال ۳: اگر $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\sin 2\theta$ را به‌دست آورید.

هدف اصلی سؤال‌های این دسته بررسی درک دانش‌آموزان از مفهوم و رابطه زاویه، کمان و تابع مثلثاتی و توانایی استفاده از دایره مثلثاتی در حل مسائل بود. به‌علاوه، سؤال اول، درک دانش‌آموز از جهت مثلثاتی و تابع کسینوس را نیز می‌سنجد. سؤال دوم درک دانش‌آموز در برخورد با کسینوس زوایای حاده و منفرد را نیز می‌سنجد و سؤال سوم در پی یافتن درک دانش‌آموز در مواجهه با تغییر زاویه در تابع سینوس است.

یافته‌ها

در این بخش، یافته‌ها به تفکیک هر دسته سؤال، ارائه می‌شوند.

سؤال‌های دسته اول

هدف از طراحی سؤال‌های دسته اول، بررسی درک دانش‌آموزان از مفاهیم درجه و رادیان و ارتباط این دو با هم، تصور آنان از این واحدهای اندازه‌گیری زاویه در دایره مثلثاتی و همچنین تفاوت مقدار کسری و جهتی در دایره مثلثاتی بود. سؤال ۱ در پی بررسی رابطه بین رادیان و دایره مثلثاتی و رابطه بین درجه و رادیان و تفاوت مقدار کسری و جهتی در دایره مثلثاتی بود و سؤال ۲، در پی بررسی دیدگاه دانش‌آموزان در فهمیدن تفاوت درجه و رادیان و عدد π بود. با توجه به اهداف مرتبط، این دو سؤال در یک دسته قرار گرفتند.

سؤال ۱: زوایای ۳- رادیان و 3π - رادیان، چه کسری از دایره مثلثاتی هستند؟ اندازه هر یک را برحسب درجه بیان کنید (با تقریب سه رقم اعشار).
 از ۵۴ دانش‌آموز شرکت‌کننده در آزمون، ۴۴ نفر پاسخی به این سؤال ندادند و ۱۰ نفر پاسخ را یا کاملاً غلط نوشته بودند و یا ناقص! در پاسخ‌های داده شده به سؤال اول، جواب‌های ناصحیح قابل توجه بودند. برای مثال، تعداد زیادی در پاسخ به مقدار 3π -، نوشته بودند $540 = 3 \times 180 = 3\pi$ - که بیانگر این است که π را

مساوی 180° می‌دانند، یعنی درک صحیحی از ماهیت عددی π ندارند و نسبت به عدد بودن آن، شک دارند. همچنین، یکی از خواسته‌های سؤال این بود که بدانند این مقادیر، چه کسری از دایره مثلثاتی هستند و نیازی به وارد کردن «-» برای به‌دست آوردن پاسخ ندارند. این امر بیانگر عدم درک دانش‌آموزان از مفهوم مقدار کسری و تفاوت آن با مقدار جهت‌دار است. تعدادی از دانش‌آموزان فقط با نوشتن فرمول

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

مقدار این زاویه‌ها را برحسب درجه محاسبه کرده بودند که نشان می‌داد آن‌ها رادیان را به‌عنوان یک واحد اندازه‌گیری مستقل از درجه نمی‌شناسند و فقط آن را به‌وسیله درجه می‌توانند توضیح دهند. دانش‌آموزان، تنها فرمول را به خاطر سپرده و کمتر به معنای این برابری توجه کرده بودند. همچنین، نتوانستند بین رادیان و دایره مثلثاتی ارتباط معناداری برقرار کنند.

سؤال ۲: π رادیان با π درجه چه فرقی می‌کند؟ توضیح دهید.

از ۵۴ دانش‌آموز شرکت‌کننده در آزمون، ۴۰ نفر پاسخی به این سؤال ندادند و ۱۴ نفر پاسخ را کاملاً غلط نوشته بودند! پنج نفر از دانش‌آموزان نوشته بودند «رادیان دقیق‌تر است» و توضیح بیشتری در مورد دلیل این پاسخشان نداده بودند. علت دادن این پاسخ، شاید به‌دلیل توضیح ندادن ضرورت معرفی رادیان به‌عنوان یک واحد اندازه‌گیری جدید زاویه در کتاب درسی ریاضی ۲ است. همان‌طور که در این کتاب درسی دیده شد، معرفی رادیان بدون توجیه ضرورت آن است و ممکن است مثلاً دانش‌آموزان، آن را با واحدهای اندازه‌گیری طول مانند متر، سانتی‌متر و میلی‌متر که به ترتیب، دقت اندازه‌گیری را بالاتر می‌برند، مقایسه کرده و این نتیجه را گرفته‌اند. پاسخ‌های نادرست دیگر در سه دسته زیر قرار گرفتند.

۱. π رادیان ۴۰۰ واحد است و π درجه ۳۶۰ درجه است.

احتمالاً این پاسخ که معرف پاسخ‌های اکثر دانش‌آموزان است، از یادگیری طوطی‌وار این مطلب که «دایره 360° و 400° گرادین» است ناشی شده است. به‌علاوه این دانش‌آموزان، برای π هم ارزش عددی قائل نشده بودند که بیانگر فهم مبهم آن‌ها از π است. این مشکل شاید به ضعف در معرفی عدد π مربوط باشد. در ضمن، این‌ها، واحدهای رادیان و گرادین را معادل

پنداشته بودند که پاسخ‌های زیر، مؤید این ادعاست.
- π رادیان یعنی دایره را به 360° درجه تقسیم کنیم و π درجه مقداری از 360° درجه را گویند.
- π رادیان 200° درجه است، ولی π درجه 180° درجه است.

۲. پاسخ‌ها نشان دادند که دانش‌آموزان، عمدتاً نمی‌دانستند که رادیان چیست و این را از نامربوطی و بی‌دقتی پاسخ‌ها می‌شد استنباط کرد. انواع پاسخ‌های این دسته به‌صورت زیر بود:

- رادیان برحسب 180° است، یعنی هر یک π مساوی با 180° درجه است.

- اگر دایره‌ای را به 360° قسمت تقسیم کنیم، به هر قسمت درجه می‌گویند و یک درجه را برحسب رادیان حساب می‌کنیم.

- رادیان به 400° قسمت درجه‌بندی شده است، اما درجه به 180° قسمت درجه‌بندی شده است.

- به‌دست آوردن زاویه بر حسب π رادیان گویند.
- هر رادیان 180° است.

- رادیان دایره را به 400° قسمت تقسیم می‌کند، ولی درجه به 360° قسمت.

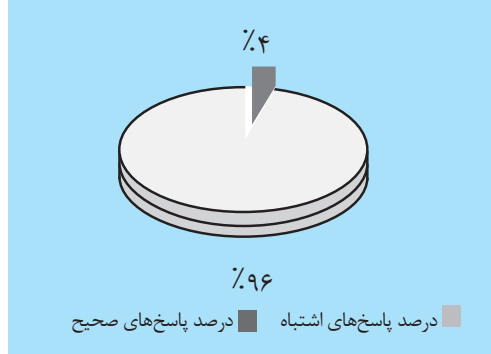
- اگر یک دایره را برحسب درجه حساب کنیم، 360° درجه می‌شود ولی اگر برحسب رادیان تقسیم کنیم، 180° درجه می‌شود.

۳. پاسخ یکی از دانش‌آموزان، به لحاظ ماهیتی با دیگران متفاوت و ویژه بود و جای تأمل بسیار دارد.
- دایره مثلثاتی را به 360° قسمت تقسیم می‌کنیم که هر قسمت آن، یک درجه است. رادیان که همان π است 180° درجه است که یک خط 180° یعنی π است و زاویه 90° درجه که $\frac{\pi}{2}$ است و زاویه 270° درجه که $\frac{3\pi}{2}$ است و زاویه 360° درجه 2π است.

این پاسخ، بیانگر آن است که دانش‌آموز، تصور درستی از زاویه هم ندارد، چون زاویه‌های متناظر به $\frac{1}{360}$ از محیط هر دایره، یک درجه است و نه هر کدام از 360° قسمت محیط دایره. همچنین، رادیان را مساوی π گرفته است و در واقع، تصور عددی نسبت به π ندارد و تنها آن را نمادی از رادیان می‌پندارد و مساوی 180° می‌داند.

در جمع‌بندی پاسخ‌های سؤال‌های دسته اول، می‌توان گفت که در این تحقیق، بیشتر دانش‌آموزان π را برابر 180° درجه می‌پندارند، درک صحیحی از ماهیت عددی π ندارند و نسبت به عدد بودن آن شک دارند. در واقع، π برای بیشتر دانش‌آموزان مظهر رادیان است. اغلب

شکل ۱: نمودار درصد پاسخ‌ها به سؤال دسته دوم ۴ درصد



از ۵۴ دانش‌آموز شرکت‌کننده در پژوهش، ۵۱ نفر پاسخی به این سؤال نداده بودند. از سه نفر بقیه هم که به این سؤال پاسخ داده بودند، تنها پاسخ دو نفر درست و نفر سوم اشتباه بود. پاسخ درست به صورت زیر بود:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = (\cos \theta, \sin \theta) \Rightarrow =$$

$$x = \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, y = \sin \theta = \frac{-2}{\sqrt{5}},$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{-2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = -2$$

دانش‌آموزی که پاسخ اشتباه داده بود، $\cos \theta$ را با مؤلفه دوم یعنی $\frac{-2}{\sqrt{5}}$ و $\sin \theta$ را با مؤلفه اول یعنی $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ، مختصات نقطه مساوی قرار داده بود و در ادامه با استفاده از فرمول $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ مقدار $\tan \theta$ را $\frac{-1}{2}$ به دست آورده بود. با پرسش از او در مورد علت این پاسخ، متوجه اشتباه این دانش‌آموز در به‌خاطر سپردن ترتیب مؤلفه‌ها که به سینوس و کسینوس زاویه اختصاص می‌دهند، شدیم که بیانگر یادگیری حافظه‌محور وی بود.

درصد پایین پاسخ به این سؤال، شاید حاکی از عدم توانایی دانش‌آموزان در برقراری ارتباط بین توابع مثلثاتی و دایره مثلثاتی باشد؛ یا اینکه از معرفی این توابع از طریق نسبت‌های مثلث قائم‌الزاویه ناشی می‌شود. یعنی دانش‌آموزان، نسبت‌های مثلثاتی را به‌عنوان یک تابع درک نکرده‌اند، برخلاف آنکه در دایره مثلثاتی، سعی در معرفی نسبت‌های مثلثاتی به‌عنوان تابع می‌شود. این در حالی است که پاسخ‌های این سؤال نشان داد که دانش‌آموزان، «زاویه در حالت استاندارد» را نمی‌شناسند و انتهای کمان را در حالت استاندارد زاویه، تشخیص نمی‌دهند، زیرا در کتاب درسی، به این مهم به‌خوبی پرداخته نشده است.

دانش‌آموزان، بیشترین چیزی که از رادیان می‌دانستند رابطه $\frac{D}{\pi} = \frac{R}{180}$ بود که بیانگر این مطلب است که آن را یک واحد مستقل از درجه نمی‌شناسند و به‌وسیله درجه می‌توانند در مورد آن اظهار نظر کنند. پاسخ‌های سؤال اول، نشان از ضعف دانش‌آموزان در ایجاد ارتباط بین دایره مثلثاتی و رادیان داشت. شاید علت اصلی، در نحوه پرداختن کتاب درسی به معرفی درجه و رادیان باشد که ابتدا درجه به‌عنوان واحد اندازه‌گیری در مثلث قائم‌الزاویه معرفی می‌شود و بعد از حل تمرینات متعدد، رادیان به‌عنوان واحد دیگری برای اندازه‌زاویه و با استفاده از دایره مثلثاتی معرفی می‌گردد و در کتاب درسی، نسبت به ایجاد ارتباطی مناسب بین این دو واحد، توجه کافی نشده است. مثلاً تعریف رادیان در صفحه ۱۲۳ کتاب درسی که رادیان را براساس دایره واحد تعریف می‌کند و دانش‌آموز در ادامه، در درک فرمول رابطه بین طول کمان و اندازه زاویه برحسب رادیان یعنی $\frac{L}{r} = \theta$ در صفحه ۱۲۵ کتاب درسی دچار سردرگمی می‌شود. به‌علاوه، در مورد علت این صورت‌بندی، هیچ توضیحی داده نشده است. هم‌چنین، توضیح مختصر و گیج‌کننده‌ای در مورد رابطه درجه و رادیان و فرمول $\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180}$ در صفحه ۱۲۴ کتاب درسی آمده است که این امر، می‌تواند از علت‌های احتمالی این ضعف در بین دانش‌آموزان باشد. نحوه زاویه‌بندی و پرداختن به رابطه درجه و رادیان در شکل‌های ارائه شده در کتاب درسی، از علت‌های دیگر در وجود بدفهمی‌های موجود در بین دانش‌آموزان می‌تواند باشد. مثلاً در شکل مربوط به «تمرین در کلاس» شماره ۳ صفحه ۱۲۵ کتاب درسی، کمان نشان‌دهنده زاویه است و تنها زوایای سراسرست نظیر 270° را می‌توان محاسبه کرد، و محاسبه زوایای غیرسراسرست مثل $22/185$ ، تقریباً ممکن نیست.

سؤال دسته دوم

هدف از سؤال این دسته، بررسی درک رابطه بین توابع مثلثاتی و ارتباط آن‌ها با دایره مثلثاتی، و مفاهیم پایه‌ای مثلثات از جمله موقعیت استاندارد زاویه و کمان بود.

سؤال: اگر زاویه θ در موقعیت استاندارد باشد، یعنی نقطه انتهایی کمان θ ، دایره مثلثاتی را در نقطه $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$ قطع کند. مقادیر $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ و $\tan \theta$ را در این نقطه حساب کنید.

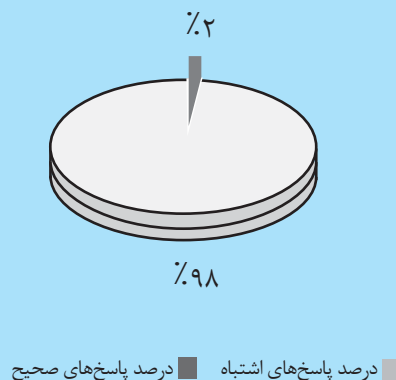
مثلاً شکل مربوط به مثال ۳، صفحه ۱۲۹ کتاب درسی، علاوه بر ایجاد بدفهمی در زاویه و اندازه آن، به ارتباط بین مختصات نقطه انتهایی کمان و زاویه در حالت استاندارد نیز نپرداخته است.

سؤال‌های دسته سوم

هدف اصلی سؤال‌های این دسته، بررسی درک دانش‌آموزان از مفهوم و رابطه زاویه، کمان، تابع مثلثاتی و توانایی استفاده از دایره مثلثاتی در حل مسائل بود. به علاوه با سؤال ۱، قصد داشتیم درک دانش‌آموزان را از جهت مثلثاتی و تابع کسینوس بررسی کنیم. سؤال ۲، درک دانش‌آموز را در برخورد با کسینوس زوایای حاده و منفرد می‌سنجد و سؤال ۳، در پی درک دانش‌آموز در مواجهه با تغییر زاویه در تابع سینوس است.

سؤال ۱: دو مقدار برای θ بین $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ پیدا کنید، به طوری که $\cos \theta = \frac{1}{2}$ باشد.

شکل ۲: نمودار درصد پاسخ‌ها به سؤال ۱ دسته سوم



از ۵۴ دانش‌آموز شرکت کننده در این پژوهش، ۵۲ نفر پاسخی به این سؤال نداده بودند و از دو نفری هم که پاسخ داده بودند، فقط پاسخ یک نفر صحیح بود. پاسخ صحیح به صورت زیر بود:

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \text{ در نتیجه}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

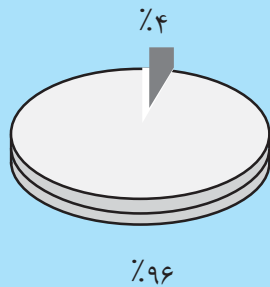
$$\cos -60^\circ = \frac{1}{2}$$

پاسخ دیگر که کامل نبود، به صورت $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ارائه شده بود که شاید پاسخ‌دهنده، به محدوده زاویه θ که بین $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ بود، توجه نکرده بود و محدوده θ را ربع‌های دوم و سوم فرض کرده بود و این، نشان از وجود بدفهمی در مفهوم بازه است که دانش‌آموز باید آن را از $\frac{3\pi}{4}$ یعنی ربع

چهارم تا $\frac{\pi}{4}$ یعنی ربع اول در نظر می‌گرفت. از دیدگاه دبیران، این مشکل به کم‌توجهی و نمونه سؤالات اندک کتاب درسی که مشابه با این سؤال باشند، برمی‌گردد. به‌علاوه، ناتوانی دانش‌آموزان در استفاده از دایره مثلثاتی برای حل این سؤال، واضح بود.

سؤال ۲: اگر $\cos \theta = 0/2$ باشد (θ بر حسب رادیان)، بدون استفاده از ماشین‌حساب، مقادیر $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ و $\cos(\pi + \theta)$ را به دست آورید.

شکل ۳: نمودار درصد پاسخ‌ها به سؤال ۲ دسته سوم



از ۵۴ دانش‌آموز شرکت کننده در آزمون، به این سؤال، تنها دو نفر پاسخ صحیح و سه نفر پاسخ اشتباه داده بودند و بقیه دانش‌آموزان، اصلاً پاسخی نداده بودند. دو پاسخ اشتباه به صورت زیر بود:

$$\cos \theta = 0/2$$

آن‌گاه

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = 89/8, \cos(\pi + \theta) = 180/2$$

این دو دانش‌آموز، اصلاً نقشی برای سینوس و کسینوس در پاسخ‌هایشان قائل نشده بودند و این توابع را فقط به عنوان دستگاهی که زاویه‌ها را به عنوان ورودی گرفته و آن‌ها را به خروجی می‌برد، فهمیده بودند که نشان از فهم و درک ضعیف آن‌ها از مفهوم تابع داشت.

یکی دیگر از دانش‌آموزان با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مانند شکل صفحه بعد، پاسخ $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ را به درستی به دست آورده، ولی نتوانسته بود $\cos(\pi + \theta)$ را محاسبه کند:

$$\text{چون } \cos \theta = 0/2 \text{ پس}$$

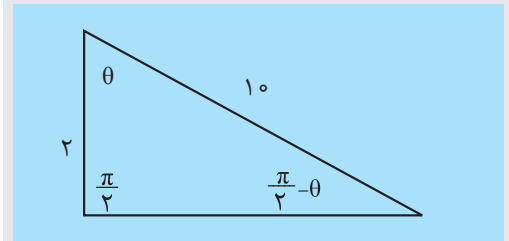
از ۵۴ دانش آموز شرکت کننده در آزمون، فقط یک نفر به این سؤال، به درستی پاسخ داده بود و پاسخ ده نفر دیگر، اشتباه بود که همگی جواب اشتباه ۱ را داده بودند. پاسخ این ده نفر به صورت زیر بود:

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \quad \text{آن گاه} \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

گور (۲۰۰۹) در تحقیقی، خطاهای شناسایی شده در مثلثات را در پنج مقوله، شامل «استفاده نادرست از داده‌ها»، «تفسیر نادرست زبانی»، «استنباطهای منطقی غیرمعتبر»، «تعریفهای مخدوش» و «خطاهای تکنیکی-مکانیکی» دسته‌بندی کرد. وی دریافت که بعضی دانش آموزان، دارای بدفهمی‌ها و پیچیدگی‌های یادگیری زیادی در مثلثات هستند که حاکی از آن است که قبل از یادگیری مفاهیم اصلی مثلثات، بعضی از مفاهیم ریاضی را نادرست یا ناقص یاد گرفته‌اند؛ مفاهیمی که برای یادگیری مفاهیم مثلثاتی، پایه‌ای هستند، مفاهیمی مانند دایره واحد، مختصات نقاط محیط دایره و ارتباطش با طول و عرض، فاکتورگیری و رابطه فیثاغورس

این دانش آموزان، روابط سینوسی را به صورت تابعی خطی از زاویه ورودی در نظر گرفته بودند که می‌تواند ناشی از عدم تأکید کتاب درسی به این مطلب باشد. چون فقط تمرین ۷ صفحه ۱۳۶ از کتاب درسی که در قسمت مسائل گنجانده شده است، مربوط به بررسی این مطلب است.

هم‌چنین، دانش آموزان اولین بار است که به طور مستقیم، قادر به محاسبه این مقادیر نیستند و این پاسخ را در ادامه مطالب قبلی، موجه می‌دانستند. ایجاد یک تقابل مفهومی در کلاس درس و کتاب درسی و تأکید بر آن، کمک شایانی به رفع چنین بدفهمی‌هایی در ذهن دانش آموزان می‌کند. مثلاً می‌شود مشابه روند کتاب، با ارائه فعالیت، مقادیر $\sin 60^\circ$ و $2\sin 30^\circ$ با هم مقایسه شوند و سپس، نتیجه کلی برای تابع سینوس بیان شود، یعنی: $\sin(\pi+\theta) \neq \sin \pi + \sin \theta$ و به همین ترتیب، برای کل توابع مثلثاتی بر این نکته تأکید شود. استدلال دانش آموزی که پاسخ صحیح داده بود،

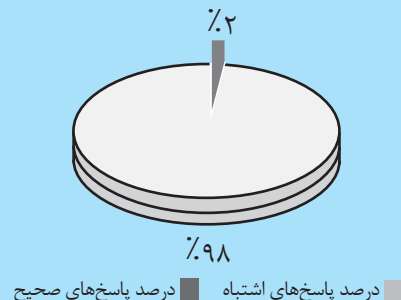


$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{2}{10} = 0.2$$

این پاسخ بیانگر آن است که دانش آموز، درک خوبی از نسبت‌های مثلثاتی که به وسیله مثلث قائم‌الزاویه در سال‌های قبل معرفی شده داشته و به خوبی از آن‌ها برای به دست آوردن مقدار $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ استفاده کرده بود، ولی نتوانسته بود از دایره مثلثاتی برای به دست آوردن مقدار $\cos(\pi+\theta)$ استفاده کند که این حاکی از ضعف دانش آموز در برقراری ارتباط بین تابع مثلثاتی و دایره مثلثاتی بود. این دانش آموز قادر به محاسبه نسبت‌های مثلثاتی در محدوده زاویه حاده و با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه بود. ولی در محاسبه مقدار تابع مثلثاتی زاویه‌های غیرحاده دچار مشکل شده بود. شاید این مشکل، از اینکه حتی یک مورد توضیح در نحوه به دست آوردن مقادیر توابعی مشابه $\cos(\pi+\theta)$ در کتاب درسی نیست، ناشی می‌شود، چون این قسمت که از صفحه ۱۳۲ کتاب درسی با عنوان «تعیین مقادیر مثلثاتی برای تمام زوایا» شروع می‌شود، کلاً در قالب فعالیت و بر عهده دانش آموز گذاشته شده است.

سؤال ۳: اگر $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\sin 2\theta$ را به دست آورید.

شکل ۴: نمودار درصد پاسخ‌ها به سؤال ۳ دسته سوم



به صورت زیر بود:

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

$$\theta = 30^\circ \Rightarrow 2\theta = 60^\circ$$

$$\sin 2\theta = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

این استدلال، بیانگر آن بود که این دانش آموز از ویژگی های توابع خطی آگاه بود و می دانست که سینوس، تابعی خطی نیست.

در جمع بندی پاسخ های این دسته، نکات ظریفی قابل بیان است، از جمله اینکه بعضی دانش آموزان، روابط سینوسی را به صورت تابعی خطی از زاویه ورودی در نظر گرفته بودند و تنها قادر به محاسبه نسبت های مثلثاتی در محدوده زاویه حاده و با استفاده از مثلث قائم الزاویه بودند. هم چنین در محاسبه مقدار تابع مثلثاتی زاویه های غیر حاده، دچار مشکل بودند، یعنی به خوبی، نمی توانستند از دایره مثلثاتی استفاده کنند.

علاوه بر این، بعضی از دانش آموزان، در تشخیص مقدار تابع مثلثاتی یک زاویه منفرد مشکل داشتند. یافته های این تحقیق نشان داد که رایج ترین بدفهمی های مثلثاتی دانش آموزان پایه دوم دبیرستان در این موارد است:

- مفهوم اندازه زاویه را به خوبی درک نمی کنند؛
- با مقیاس رادیان برای اندازه زاویه، ارتباط برقرار نمی کنند و با مشکل مواجه هستند؛
- در تخمین و تعیین محدوده نسبت های مثلثاتی زاویه های ناشناخته، ناتوان هستند و دچار مشکل می شوند؛
- از مثلث قائم الزاویه در مقایسه با دایره مثلثاتی، بیشتر برای حل مسئله استفاده می شود و به خوبی از دایره مثلثاتی برای حل مسئله، نمی توانند استفاده کنند؛
- نسبت های مثلثاتی را به عنوان توابع خطی می پندارند.

نتیجه گیری

نتایج، حاصل تجزیه و تحلیل پاسخ های دانش آموزان به سؤال های آزمونی است که به قصد جمع آوری داده ها طراحی شده بود. سؤال های آزمون، با دانش محتوایی مورد نظر کتاب ریاضی پایه دوم متوسطه از دانش آموزان متناسب بود. یافته ها می تواند برای همه کسانی که با تدریس ریاضی در دوره متوسطه در ارتباط هستند، سودمند باشد. یادگیری مثلثات دغدغه بسیاری از دبیران ریاضی است. این همکاران، با علاقه به دنبال علل مشکلات

دانش آموزان در یادگیری مثلثات هستند و در ارتباط با آن، به بحث و مناظره می پردازند؛ آن ها از پژوهشگران انتظار دارند که نسبت به یادگیری و تدریس مثلثات، که نقش برجسته ای در برنامه درسی ریاضی دوره متوسطه در ایران دارد، بپردازند.

بیشتر مدیران و دبیران از انجام این پژوهش حمایت کردند، اگرچه نتایج آن را قابل پیش بینی و آشکار می دانستند. آن ها انتظار داشتند که انجام چنین پژوهش هایی بتواند به ارائه راهکارهای عملی برای بهبود تدریس و یادگیری مثلثات بیانجامد. به باور دبیران، وجود بدفهمی ها در آموزش و یادگیری ریاضی در ایران، تا حد زیادی عمومیت دارد و به همین خاطر، لازم است در این زمینه، پژوهش های متعددی انجام شود. دبیران ریاضی بیان نمودند که به دلیل «مشکل بودن مثلثات» و به اصطلاح «فزار» بودن آن، تدریس مثلثات را به عنوان «فصل آخر»، به پایان سال تحصیلی موکول می کنند که «تا حد امکان» به امتحانات پایانی «نزدیک» باشد.

- در مورد آزمون، نظر دانش آموزان این بود که ساختار آن، با سایر آزمون هایی که تا آن وقت داده بودند متفاوت است زیرا به دنبال استدلال است.
- معلمان نیز سؤال های آزمون را «بسیار بالاتر از سطح توانایی های دانش آموزان» می دانستند.
- چون الزامی برای ذکر نام و نام خانوادگی وجود نداشت، انتظار می رفت که پدیده ای به نام «تقلب» رخ ندهد. اما با وجودی که بیشتر دانش آموزان هم نام و نام خانوادگی را ننوشته بودند، باز هم مواردی از تقلب، از قبیل استفاده از جزوه و کمک گرفتن از نوشته های دانش آموز کنار دستی، دیده شد که به نظر می رسد این ناشی از ترس و اضطراب دانش آموزان در مواجهه با هر نوع «متحان» بوده است. بالاخره، جمله ای که یکی از دانش آموزان در همه برگه های پاسخ نامه خود نوشته بود جالب بود. وی نوشته بود که، «۵ درصد را نمی فهمم و ۹۵ درصد را بلد نیستم!» تجزیه و تحلیل داده ها این نتیجه کلی را به دست داد که دانش آموزان، از نظر درک مفاهیم مثلثاتی در سطحی که انتظار می رود نیستند و مشکلات و بدفهمی های زیادی دارند.

بدفهمی های رایج دانش آموزان پایه دوم دبیرستان در رابطه با مثلثات کدام اند؟

یکی از مفاهیمی که لازم است دانش آموزان، برای ورود به موضوع مثلثات، بر آن مسلط باشند اندازه زاویه است. در این پژوهش، مشخص گردید که بسیاری از

یکی از مفاهیمی که لازم است دانش آموزان، برای ورود به موضوع مثلثات، بر آن مسلط باشند. اندازه زاویه است. در این پژوهش، مشخص گردید که بسیاری از دانش آموزان، نمی‌توانند زاویه را توضیح دهند و اندازه فضای بین دو ضلع زاویه را اندازه زاویه می‌دانند! این برداشت باعث می‌شود تا آن‌ها در مثلث‌های قائم‌الزاویه و دایره‌های مثلثاتی متفاوت، برای یک زاویه، اندازه مساوی قائل نباشند و خصوصاً در دایره، اندازه زاویه را در رابطه مستقیم با کمان بدون در نظر گرفتن شعاع دایره می‌دانند.

استفاده کنند؛

- نسبت‌های مثلثاتی را توابع خطی می‌پندارند.

نقش کتاب‌های درسی تازه‌تألیف، در رفع یا ایجاد بدفهمی‌های مثلثاتی دانش آموزان، کدامند؟
عملکرد مورد انتظار از دانش آموزان، در مورد مبحث مثلثات، که در فصل پنجم ریاضیات ۲ پایه دوم متوسطه (برگرفته از دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، آخرین چاپ) درج شده چنین است:
دانش آموزان باید بتوانند:

۱. با استفاده از دوران نیم‌خط حول مبدأ، اندازه جبری هر زاویه را نمایش دهند. (زاویه را در موقعیت استاندارد رسم کنند)؛
۲. رادیان را تعریف کنند؛
۳. واحدهای اندازه‌گیری زاویه (رادیان و درجه) را به یکدیگر تبدیل کنند؛
۴. اندازه هر زاویه را با معلوم بودن شعاع و طول کمان محاسبه کنند؛
۵. دایره مثلثاتی را تعریف کنند؛
۶. با استفاده از دایره مثلثاتی، نسبت‌های مثلثاتی Sin، Cos هر نقطه را به‌دست آورند؛
۷. بر روی دایره مثلثاتی، تانژانت هر زاویه را مشخص کنند؛
۸. نسبت‌های مثلثاتی زوایای بین صفر و 2π را که مقادیر یکسانی دارند مشخص کنند؛
۹. با معلوم بودن مختصات هر نقطه، نسبت‌های مثلثاتی آن را به‌دست آورند؛
۱۰. مقادیر دقیق نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص

دانش آموزان، نمی‌توانند زاویه را توضیح دهند و اندازه فضای بین دو ضلع زاویه را اندازه زاویه می‌دانند! این برداشت باعث می‌شود تا آن‌ها در مثلث‌های قائم‌الزاویه و دایره‌های مثلثاتی متفاوت، برای یک زاویه، اندازه مساوی قائل نباشند و خصوصاً در دایره، اندازه زاویه را در رابطه مستقیم با کمان بدون در نظر گرفتن شعاع دایره می‌دانند. دانش آموزان در درک رادیان به‌عنوان مقیاس دیگری برای اندازه‌گیری زاویه، دچار مشکل بودند. برای آن‌ها، «مقیاس اصلی برای اندازه‌گیری زاویه» درجه بود. بدین سبب، اکثراً با استفاده از فرمول آن، رادیان را به درجه تبدیل می‌کردند، سپس آن را در دایره مثلثاتی مشخص می‌نمودند. در واقع، دانش آموزان گاهی رادیان را نیز یک نوع زاویه می‌پنداشتند. خصوصاً از π ، مفهوم مبهمی در ذهن داشتند و اکثراً آن را به‌عنوان عدد نمی‌شناختند بلکه نماد رادیان می‌انگاشتند. هم‌چنین، نمی‌توانستند بین زاویه استاندارد در دایره مثلثاتی و مختصات نقطه انتهایی کمانی که آن را در برگرفته است و نسبت‌های مثلثاتی، رابطه برقرار کنند. بسیاری از دانش آموزان، بازه‌های زاویه‌های دایره مثلثاتی را به‌درستی تشخیص نمی‌دادند. مثلاً وقتی زاویه محدود به $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ بود، بیشتر دانش آموزان ربع دوم و سوم را در نظر می‌گرفتند. اغلب دانش آموزان برای محاسبه مقدار یک زاویه از یک تابع مثلثاتی، از مثلث قائم‌الزاویه کمک می‌گرفتند و کمتر می‌توانستند از دایره مثلثاتی برای محاسبه استفاده کنند. بیشتر آن‌ها، روابط مثلثاتی را همچون توابع خطی می‌پنداشتند. می‌دانیم یکی از نشانه‌های درک عمیق مطالب، تخمین زدن و مشخص کردن محدوده تقریب، بدون انجام گام‌های عملی است، اما بیشتر دانش آموزان، از چنین مهارتی برخوردار نبودند. هم‌چنین، تعداد زیادی از دانش آموزان، روابط مثلثاتی را به‌عنوان تابع نمی‌شناختند و بعضی از آن‌ها می‌پنداشتند نسبت‌های مثلثاتی همواره مقداری مثبت دارند.

به‌طور کلی، می‌توان بدفهمی‌ها و مشکلات دانش آموزان را به‌صورت زیر بیان کرد:

- مفهوم اندازه زاویه را به‌خوبی درک نمی‌کنند؛
- با مقیاس رادیان، برای اندازه زاویه، ارتباط برقرار نمی‌کنند و با مشکل مواجه‌اند؛
- در تخمین و تعیین محدوده نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ناشناخته، ناتوان‌اند و دچار مشکل می‌شوند؛
- در مقایسه با دایره مثلثاتی، بیشتر برای حل مسئله‌های مثلثاتی، از مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کنند و به‌خوبی، از دایره مثلثاتی برای حل مسئله نمی‌توانند

را به دست آورند؛

۱۱. با استفاده از دایره مثلثاتی زوایای قرینه، متمم، مکمل و ... را به دست آورند؛
۱۲. شیب خط را با استفاده از تانژانت زاویه محاسبه کنند.

گرفت:

- بسیاری از دبیران، اصلاً به متن و محتوای فصل مثلثات کتاب ریاضی سال دوم دبیرستان توجه ندارند و از ابزار کاغذ شطرنجی، پرگار و نقاله به ندرت در تدریس بهره می‌برند. آن‌ها در حدی که باید در کتاب مثلثات از این ابزار استفاده کنند، مطلع هستند، اما علت تدریس نکردن مثلثات از روی کتاب درسی را، بیان نامناسب کتاب درسی دانستند.

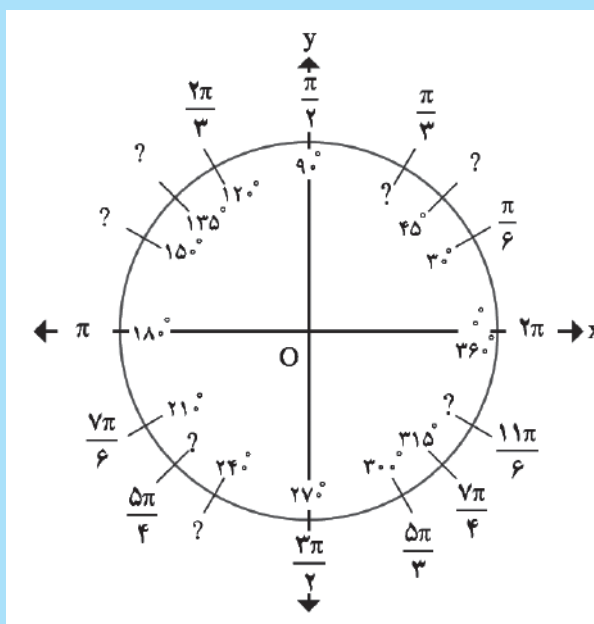
- فصل مثلثات کتاب ریاضی پایه دوم دبیرستان، در تداوم ریاضی پایه اول متوسطه نیست و ارتباط خوبی هم با بخش مثلثات کتاب حسابان رشته ریاضی ندارد.

- نحوه نمایش زوایای دایره مثلثاتی، علاوه بر ایجاد بدفهمی در مفهوم و تعریف زاویه، باعث می‌شود تا رابطه بین رادیان و درجه، فقط برای بعضی زوایای خاص پنداشته شود زیرا دانش‌آموز کمان را در این شکل‌ها در رابطه مستقیم با زاویه‌ای که آن کمان را دربر گرفته می‌بیند. مانند موارد زیر در کتاب ریاضی درسی پایه دوم دبیرستان که عیناً و بدون هر ویرایشی نقل می‌شود:

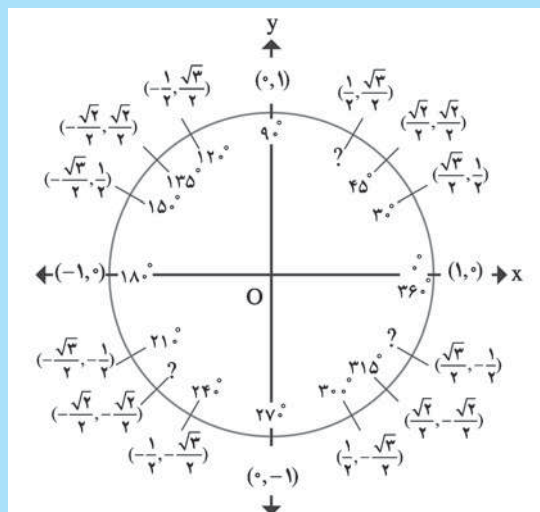
این در حالی است که نتایج این پژوهش نشان داد که به‌جز انتظار شماره ۱۲، که آن هم از اهداف این پژوهش نبود، تقریباً هیچ‌کدام از انتظارات مورد نظر که در بالا ذکر شد حاصل نمی‌شود. با توجه به اینکه کتاب درسی تازه تألیف ریاضیات ۲ منبع اصلی دانش‌آموزان است، این فصل کتاب تحلیل شد و علاوه بر آن با چند نفر از دبیران ریاضی هم که این کتاب را تدریس می‌کردند مصاحبه‌های غیرساختاری انجام شد تا علت این فاصله فاحش بین عملکرد دانش‌آموزان و انتظارات کتاب درسی بررسی شود.

در تحلیل محتوای فصل مثلثات، داده‌های به دست آمده از مصاحبه‌ها و نظرات دبیران در دسته‌های زیر قرار

۳- شکل مقابل دایره‌ای به شعاع واحد را نشان می‌دهد که اندازه‌های زوایا برحسب درجه و رادیان با یکدیگر معادل هستند. با استفاده از روابط بالا جاهای خالی دایره‌ی فوق را تکمیل نمایید.

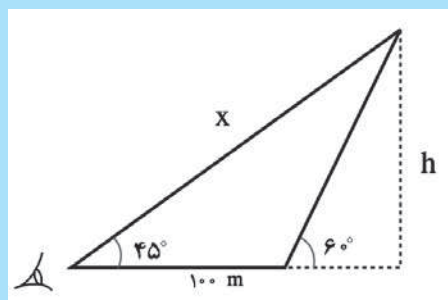


حال مقادیر دقیق سینوس و کسینوس بعضی از زوایای خاص را روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم.



- دانش آموز، سؤال های کاربردی مثلثات را نمی تواند حل کند، زیرا کتاب آن چنان که شایسته است به این مسائل نپرداخته و نگارش بعضی از تمرین ها نیز گیج کننده است که این خود باعث تضعیف روحیه بیشتر دانش آموزان می شود. آن ها به عنوان نمونه، تمرین ۷ صفحه ۱۵۴ ریاضی پایه دوم دبیرستان را مثال زدند.

۷- شخصی نزدیک آنتن یک ایستگاه رادیویی ایستاده است. زاویه ی دید شخص با نوک آنتن 60° است. اگر او ۱۰۰ متر به عقب برود زاویه ای که با نوک آنتن در موقعیت جدید می سازد 45° است. ارتفاع آنتن را حساب کنید. (ابتدا مقدار x را پیدا کنید)



- از نظر دبیران، مقدمه فصل خوب است و با مثال جالب ستاره قطبی کار را شروع کرده است، اما به یک باره با یک فعالیت وارد بحث اصلی شده است، آن هم فعالیتی که همه دانش آموزان با آن مشکل دارند. این فعالیت در ادامه مقدمه است و بیش از آنکه حس مثلثاتی در دانش آموز به وجود آورد در او حس محاسباتی، که موجب دلزدگی است، ایجاد می کند. به باور دبیران، یادگیرندگان در خصوص محاسبات عددی مشکل دارند، پس بهتر است تا حد ممکن، برای شروع از این گونه فعالیت ها استفاده نشود.



با توجه به این که ستاره قطبی روی دایره‌ای در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند و این ستاره در هر ۲۳ ساعت و ۵۶ دقیقه و ۴/۳۳ ثانیه، یعنی ۰/۹۹۷۲۷۲۳ شبانه‌روز یک‌بار این دایره‌ی کوچک را طی می‌کند.

- در این کتاب درسی، بحث زاویه، درجه و رادیان شتاب‌زده انجام شده است، بدون اینکه درک درستی از این مفاهیم در دانش‌آموزان ایجاد شده باشد. به عقیده آن‌ها، ابتدا لازم است دایره مثلثاتی که اساس کار مثلثات است، تعریف شود و بعد از آن، زاویه تعریف شود.

- بعضی از دبیران ابراز می‌کردند که چون «شیوه بیان کتاب را قبول ندارند»، پس ساختار کتاب را به هم می‌ریزند و طبق سلیقه خود، کار را پیش می‌برند و تاکنون هم در تدریس «با مشکلی مواجه» نشده‌اند.

- دبیران هم‌چنین، با ذکر نمونه‌ای توضیح می‌دادند که «بسیاری از مفاهیم کلیدی مثلثات، در تمرین‌ها گنجانده شده است» که به نظر، «کار نادرستی» می‌آید. مثلاً تمرین شماره ۷ صفحه ۱۳۶ کتاب درسی ریاضیات ۲، که بر خطی نبودن توابع مثلثاتی تأکید می‌کند؛ و یا اشاره جزئی به مقدار تقریبی یک رادیان برحسب درجه که منظور جمله «یک رادیان تقریباً ۵۷/۳ درجه است» در فعالیت شماره ۳ صفحه ۱۲۷ می‌باشد.

۷- با ارائه‌ی مثالی نشان دهید رابطه‌ی زیر همواره درست نیست.

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \pi - \sin \theta$$

۳- با ماشین حساب سینوس و کسینوس ۵۷/۳ درجه را محاسبه کنید و رابطه‌ی بین مختصات نقطه‌ی P و مقادیر سینوس و کسینوس را بنویسید.

- بعضی از شکل‌های کتاب در بخش مثلثات گنجانده شده است.

- بعضی از تمرین‌ها بد بیان شده‌اند و باعث سردرگمی هستند. (مانند اشکالات سؤال‌های انتخاب شده برای آزمون این مطالعه که در فصل ۳ اشکالات بیان و اصلاح شد).

- عنوان‌های نامناسب انتخاب شده، مثلاً «تعیین مقادیر مثلثاتی برای تمام زاویه‌ها» عنوان دقیقی نیست.

- به نظر می‌رسد کتاب درسی پایه دوم دبیرستان با رویکرد مشارکتی تألیف شده و در اهداف تبیین شده، سهم بیشتری برای ایفای نقش دانش‌آموز در یادگیری، با استفاده از ابزارهایی چون پرگار، نقاله، کاغذ شطرنجی و ماشین حساب قائل شده است، اما دو نکته این هدف را دچار مشکل می‌کند؛ اول اینکه این فصل به‌طور کاملاً مجزا و با حجم بالا، به نوعی یادآور کتاب‌های مثلثات دوره نظام قدیم است و از این نظر، در جا می‌زند، زیرا مثلاً برای اینکه این مبحث به تدریج و مرتبط

و مختلف هندسی دست‌ورزی می‌کنند و خود، به روابط عددی و مثلثاتی دست پیدا می‌کنند. در همین راستا، تحقیقات بلکت و تال (۱۹۹۱) در تأیید تأثیر مثبت استفاده از تکنولوژی در تدریس مثلثات است. ماشین حساب، به معلم اجازه می‌دهد که محاسبات یکنواخت و تکراری را در آموزش مفاهیم و حل مسئله‌های مثلثاتی حذف کند و وقت بیشتری را به شکل‌گیری مفاهیم اختصاص بدهد.

پی‌نوشت‌ها

1. Hülya Gür
2. Kendal
3. Stacey
4. Kieran
5. Bressoud
6. Us
7. Lansdell
8. Brown
9. Jeffrey
10. Reference Angle

منابع

۱. شهریاری، پرویز. (۱۳۷۹). سرگذشت ریاضیات. تهران: انتشارات مهاجر، چاپ اول.
۲. ربانی‌فر، علی‌اکبر. (۱۳۸۶). مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در رابطه با مثلثات. پایان‌نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی. تهران، ایران.
3. Bressoud, D. M. (2010). *Historical Reflection on Teaching Trigonometry*. *Mathematics Teacher*, 104(2), 106-112.
4. Brown, A. S. (200). *The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine*. *Proceeding of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, p. 228. Prague: PME30.
5. Blackett, N. & Tall, D. (1991). *Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software*. *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education XV, Assisi, Italy, (1991), vol 1, pp. 144-151*.
6. Gür, H. (2009). *Trigonometry Learning*. *New Horizons in Education-The Journal of Education*.
7. Kendel, M. & Stacey, K. (1996). *Trigonometry: Comparing Ratio and Unit Circle Methods*. (?)
8. Moore, K.C. (2010). *The Role of Quantitative Reasoning in Precalculus Students Learning Central Concepts of Trigonometry*. Unpublished Doctoral Dissertation. Arizona State University.
9. Moore, K.C. (2012). *Coherence, Quantitative Reasoning, and the Trigonometry of Students*. R. Mayes & L. L. Hatfield (Eds.); *Quantitative Reasoning and Mathematical Modeling: A Driver for STEM Integrated Education and Teaching in Context*, (pp. 75-92). Laramie, WY: University of Wyoming.
10. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Boston, MA. The Author.
11. Weber, K. (2008). *Teaching Trigonometric Functions: Lessons Learned from Research*. *Connecting Research to Teaching*. The National Council of Teachers of Mathematicist. Vol. 102, No 2, 144-150.
12. Weber, K. (2005). *Students' Understanding of Trigonometric Functions*. *Mathematics Education Research Journal*. Vol 17, No, 3, 91-112.

با موضوعات دیگر به دانش‌آموزان ارائه شود، شاید بهتر باشد تدریس توابع مثلثاتی بعد از تدریس توابع صورت گیرد تا حس ارتباط بهتری را در یادگیرنده ایجاد کند و سبب شود مثلثات را مبحثی صلب و جدا نپندارد. از منظری دیگر و با توجه به ساعات تدریس اختصاص داده شده به درس ریاضی پایه دوم دبیرستان، به نظر بسیاری از دبیران ریاضی، دستیابی به اهداف مورد انتظار مؤلفان تقریباً غیرممکن است.

راهکارهایی برای مواجهه با بدفهمی‌های مثلثاتی دانش‌آموزان

برای ارتقای درک و فهم دانش‌آموزان، راهکارهای زیر توصیه می‌شوند.

- به پیش‌نیازهای لازم دانشی دانش‌آموزان و سطح دانش آن‌ها توجه شود، از جمله شناخت انواع زاویه‌ها (حاده، منفرجه، قائمه)، تعریف وتر در مثلث قائم‌الزاویه، رابطه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه و موارد مرتبط دیگر.

- به گفته جفری^۹، مفهوم زاویه مرجع^{۱۰} در مرحله سازماندهی درک کامل دایره واحد، اساسی است. همچنین، زاویه مرجع نقشی کلیدی در انتقال از مثلثات مبتنی بر مثلث قائم‌الزاویه به مثلثات مبتنی بر دایره واحد دارد. وی معتقد است که درک زاویه مرجع، دانش‌آموز را قادر می‌سازد تا توجه خود را بر زوایای ربع اول متمرکز کند، زیرا همه زاویه‌های دیگر در اغلب روش‌ها، به زاویه ربع اول مربوط می‌شوند. علاوه بر این، اندازه یک زاویه مثبت یا منفی است، و صرف‌نظر از بزرگی آن، یک زاویه متناظر در ربع اول وجود دارد که ویژگی‌های آن، مطابق با زاویه داده شده است. وقتی که دانش‌آموز از زاویه مرجع به درستی استفاده کند، می‌تواند مطالعه همه زاویه‌ها، مختصات و نسبت‌های مثلثاتی را به مجموعه کوچک‌تری در ربع اول تبدیل نماید.

در کتاب ریاضی دوم دبیرستان، برای معرفی زاویه‌ها و اندازه آن‌ها در صفحه ۱۲۱، ابتدا راجع به «دوران کامل خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه ۳۶۰ درجه باشد...» صحبت شده است. به‌طور شهودی، دانش‌آموزان می‌دانند که «اندازه»، «جهت» ندارد و طبق قرارداد، برای آن «جهت» در نظر گرفته می‌شود. اما قبل از آنکه این فعالیت، فرصت کافی برای پرورش این شهود را ایجاد کند، با شتاب زیاد، وارد مباحث متعدد مربوط به زاویه‌ها و اندازه آن‌ها شده است.

- بلکت و تال (۱۹۹۱) استفاده از تکنولوژی را یکی از قوی‌ترین اصول آموزش می‌دانند و معتقدند با استفاده از نرم‌افزارهای کامپیوتری، دانش‌آموزان با شکل‌های متنوع

نرم افزار

MathProf 4.0

به عنوان کتاب کمک آموزش الکترونیک

مریم شاه محمدی

کارشناس ارشد ریاضی کاربردی و دبیر ریاضی و رایانه منطقه یک تهران

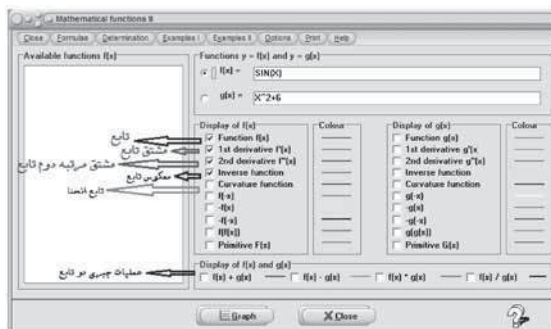
اشاره

Math prof 4.0 یک نرم افزار تخصصی ریاضی، با کاربرد سهل و متنوع است. در محیط این نرم افزار، با رسم نمودارهای دو و سه بعدی، مفاهیم ریاضی واضح و آسان نمایش داده می شود. نرم افزار شامل تعداد قابل توجهی مثال های حل شده و پویاست که در مباحث مختلف ریاضی، کاربرد دارد. این نرم افزار، قابلیت محاسبه بسیاری از شاخص های مهم توابع ریاضی را با دقت قابل ملاحظه ای داراست و از این حیث، بر بسیاری از نرم افزارهای ترسیمی و هندسی از جمله جوجبرا، برتری دارد.

کلیدواژه ها: آنالیز ریاضی، مشتق و انتگرال، جبر خطی، هندسه، ریاضیات سه بعدی، نرم افزار ریاضی

نمونه هایی از قابلیت های نرم افزار
آنالیز ریاضی:

با انتخاب گزینه Mathematical functions II از منوی Analysis یا ابزار  از نوار ابزار، امکان تعریف توابع و نمایش نمودار آن ها، مشتق مرتبه اول و دوم توابع، وارون توابع، قرینه تابع نسبت به محورهای مختصات، تابع انحنا، مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و خارج قسمت دو تابع فراهم خواهد شد.



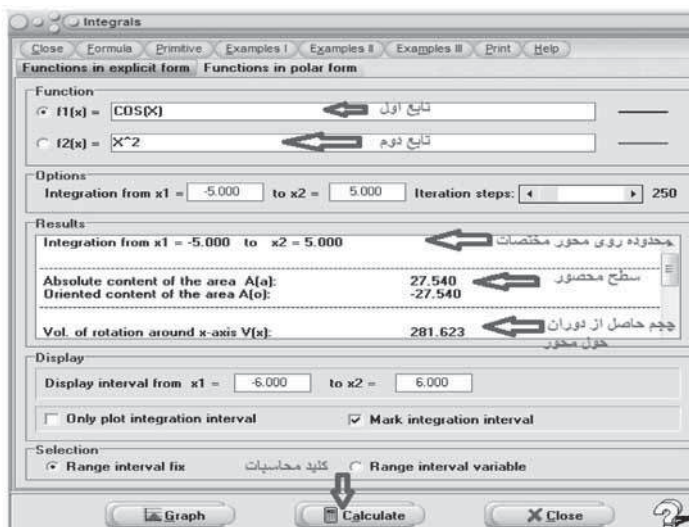
به عنوان مثال: برای تابع $f(x) = \sin(x)$ ، با انتخاب گزینه Graph، شکل روبه رو نمایان خواهد شد.

توسعه تکنولوژی، تأثیر شگرفی بر آموزش داشته است که از آن جمله، می توان به متحول شدن معنا و مفهوم رسانه های آموزشی اشاره نمود. تکنولوژی، «دست نیافتنی ها» را دسترس قرار داده و انتخاب مناسب ترین منابع را به عهده استفاده کننده گذاشته است. اما برای این کار، توسعه مهارت های انتخاب گری و تصمیم گیری در کاربران، برای بهره بردن از تکنولوژی، لازم است. بدین سبب، آشنایی با سایت های آموزشی مناسب و رایگان که بتوانند در حالی که بخشی از نیازهای آموزشی معلمان و دانش آموزان را برآورده می کنند، از صرف هزینه های غیر ضروری هم بازشان دارند، مفیدند. بدین منظور، یکی از معلمان محترم ریاضی و خوانندگان مجله، سایت Math-Prof.com را معرفی نموده است. ضمن سپاس از این همکار گرامی، دعوت می کنیم که برای کنجکاوی هم که شده، به این سایت سری بزنید! در این سایت، ۲۹۵ درس نامه در قالب ۱۱ حوزه مختلف ریاضی ارائه شده است که به تناسب نیاز، قابل استفاده برای درس های ریاضی مدرسه ای هستند.

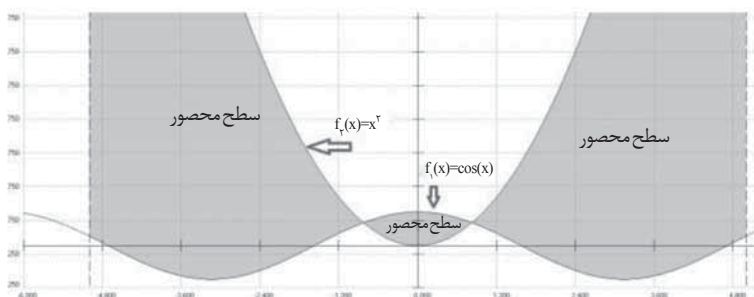
سردبیر

پیشرفت های دو دهه اخیر در علوم رایانه، نقش غیر قابل انکاری در فراهم آوردن زمینه لازم برای اجرایی کردن نظریه های یادگیری سازنده گرا داشته است. یکی از شاخه های تکنولوژی آموزشی، بعد ابزاری یا سخت افزاری آن است. در این دیدگاه، علم تکنولوژی آموزشی به مجموعه ابزارها و تجهیزاتی اطلاق می گردد که سبب تسهیل فرایند یادگیری می شود. طبعاً، نرم افزارهای کاربردی آموزشی نیز به عنوان یکی از ابزارهای این حیطه، نقش به سزایی در تعمیق دانسته ها ایفا می نمایند. در اینجا، به معرفی یکی از نرم افزارهای ریاضی پر کاربرد و در عین حال آسان جهت استفاده کاربران هنگام آموزش، می پردازیم.

را در پنجره باز شده معرفی نمایید. به عنوان مثال برای دو تابع $f_1(x)=\cos(x)$, $f_2(x)=x^2$ داریم:

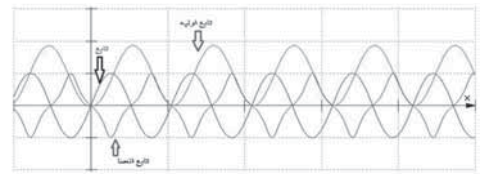
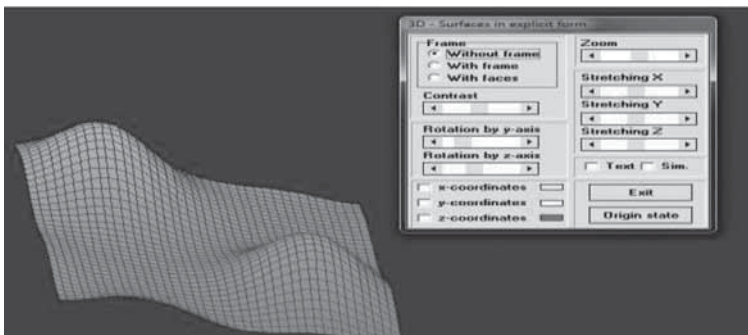


با فشردن کلید Graph، شکل توابع را نیز خواهیم داشت.



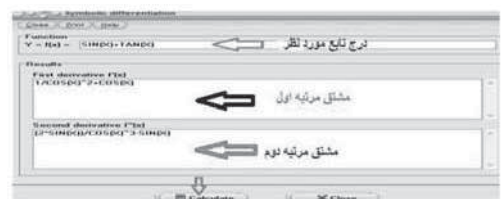
ریاضیات سه بعدی:

یکی از جذاب ترین مباحث موضوعی ریاضیات، اشکال سه بعدی و خصوصیات مربوط به آن ها می باشد. با استفاده از منوی 3D-mathematics و یا ابزارهای مربوطه  در نوار ابزار، امکان محاسبه و نمایش انتگرال توابع به فرم صریح و پارامتری، رویه ها و منحنی های سه بعدی، رویه های مرتبه دوم و توابع ضمنی و ... فراهم شده است.

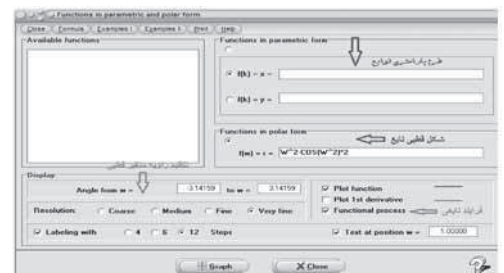


با انتخاب گزینه Determination و تعریف تابع مورد نظر در پنجره باز شده، می توان تابع مشتق مرتبه اول و دوم تابع را نیز محاسبه و مشاهده نمود.

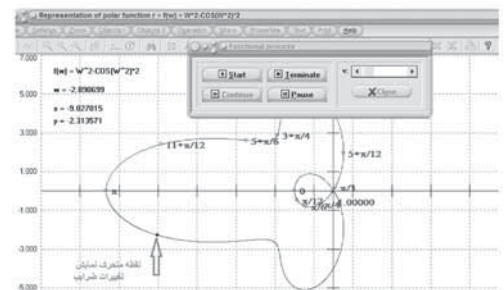
$$f(x)=\sin(x)+\tan(x)$$



جهت آنالیز توابع قطبی یا پارامتری، می توان از ابزار  استفاده نمود. در این قسمت با فعال نمودن گزینه Functional process، تغییرات متغیر قطبی براساس تغییرات ضرایب X و Y قابل نمایش خواهد بود.



نرم افزار شامل مثال های از پیش تعریف شده نیز می باشد که در صورت نیاز می توان از لیست توابع ذخیره شده انتخاب کرد، همچنین قابلیت ذخیره سازی توابع برای کاربر نیز فراهم است تا هنگام استفاده مجدد، به راحتی بتوان از آن ها استفاده نمود.



مثال کاربردی

جهت محاسبه و نمایش سطح محصور بین دو تابع و حجم حاصل از دوران حول محورهای مختصات، کافی است گزینه Intergrals را از تب Analysis و یا ابزار  را از نوار ابزار انتخاب نموده و توابع مورد نظر

توابع مثلثاتی

درس نامه‌ای از وبگاه Math-prof.com

در دنیای جدید، معنای «کمک آموزشی»، تغییرات اساسی یافته است. فناوری اطلاعات و ارتباطات، دسترسی به منابع را تسهیل نموده است. در نتیجه، با اندکی مطالعه و تغییر دیدگاه، می‌توان برای بدیل‌های خلاق، مؤثر، کم‌هزینه و با سهولت به منابع کمکی، امکان‌سنجی نمود. برای این شماره، یکی از معلمان عزیز ریاضی سرکار خانم مریم شاه‌محمدی، نرم‌افزار و سایتی را به نام Math-prof.com معرفی نمودند که ما را با دنیای وسیعی از درس‌نامه‌های ریاضی آشنا کرد.

تا سال ۲۰۰۸، این سایت، ۲۹۵ فصل ریاضی را با نمایه‌های موضوعی در دسته‌های وسیع‌تر، معرفی کرده و آموزش داده است. برای معرفی این سایت که قابل دسترس و مجانی است و استفاده از آن، به دانش زبان انگلیسی بالایی جز واژگان تخصصی هر حوزه، نیازی ندارد. آقای مسعود بهرامی بیدکلمه، بخش‌هایی از فصل مثلثات این وبگاه را ترجمه کرده است.

فصل مثلثات این سایت، شامل ۱۸ بخش است و شروع آن، با هندسه (رویکرد تلفیقی) و معرفی نسبت‌های مثلثاتی از این طریق است. سپس با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه، به سینوس و کسینوس پرداخته و به تدریج، وارد رسم نمودارهای تابع‌های مثلثاتی شده است. بعداً، با اشاره به انتقال، رادیان به عنوان یکی از اندازه‌های زاویه مطرح شده است و نشان داده که چگونه به تدریج، وارد نمادهای مختصات قطبی، معادلات مثلثاتی به صورت قطبی، اتحادهای مثلثاتی، اتحادهای اساسی، فرمول‌های نصف زاویه و دو برابر زاویه، اعداد موهومی، اعداد مختلط و مساحت پنج‌ضلعی شده است.

نکته مهم در این درس‌نامه‌ها این است که با پایه‌ای‌ترین مفهومی‌ها – در اینجا زاویه – شروع شده، به مرور با سرعت مناسب، مفهومی‌ها توسعه پیدا کرده، مثال‌های مربوط آورده شده، از نمودار به خوبی استفاده شده و ارتباط مثلثات با مباحث مختلف ریاضی، با تأنی لازم، نشان داده شده است.

هر یک از درس‌نامه‌های این سایت، می‌تواند دانش‌آموزان را از خریدن کتاب‌های متعدد موضوعی که گاهی می‌تواند حتی باعث سردرگمی آن‌ها شود، بی‌نیاز کند. در هر صورت بد نیست معلمان عزیز ریاضی به این وبگاه سر بزنند و برای کلاس درس خود، درس‌نامه‌های مناسب با نیاز تدریس خود را انتخاب کنند و به صلاحدید خود، آن را به دانش‌آموزان نیز معرفی کنند. این شما و این بخشی از درس‌نامه مثلثات این سایت!

سر دبیر

مروری بر فصل مثلثات

بنابر ساده‌ترین تعریف، تابع‌های مثلثاتی تابع‌هایی هستند که رابطه بین یکی از زاویه‌های غیرقائمه یک مثلث قائم‌الزاویه را با نسبت دو ضلع آن مثلث بیان می‌کنند (و یا برعکس). به این ترتیب، هر تابع مثلثاتی، مانند f ، همواره در یکی از تساوی‌های زیر صدق می‌کند:

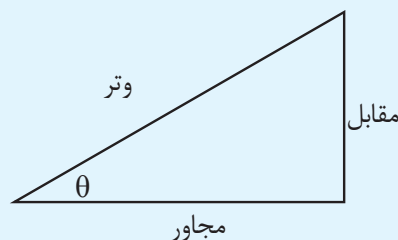
$$f(q) = \frac{a}{b} \quad (۱)$$

یا

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = q \quad (۲)$$

که در آن q اندازه یکی از زاویه‌های مثلث و a و b طول دو ضلع مثلث هستند. این به معنی آن است که:

- اگر رابطه (۱) برقرار باشد، در هر مثلث قائم‌الزاویه با دانستن مقدار هر یک از زاویه‌های غیرقائمه، با محاسبه مقدار تابع مثلثاتی به ازای آن زاویه، نسبت دو ضلع آن مثلث به‌دست خواهد آمد.
- در صورتی که رابطه (۲) برقرار باشد، می‌توانیم نسبت طول دو ضلع هر مثلث قائم‌الزاویه به یکدیگر را بیابیم و با محاسبه مقدار تابع مثلثاتی به ازای این نسبت، اندازه یکی از زاویه‌های غیرقائمه آن مثلث به‌دست خواهد آمد (چنین تابع‌هایی، تابع‌های مثلثاتی معکوس نامیده می‌شوند، زیرا عملکرد آن‌ها عکس تابع‌های قبلی است). رابطه بین زاویه‌های یک مثلث قائم‌الزاویه و نسبت دو ضلع آن از مهم‌ترین عناصر در بحث مثلثات است. با توجه به اینکه روابط مثلثاتی در همه مثلث‌های قائم‌الزاویه برقرارند، اگر اندازه یکی از زاویه‌های غیرقائمه یک مثلث قائم‌الزاویه را بدانیم، می‌توانیم نسبت اضلاع آن مثلث را با استفاده از تابع‌های مثلثاتی بیابیم و اگر نسبت اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه را بدانیم، می‌توانیم با استفاده از تابع‌های مثلثاتی معکوس، اندازه زاویه‌های آن را به‌دست آوریم. مهم‌تر اینکه اگر اندازه یکی از زاویه‌ها را بدانیم، می‌توانیم نسبت دو ضلع مثلث را با استفاده از تابع‌های مثلثاتی به‌دست آوریم؛ همچنین، با در اختیار داشتن اندازه یکی از اضلاع می‌توانیم با استفاده از روش جبری اندازه ضلع دیگر را نیز مشخص کنیم (به‌عنوان مثال اگر مشخص شود که $\frac{a}{b} = ۲$ و بدانیم که $a = ۶$ آنگاه نتیجه می‌گیریم که $b = ۳$). از آنجا که در هر مثلث قائم‌الزاویه، سه ضلع و دو زاویه غیرقائمه وجود دارد، باید روشی در اختیار داشته باشیم که مشخص کند هر تابع مثلثاتی رابطه بین کدام زاویه را با کدام ضلع‌ها بیان می‌کند (اینکه بدانیم نسبت دو ضلع برابر با ۲ است، اما ندانیم درباره نسبت کدام یک از سه ضلع صحبت می‌کنیم، چندان مفید نیست. به‌همین ترتیب، اگر بدانیم اندازه یکی از زاویه‌ها ۴۰ درجه است، باید بدانیم منظور کدام زاویه است). مطابق قرارداد، اگر زاویه مورد نظر را مطابق شکل زیر با θ (تتا) نشان دهیم، اضلاع مثلث را به‌صورت زیر «ضلع مجاور»، «ضلع مقابل» و «وتر» می‌نامیم:



همان‌طور که پیشتر نیز اشاره شد، تابع‌های مثلثاتی نوع (۱) که به هر زاویه نسبت دو ضلع را اختصاص می‌دهند، همواره در چنین رابطه‌ای صدق می‌کنند:

$$f(q) = \frac{a}{b}$$

از آنجا که به ازای هر زاویه، ۳ راه برای انتخاب صورت این کسر و ۳ راه برای انتخاب مخرج آن وجود دارد، می‌توانیم ۹ تابع مثلثاتی به صورت زیر داشته باشیم:

$f(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مقابل}}$	$f(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$	$f(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$
$f(q) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$	$f(q) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مجاور}}$	$f(q) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$
$f(q) = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}}$	$f(q) = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}}$	$f(q) = \frac{\text{وتر}}{\text{وتر}}$

از این توابع سه تابع که نشانگر نسبت یک ضلع به خودش هستند، و در قطر جدول فوق آمده‌اند، همواره برابر با ۱ هستند و هیچ استفاده‌ای برای ما ندارند. پس آن‌ها را نادیده می‌گیریم و به ۶ تابع باقی‌مانده اسامی زیر را نسبت می‌دهیم:

$\text{sine}(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$	$\text{cosecant}(q) = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}}$
$\text{cosine}(q) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$	$\text{secant}(q) = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}}$
$\text{tangent}(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$	$\text{cotangent}(q) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$

علاوه بر این، اسامی این تابع‌ها معمولاً به اختصار به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\text{sine} = \sin$$

$$\text{cosecant} = \text{csc}$$

$$\text{cosine} = \cos$$

$$\text{secant} = \sec$$

$$\text{tangent} = \tan$$

$$\text{cotangent} = \cot$$

از این شش تابع دو تابع اصلی که باید آن‌ها را به‌خاطر بسپاریم سینوس و کسینوس هستند. سایر تابع‌های مثلثاتی نوع اول را می‌توان از این دو تابع استخراج کرد.

به‌عنوان مثال تابع‌های ستون سمت راست جدول قبل، معکوس ضربی تابع‌های ستون سمت چپ آن جدول هستند. علاوه بر این،

$$\frac{\sin(q)}{\cos(q)} = \frac{\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}}{\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \tan(q)$$

و به این ترتیب، تابع تانژانت، حاصل تقسیم سینوس بر کسینوس است.

$\sin(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$	$\text{csc}(q) = \frac{1}{\sin(q)}$
$\cos(q) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$	$\text{sec}(q) = \frac{1}{\cos(q)}$
$\tan(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$	$\text{cot}(q) = \frac{1}{\tan(q)}$

با بررسی بیشتر این تابع‌ها می‌بینید که به ازای سه تابع سینوس، کسینوس و تانژانت سه تابع دیگر وجود دارند که نام آن‌ها با افزودن پیشوند co به نام این تابع‌ها به دست آمده است. این تابع‌ها معکوس ضریبی تابع‌های سینوس، کسینوس و تانژانت هستند. اما برای این نامگذاری توجیهی وجود دارد؛ این تابع‌ها در واقع برابر با سینوس، سکانت یا تانژانت زاویه‌ای هستند که متمم زاویه نظیر آن‌هاست و با توجه به اینکه متمم هر زاویه مانند q برابر با $90 - q$ است، می‌توان نشان داد که روابط زیر برقرارند:

$$\sin(90 - q) = \cos(q)$$

$$\sec(90 - q) = \csc(q)$$

$$\tan(90 - q) = \cot(q)$$

که این شیوه نامگذاری را توجیه می‌کند.

بسته به انتخاب واحدهای متفاوتی نظیر درجه، گراد و رادیان، تابع‌های مثلثاتی مقادیر متفاوتی را اختیار می‌کنند
به عنوان مثال:

$$\sin(90^\circ) = 1$$

ولی اگر q بر حسب رادیان بیان شده باشد

$$\sin(90) = 0.89399...$$

تابع‌های مثلثاتی معکوس

تابع‌های مثلثاتی نوع (۱) را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$f(q) = \frac{a}{b}$$

که در آن q یکی از زاویه‌های غیر قائمه و $\frac{a}{b}$ نسبت دو ضلع از اضلاع مثلث است. با توجه به این مطلب، می‌توانیم عکس این کار را هم انجام دهیم و تابع‌هایی را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = q$$

$\arcsin \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = q$	$\operatorname{arccosecant} \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}} = q$
$\arccosine \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = q$	$\operatorname{arcsecant} \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}} = q$
$\arctangent \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = q$	$\operatorname{arccotangent} \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = q$

که ورودی آن‌ها نسبت دو ضلع مثلث و خروجی آن‌ها اندازه یکی از زاویه‌هاست. این تابع‌ها به صورت زیر نامگذاری می‌شوند:

شبهه به حالت قبلی برای نمایش این توابع از نمادهای اختصاری زیر استفاده می‌شود:

$$\arcsine = \arcsin$$

$$\operatorname{arccosecant} = \operatorname{arccsc}$$

$$\arccosine = \arccos$$

$$\operatorname{arcsecant} = \operatorname{arcsec}$$

$$\arctangent = \arctan$$

$$\operatorname{arccotangent} = \operatorname{arccot}$$

با توجه به نمایش استاندارد معکوس توابع، یعنی f^{-1} ، ممکن است با نمایش توابع مثلثاتی معکوس، به صورت

زیر نیز مواجه شویم:

$$\sin^{-1}, \cos^{-1}, \sec^{-1}, \csc^{-1}, \tan^{-1}, \cot^{-1}$$

توجه: برای نمایش مربع توابع مثلثاتی بیش از یک نمایش وجود دارد. به عنوان مثال $(\sin \theta)^2$ به صورت $\sin^2 \theta$ نیز نمایش داده می‌شود. این ممکن است سبب ایجاد این ابهام شود:

$$\tan^{-1}\theta = (\tan \theta)^{-1}$$

که صحیح نیست. نمای منفی در این مورد یک حالت خاص است که به وارون ضربی دلالت نمی‌کند بلکه نشان‌دهنده تابع وارون است.

مقادیر توابع مثلثاتی بر حسب واحدهای متفاوت اندازه‌گیری

توابع مثلثاتی بر حسب واحدهای اندازه‌گیری متفاوت، مقادیر متفاوتی را به زاویه‌ها نسبت می‌دهند. به عنوان مثال $\sin 90^\circ = 1$ در حالی که اگر واحد اندازه‌گیری رادیان باشد، $\sin 90^\circ = 0.89399\dots$. اگر بعد از عدد نظیر اندازه زاویه، علامت $^\circ$ باشد، در اختصاص مقادیر به نسبت‌های مثلثاتی واحد اندازه‌گیری زاویه، درجه در نظر گرفته خواهد شد. اگر پس از عدد نظیر اندازه زاویه هیچ واحدی ذکر نشده باشد، در اختصاص مقدار به نسبت‌های مثلثاتی، زاویه بر حسب رادیان در نظر گرفته می‌شود. دلیل اینکه در بیان زاویه‌ها بر حسب رادیان از ذکر واحد خودداری می‌شود این است که در اندازه‌گیری بزرگی زاویه‌ها به این صورت، رادیان واحدی طبیعی به حساب می‌آید. برای این مطلب در حساب دیفرانسیل و انتگرال توجیه‌هایی ارائه می‌شود. یکی از دلایل این مطلب این است که بیان مساحت قطاع‌های دایره، زمانی که زاویه بر حسب رادیان بیان شود ساده‌تر است.

در بسیاری از ماشین حساب‌ها، سه حالت درجه، گراد و رادیان با هم وجود دارد. این بسیار مهم است که در جریان محاسبه مقادیر تابع‌های مثلثاتی، ماشین حساب را در حالت درست قرار دهیم. چرا که این کار به ما می‌گوید که ماشین حساب در محاسبه مقادیر مثلثاتی چه واحدی را برای اندازه‌گیری زاویه‌ها مبنا قرار می‌دهد. به عنوان مثال، اگر ماشین حساب در حالت درجه قرار داشته باشد، برای $\sin 90^\circ$ مقدار ۱ را به عنوان خروجی در اختیار ما می‌گذارد. در حالی که اگر در حالت رادیان تنظیم شده باشد، خروجی آن به صورت $0.89399\dots$ خواهد بود. عدم تنظیم درست تنظیمات ماشین حساب یکی از اشتباه‌های رایج در میان کسانی است که با این مفاهیم تازه آشنا شده‌اند؛ به خصوص کسانی که فقط با واحد درجه آشنایی دارند بیشتر این اشتباه را مرتکب می‌شوند. برای بیان سازگاری مقادیر متفاوتی که با انتخاب واحدهای متفاوت به دست می‌آید، می‌توانیم نماد درجه را چنین تعریف کنیم که این نماد برابر با $\pi/180$ است. به این ترتیب $\sin 90^\circ$ در واقع بیان دیگری برای اشاره به سینوس زاویه است که باید مقدار آن را بر حسب رادیان در نظر بگیریم. به این ترتیب:

$$\sin 90^\circ = 1 = \sin 90 \cdot \frac{\pi}{180} = \sin \frac{\pi}{2}$$

با استفاده از این روش می‌توان مقادیر توابع مثلثاتی را بر حسب رادیان محاسبه کرد. این کار شبیه همان کاری است که در تعریف نماد درصد به عنوان کسر $\frac{1}{100}$ انجام می‌دهیم تا بتوانیم درصد‌های متفاوت را در قالب کسرها نمایش دهیم. به عنوان مثال 50% درصد در این روش به صورت کسر

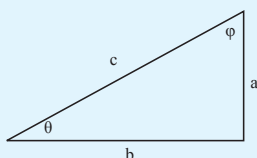
$$50\% = 50 \times \frac{1}{100} = \frac{1}{2}$$

نمایش داده می‌شود.

اختصاص نام به ضلع‌ها

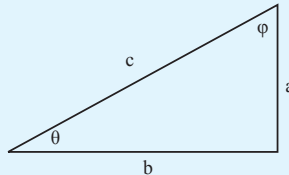
از آنجایی که در هر مثلث قائم‌الزاویه، سه ضلع و دو زاویه حاده وجود دارد، در جریان کار با تابع‌های مثلثاتی نیازمند روشی هستیم که براساس آن بدانیم چه ضلع‌هایی با چه زاویه‌هایی در ارتباط هستند. بدیهی است که دانستن اینکه نسبت دو ضلع برابر با ۲ است، بدون آنکه بدانیم نسبت کدام دو ضلع برابر با این عدد است، چندان مفید نخواهد بود. به همین ترتیب، اگر به این نتیجه برسیم که اندازه زاویه‌ای 40° است، باید بدانیم منظور کدام یک از زاویه‌هاست. پس به روشی برای نامگذاری اضلاع نیاز داریم.

مطابق شکل زیر مثلثی قائم‌الزاویه را در نظر بگیرید.



مثلث قائم الزاویه دو زاویه حاده دارد که یکی از آن‌ها را به عنوان زاویه مورد نظرمان در نظر می‌گیریم و آن را با θ نمایش می‌دهیم. به این ترتیب می‌توانیم سه ضلع مثلث را به صورتی منحصر به فرد با توجه به این زاویه نامگذاری کنیم. همان طور که در شکل فوق دیده می‌شود، اینکه θ کدام زاویه باشد، در نامگذاری ما مؤثر است. سه ضلع را مطابق الگوی زیر نامگذاری می‌کنیم. ضلع روبروی زاویه قائمه را وتر می‌نامیم. این نامگذاری به انتخاب θ بستگی ندارد اما نامگذاری دو ضلع دیگر به این موضوع وابسته است. برای اشاره به دو ضلع دیگر از اصطلاحهای ضلع مجاور و ضلع مقابل استفاده می‌کنیم. از میان دو ضلع باقی‌مانده آن که یکی از اضلاع θ است، ضلع مجاور نامیده می‌شود و تنها ضلعی که تاکنون نامگذاری نشده ضلع مقابل نامیده می‌شود.

اتحادهای مثلثاتی



$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\csc(-\theta) = -\csc(\theta)$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\sec(-\theta) = \sec(\theta)$$

$$\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$$

$$\cot(-\theta) = -\cot(\theta)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = (\tan x \pm \tan y) / (1 \mp \tan x \tan y)$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x)$$

$$\tan(2x) = 2 \tan(x) / (1 - \tan^2(x))$$

$$\sin^2(x) = 1/2 - 1/2 \cos(2x)$$

$$\cos^2(x) = 1/2 + 1/2 \cos(2x)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin((x-y)/2) \cos((x+y)/2)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin((x-y)/2) \sin((x+y)/2)$$

$\sin \theta = \frac{a}{c}$	$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{c}{a}$
$\cos \theta = \frac{b}{c}$	$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{c}{b}$
$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{a}{b}$	$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{b}{a}$

مثلث را با اضلاع a و b و c زاویه‌های A و B و C در نظر بگیرید. در این صورت

$$a / \sin(A) = b / \sin(B) = c / \sin(C)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(C)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(B)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(A)$$

9

همچنین

$$(a-b)/(a+b) = \tan[(A-B)/2] / \tan[(A+B)/2]$$

از خوانندگان عزیز دعوت می‌شود که برای مشاهده سایر بخش‌های مرتبط با این فصل و سایر فصل‌ها به این سایت مراجعه کنند.

مظنونان همیشه!

اشرف صفابخش چکوسری، دانشجوی کارشناسی ارشد
آموزش ریاضی دانشگاه شهید رجایی تهران و دبیر ریاضی
راهنمایی شهرستان صومعه سرا (استان گیلان)

است که در نظام آموزشی، هدف از رفتن به مدرسه را برای آن‌ها روشن و برجسته کرده باشیم. از سویی، بیشتر آنان از طرف پدر یا مادر هم مورد بازخواست قرار می‌گیرند، چون شاید آن‌گونه که کلمنتس و التون (۱۹۹۶) به درستی بیان کرده‌اند، در بسیاری از خانواده‌های شرقی، نمره‌ای که فرزندان در آزمون‌های کتبی می‌گیرند، مایه غرور و مباهات و عامل رقابت بین خانواده‌هاست.^۱ به نظر می‌رسد آن‌چه در این میان قربانی می‌شود، فرصت درک و فهم دروسی هم‌چون ریاضی، فرصت درک زیبایی‌های آن‌ها و فرصت دوست داشتن آن‌هاست.

از این روست که هدف از درس خواندن برای دسته‌ای از دانش‌آموزان، معادل است با گرفتن نمره ۲۰، و در مقابل، برای دسته‌ای دیگر که در آن سر طیف قرار دارند، به معنای گرفتن حداقل نمره قبولی است. اگر هم از درسی نمره‌ای پایین بگیرند، به نظرشان این معلم است که حق آن‌ها را پایمال کرده و البته درس ریاضی در این میدان جلودار و بی‌رقیب است. حتی نام «ریاضی» هم برای بیشتر دانش‌آموزان، اضطراب زاست! ظاهراً در پیدایش این احساس نسبت به ریاضی، نه والدین نقشی دارند - که بسیاری‌شان با تأکید بر نمره و برنامه‌ریزی کلاس‌های خصوصی و نیمه‌خصوصی گوناگون، به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم فرزندان خود را از درس بیزار کرده و اضطراب نمره بیست یا بی‌تفاوتی مطلق را در آن‌ها پرورانده‌اند - و نه اکثریت غالب اولیای مدرسه که آن‌ها هم معمولاً تنها انتظاری که دارند، بیشتر و بیشتر شدن آمار قبولی دانش‌آموزان و میانگین نمره‌های آن‌هاست. حتی برای این منظور در برخی مدارس، از تمهیداتی چون زیر فشار گذاشتن معلم

سال تحصیلی آغاز می‌شود! با انرژی و با سری پر از ایده‌های نو به کلاس می‌روی با خود می‌گویی، امسال کاری می‌کنم که همه چیز متفاوت باشد. فکر می‌کنی مهم نیست چه ناملایماتی دیده‌ای، سالی دیگر آغاز شده است. چشم‌ها را می‌شویی و می‌خواهی همه چیز را طوری دیگر ببینی!

می‌خواهی چشمان دانش‌آموزان را به دنیای تازه‌ای باز کنی و علاقه‌ات چنان است که هر گاه دانش‌آموزی از سر توجه و علاقه سؤالی می‌پرسد و تو با اشتیاق پاسخ می‌دهی، همان‌دم احساس می‌کنی پاسخ را گرفته و خوشنود است؛ انگار همه کوشش‌هایت را پاداش داده‌اند. ولی متأسفانه تلاش تو هر چه باشد، آن‌چه تو را با آن خواهند سنجید، همان عددی است که به عنوان نمره در کارنامه دانش‌آموز یا روی برگه امتحانی‌اش درج می‌گردد. آن وقت است که رأی نهایی صادر می‌شود؛ اینکه تو معلم خوبی بوده‌ای یا نه! در آن لحظه است که درمی‌یابی انگشت‌های اتهام از سوی کسانی به‌سوییت دراز می‌شود که نمی‌دانند و شاید هم نخواسته‌اند بدانند که تو چه تلاشی کرده‌ای، چه زمانی صرف کرده‌ای و چه انرژی‌ای به پای کلاس‌ات ریخته‌ای! «نمره‌های پایین بچه‌ها در امتحان، نتیجه کم‌کاری توست!»

طبیعی است که چنین سطحی‌نگریستن، بدان‌جا بینجامد که این روزها شنیدن جملاتی نظیر «فلان معلم تجدید کرد!» یا «فلان معلم به من نمره نداد!» پس از نتایج امتحان‌ها، به امری عادی تبدیل شود و ساده‌ترین توجیه برای کم‌کاری دانش‌آموزانی گردد که شاید تقصیری هم متوجه‌شان نیست؛ چون به‌ندرت اتفاق افتاده

برای بذل و بخشش نمره گرفته تا گنجاندن کلاس‌های جبرانی ریاضی بعد از پایان یافتن ساعات مدرسه و در اوج خستگی معلم و دانش‌آموز، فروگذار نمی‌شود. در پیدایش این ترس از ریاضی، مسئولیتی نیز متوجه آن دسته از والدین و مربیانی است که ترس و نفرت خود را از ریاضی، بی‌آنکه بدانند و بخواهند، به دانش‌آموزان منتقل می‌کنند، یا متوجه نظام آموزشی است که عملکرد آن نسب به پاره‌ای مسائل آموزشی، تناقض‌ها و ناهمگونی‌هایی در آن احساس می‌شود. به نظر می‌رسد کسی که به‌طور معمول باید جور همه این کوتاهی‌ها را به دوش بکشد، کسی نیست جز معلم ریاضی، مظلون همیشگی!

شاید نیازی به بیان فواید نقد کردن نباشد؛ چون هیچ کس نیست که بی‌عیب و نقص باشد. به یقین نقدهایی به کار معلمان ریاضی وارد است، ولی باید دانست که نقد کردن آدابی دارد و اگر قرار است چیزی، کسی یا فرایندی را نقد کنیم، در گام نخست، باید دانش و آگاهی کافی درباره موضوع مورد نقد داشته باشیم. اینکه چشم‌ها را به روی همه واقعیت‌هایی که پرداختن به آن‌ها مستلزم صرف کوشش، وقت و هزینه است، ببندیم و یک نفر را پیدا کنیم که مسئولیت همه کوتاهی‌ها و کاستی‌ها را به گردن او بیندازیم، هر چیزی می‌تواند باشد جز «نقد». گاهی این نگاه‌ها و نقدهای غیرمنصفانه و انتظارات نابجا، چنان است که فکر می‌کنم مسئولان آموزشی، گرایش دارند که به جای جست‌وجوی ایراد کار نظام آموزشی، دنبال یک مقصر باشند و البته هر کس که دیوارش کوتاه‌تر باشد، گزینه بهتری است؛ و این روزها در نظام آموزشی‌مان، دیواری کوتاه‌تر از دیوار معلم ندیده‌ام!

معلمان تلاشگر بسیاری هستند که به مطلق بودن نمره باور ندارند، چرا که هر معلم آگاهی می‌داند که به دلایل گوناگون، بسیاری از دانش‌آموزان، تا وقتی پای نمره و امتحان در میان نیست، عملکرد خوبی دارند. ولی در عمل، معلم از حداقل اختیار در نظام آموزشی برخوردار است. به نظر من و برخی از همکارانم، برنامه امتحانی، برنامه‌ای است تجویز شده که معلم صرفاً موظف به اجرای آن است. پیش از برگزاری آزمون هر نوبت، یک «بارم بندی پیشنهادی!» که در واقع معلم معمولاً «ملزم» به پیروی از آن است، به او می‌گوید که چگونه و به چه مقدار از هر بخش کتاب، سؤال طرح کند. در این میان، از یک سو، شیوه طراحی سؤالات توسط معلم، باید براساس الگویی تعیین شده باشد و او «موظف» است ریزبارم سؤالات را به‌طور دقیق و جزئی برای هر پرسش یا مسئله ارائه دهد و از سوی دیگر، از او می‌خواهند که برگه‌ها را «با اغماض» تصحیح

کند! به‌علاوه، همان‌گونه که می‌دانیم، یک نمره مستمر یا تکوینی هم، باید به فعالیت‌های مستمر دانش‌آموز در کلاس تعلق گیرد و روند یادگیری او را به‌طور پیوسته مورد ارزیابی قرار دهد، در حالی که برخی از مسئولان آموزشی بر این باورند که کارکرد نمره مستمر، جبران کردن نمره پایانی است و با چنین باوری، تلاش معلم و دانش‌آموز را در طول سه ماه، نادیده می‌انگارند. گویا فراموش کرده‌اند که قرار بوده است ارزیابی‌ها دیگر «نمره محور» نباشد. شاید حق با آن‌ها باشد، چون در طرف دیگر میزان تأثیر «معدل دبیرستان» در آزمون ورودی دانشگاه‌ها مورد بحث قرار می‌گیرد! در چنین شرایطی که نظام آموزشی در جایی بین رفتارگرایی، ساخت‌وسازگرایی و برداشت‌های سلیقه‌ای برخی از مدیران آموزشی‌اش معلق است، یک معلم هر قدر هم که تلاش کند، باز این ناهم‌سویی، انرژی فراوانی از او خواهد گرفت.

براساس اصل ارزشیابی، از اصول شش‌گانه شورای ملی معلمان ریاضی امریکا^۳ (NCTM)، ارزشیابی باید در جهت اصلاح یادگیری باشد. در حالی که شیوه ارزشیابی نظام آموزشی ما به گونه‌ای است که در برخی مواقع، حتی به روند یادگیری آسیب می‌رساند. سؤالات کلیشه‌ای، دانش‌آموزان و نیز بسیاری از معلمان را به این سو سوق داده است که به تکرار و تمرین برخی رویه‌های «کاربردی‌تر» بپردازند؛ نتیجه آنکه درک و فهم عمیق ریاضیات در این میان، قربانی شده است. وانگهی، یکی از عواملی که از ریاضیات مدرسه‌ای، غولی ترسناک ساخته، همین شیوه آزمون‌گیری نادرست است.

نکته دیگر اینکه، به نظر می‌رسد نظام آموزشی ما، بین کار معلمان رشته‌های مختلف، تفاوت چندانی قائل نیست. این در حالی است که هر شاخه‌ای از درس، تعریف خاص خود را دارد و مسائل مربوط به هر شاخه درسی، از شاخه‌های دیگر متفاوت است. کمتر موضوعی به اندازه ریاضیات به‌طور همزمان، با موانعی هم‌چون مشکل دانش‌آموزان در فهم درس (چون نظام یادگیری ما متکی بر محفوظات و تکرار و تمرین است)، بی‌رغبتی دانش‌آموزان، پیش‌داوری منفی در برابر درس، حساسیت خانواده بر روی نمره درس، عدم تناسب حجم درس‌ها با زمان اختصاص داده شده^۴ و نظایر آن، مواجه است. این در حالی است که معیار عملی سنجش کیفیت کار معلمان که همان درصد قبولی آن‌ها در دروس مربوط به اوست، برای ارزیابی بازده کار همه معلمان، بدون توجه به موضوعی که تدریس می‌کنند، به‌طور یکسان به کار می‌رود. این شیوه برخورد نیز خود می‌تواند، موجب بی‌تفاوتی یا بی‌انگیزه

شدن معلمان ریاضی گردد.

در این میان، اگر معلمی نخواهد بی تفاوتی پیشه کند و با همه کاستی‌ها باز هم تلاش کند تا مؤثر باشد و اگر نخواهد با چسباندن نمره‌های «خوب» به یک برگه که اسمش کارنامه است، مسئولیت آموختن دانش‌آموزان را از سرش باز کند، آن وقت باید منتظر انتقادهایی شاید غیرکارشناسانه از سوی افرادی، غالباً بیرون از حوزه آموزش ریاضی باشد. در شرایطی که در آن «بهترین راه حل برای مشکلات آموزشی، همان است که کم‌زحمت‌تر و از لحاظ مالی کم‌هزینه‌تر است»، و در نظام آموزشی‌ای که ارزشیابی به جای آنکه جزئی از فرایند تدریس انگاشته شود، معیاری است برای ارزش‌گذاری روی کار معلم و دانش‌آموز، این بهایی است که معلم، برای پای‌بندی به اصول حرفه‌اش باید بپردازد.

معلم ریاضی قاعداً کسی است که با فرایند یادگیری و یاددهی ریاضیات آشنا و با آن درگیر است. کسی است که شاید به اندازه یک عضو هیئت علمی دانشگاه، تحصیلات آکادمیک نداشته باشد، ولی تجربه تدریس در کلاس‌های ریاضی واقعی و برخورد نزدیک با دانش‌آموزان را داراست؛ کسی است که می‌تواند درباره سطح درک دانش‌آموزان پایه‌های مختلف در مدارس و مناطق گوناگون، تا اندازه زیادی صاحب نظر و صاحب عقیده باشد. مجری تدریس کتاب درسی ریاضی و موظف به اجرای زمان‌بندی تدریس است و بنابراین، می‌تواند کتابی را که خود درس می‌دهد نقد کند. با وجود همه این‌ها، کسی است که نظر او، کمترین نقش را در تعیین سرفصل‌های کتاب‌های درسی و تألیف و زمان‌بندی اجرای تدریس آن‌ها داراست! حال، آیا دور از انصاف نیست همین کسی که نقش او در فرایند تولید و تهیه مواد آموزشی، در تعیین زمان لازم برای تدریس و در تعیین چگونگی ارزشیابی چندان جدی و برجسته نیست، مسئول تبعات منفی تصمیم‌های آموزشی دانسته شود؟ متأسفانه در نظام آموزشی ما، از این قبیل تضادها کم نیست.

با همه آنچه عنوان گردید، هدف این نوشتار آن نیست که معلمان ریاضی را به دور از هر نوع کوتاهی و لغزشی بدارد. هدف حتی این نیست که کسان دیگری را که به نوعی در تدوین برنامه‌های آموزشی دخیل‌اند، مقصر بداند. در یک نظام آموزشی، همه وجوه و اجزا باید مورد ارزیابی و تحلیل جدی و کاربردی قرار گیرند و معلم نیز به عنوان جزئی از این نظام و شاید یکی از اصلی‌ترین اجزای آن، می‌بایست همانند سایر اجزا، مورد تحلیل، انتقاد و «ارزیابی مستمر و کارشناسانه» واقع شود. ولی اگر برداشت ما از ارزیابی و انتقاد آن است که به دنبال کم‌هزینه‌ترین راه

برای یافتن ریشه‌های ناکامی‌های آموزشی و صرفاً در پی یافتن مقصر باشیم، و معلم را متهم کنیم، البته کاری از پیش نبرده‌ایم و با این کار، به همان سرمایه‌آرژنده انسانی معلم، یعنی علاقه و انگیزه نیز آسیب رسانده‌ایم.

امیدوارم روزی بیاید که مسئولان رده‌بالای آموزش و پرورش، دست‌اندرکاران امر تولید و تهیه کتاب‌های درسی، برنامه‌ریزان آموزشی، آموزشگران ریاضی و همه کسانی که به‌طور مستقیم یا غیر مستقیم در امر آموزش کودکان و نوجوانان این مرز و بوم دخیل‌اند، همسو با همدیگر و به دور از تصمیم‌گیری‌های سلیقه‌ای، در جهت بهبود کیفیت آموزش ریاضی بکوشند.

این نوشتار را با این گفته کلمنتس و التون (۱۹۹۶) که در کتاب خود^۱، از قول یک معلم ریاضی دبیرستان در آمریکا نقل کرده‌اند، و شاید بتواند مصداق آن دسته از معلمان ریاضی تلاشگری باشد که با وجود ناملایمات، همچنان با شور و علاقه به کلاس‌های درس می‌روند؛ به پایان می‌برم. آن معلم چنین گفته است:

... با این حال، وقتی در کلاس بسته می‌شود و با کلاسی جدید و با چهره‌هایی مشتاق روبه‌رو می‌شوم، باز هم تلاش خواهم کرد. برای من، این همان معنای معلم بودن است (ص ۵)

پی‌نوشت‌ها

۱. عنوان این نوشتار، از نام فیلمی ساخته برایان سینگر و با بازی کوین اسپیسبی گرفته شده است و در تلویزیون ایران، با عنوان «مظنونین همیشگی» به نمایش درآمده است.

۲. کلمنتس و التون این ادعا را به‌طور ویژه در مورد ملل آسیایی بیان کرده‌اند و کلمه Asian از نظر لغوی، بیشتر برای مللی به کار می‌رود که ما آن‌ها را «شرق دور» می‌نامیم. ولی چون این گفته کلمنتس و التون در فرهنگ ما هم صادق است، در اینجا با به کار بردن کلمه شرقی (به مفهوم مللی با فرهنگی متفاوت از ملل اروپایی) که شامل کشور خودمان هم می‌شود، گفته آن‌ها را تعمیم داده‌ام.

3. (National Council of Teachers of Mathematics)

۴. موانع ذکر شده در این پاراگراف، عواملی هستند که نویسنده به‌طور تجربی و در ضمن فعالیت تدریس و نیز در تعامل با معلمان دیگر، لمس کرده است.

5. Clements, K & Ellerton, N. (1996). **Mathematics**

Education Research: Past, Present and Future; UNESCO.



زینت طوطیان
دبیر ریاضی کاشان

ضرب حبشی

اشاره

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجله رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

رشد آموزش ریاضی

$\div 2$ $\times 2$

۱۳	۱۵
۶	۳۰
۳	۶۰
۱	۱۲۰

این کار را ادامه می‌دهند، یعنی عددهای سمت چپ را یکی بعد از دیگری نصف می‌کنند و زیر هم می‌نویسند تا به عدد یک برسند. عددهای سمت راست را هم یکی بعد از دیگری دو برابر می‌کنند و زیر هم می‌نویسند. دانش‌آموز با شنیدن توضیحات من مداد را برداشت و عددهای مسئله را در دو ستون برایم نوشت و پرسید خوب، بعد چکار می‌کنند؟ گفتم: حبشی‌ها عقیده دارند که عددهای زوج ستون چپ بدبختی می‌آورد؛ بنابراین عددهای زوج ستون چپ و عددهای روبه‌روی آن‌ها را خط می‌زنند.

مثلاً در این دو ستون عدد ۶ و عدد روبه‌روی آن یعنی ۳۰ را خط می‌زنند. بعداً در ستون راست اعداد باقی‌مانده را با هم جمع می‌کنند؛ یعنی اعداد ۱۵ و ۶۰ و ۱۲۰ را. حاصل جمع آن‌ها یعنی ۱۹۵ حاصل ضرب ۱۳ و ۱۵ می‌شود! مداد را برداشت و ۱۳ و ۱۵ را در هم ضرب کرد و دید درست است؛ جواب همان ۱۹۵ بود.

پرسید: ضرب حبشی همیشه درست درمی‌آید؟ گفتم: بله. همیشه درست درمی‌آید. اگر باور نمی‌کنی امتحان کن. او تصمیم گرفت ۳۵ را در ۲۴ ضرب کند و من رفتم تا به فعالیت دیگر گروه‌ها رسیدگی کنم.

یکی از اصولی که معلمان باید در کلاس مدنظر قرار دهند، تفاوت‌های فردی دانش‌آموزان است تا براساس آن برنامه درسی خود را طراحی کنند.

آن سال دانش‌آموزی داشتم که نسبت به بقیه دانش‌آموزان باهوش‌تر بود، مطالب را سریع یاد می‌گرفت و حوصله تمرین و تکرار برای دیگران را نداشت؛ لذا بعضی مواقع عاملی برای بی‌انضباطی می‌شد، به همین دلیل من همیشه یک نوع تمرین یا فعالیت مکمل مخصوص او داشتم که بعد از تدریس و اطمینان از یادگیری درس جدید، آن فعالیت را، که در رابطه با موضوع همان درس بود، به او می‌گفتم. در اینجا یک نمونه از فعالیت‌های مکمل را که در موضوع ضرب، در پایه چهارم، است مطرح می‌کنم.

آن روز بعد از تدریس، دانش‌آموزان مشغول تمرین روی عددهای داده شده بودند و به‌صورت گروهی مشغول کار بودند که متوجه او شدم. ته کلاس نشسته بود و داشت روی ورقه‌ای نقاشی می‌کرد. بالای سرش رفتم. به او نگاه کردم و گفتم داری چه می‌کنی؟ گفت: دارم نقاشی می‌کشم. پرسیدم: ضرب حبشی بلدی؟ گفت: ضرب حبشی؟ ضرب حبشی دیگه چه جور ضربی است؟!

گفتم: در بعضی از قبیله‌های حبشه، مردم وقتی می‌خواهند دو تا عدد را در هم ضرب کنند کاری می‌کنند که خیلی جالب است. گفت: شما از کجا می‌دانید؟ مگر به حبشه رفته‌اید؟

گفتم: نه این را از کتاب‌های مرجع یاد گرفته‌ام و بلافاصله برایش مسئله‌ای را مطرح کردم. گفتم: مثلاً آن‌ها اگر بخواهند، ببینند قیمت ۱۵ عدد مداد از قرار دانه‌ای ۱۳ تومان چقدر می‌شود باید ۱۵ را در ۱۳ ضرب کنند. آن‌ها این‌طور ضرب می‌کنند که عدد ۱۳ را در سمت چپ می‌نویسند و عدد ۱۵ را روبه‌روی آن در سمت راست، بعد عددهای سمت چپ را نصف می‌کنند و عددهای سمت راست را دو برابر می‌کنند. البته اگر حاصل تقسیم اعشاری باشد، رقم یا رقم‌های اعشار آن را حذف می‌کنند.

مثلاً در اینجا به جای عدد $6/5$ عدد ۶ را می‌نویسند و به جای $1/5$ ، عدد یک می‌نویسند؛ تا عدد صحیح به دست آید.



مترجم: محمد حسام قاسمی
کارشناس ارشد ریاضی و دبیر ریاضی شهرستان شهریار

تیزهوشی در ریاضی و خطاها: دو مفهوم کلیدی در ریاضیات دوره ابتدایی

اشاره

در ادامه ترجمه مفهومی کلیدی ریاضیات دوره ابتدایی، در این شماره ترجمه دو مفهوم تیزهوشی در ریاضی و خطاها، ارائه می‌شود.

کلیدواژه‌ها: مفهومی کلیدی ریاضیات دوره ابتدایی، تیزهوشی در ریاضی، خطاها

معرفی مفهوم تیزهوشی در ریاضی

نسبت به هم‌سن‌وسالان خود، باهوش و عاقل تشخیص داده شود»، معنایش این است که در ریاضی، تیزهوش است (ص. ۱۵۱). معلمان هم دلیل این سرآمدی را نه فقط توانایی بالای چنین دانش‌آموزانی در کسب نتایج عالی در امتحانات، قدرت حافظه بالا و مهارت اجرایی خیلی خوب آن‌ها در انجام محاسبات می‌دانند، بلکه به توانایی‌های خاص آن‌ها نیز اشاره دارند؛ توانایی‌هایی مانند، درک و فهم عالی، خلاقیت و ابتکار و تجزیه و تحلیل شگفت‌انگیز مسائل و فعالیت‌های ریاضی، که باعث برجسته و خاص بودن این دانش‌آموزان در کلاس ریاضی می‌شود.

بیان تعریفی دقیق از مفهوم تیزهوشی در ریاضی^۱، چندان کارآمد نیست، به این دلیل که برخورداری افراد از یک استعداد خاص و خدادادی در ریاضی، هنوز به‌طور علمی قابل اثبات نیست. البته ثابت شده است که شرایط ژنتیکی و وراثت می‌توانند در تیزهوش بودن یک فرد مؤثر باشند، با این حال، تعریف‌های ارائه شده در این باره، هیچ‌کدام جامع و مانع نیستند. با این وجود، هایلک (۲۰۰۴) معتقد است که «دانش‌آموزی که در یک گروه سنی خاص از جانب معلم و همکلاسی‌هایش، دانش‌آموز شاخص و سرآمد کلاس ریاضی معرفی شود و

توضیح و بحث درباره تیزهوشی در ریاضی

ریاضی یکی از موضوعات اصلی در برنامه درسی مدرسه‌ای است که در آن، توانایی‌های مورد انتظار از دانش‌آموز از قبل مشخص می‌شود. اهداف نیز در همان راستای توانا شدن تعریف شده و تحقق آن‌ها مورد توجه نظام آموزشی قرار می‌گیرد. چون این انتظارات معمولاً براساس سن و پایه دانش‌آموزان سطح‌بندی می‌شود، ممکن است در یک پایه متناسب، با ظرفیت‌های بالاتر دانش‌آموزان توانمندتر در ریاضی (تیزهوش در ریاضی) نباشند. در نتیجه، معلمان مدارس ابتدایی معمولاً در مواجهه با چنین دانش‌آموزانی دچار مشکل می‌شوند. آن‌ها نمی‌دانند که آیا باید به نیازهای عمومی کلاس توجه بیشتری داشته باشند یا این که رویه‌ای در تدریس اتخاذ کنند که پاسخگوی نیازهای این دست دانش‌آموزان خاص نیز باشد. در اینکه باید معلمان، این دانش‌آموزان را در استفاده از حداکثر توانایی‌های بالقوه خود یاری کنند، شکی نیست اما گاهی معلمان گله‌مندند که حتی با وجود توجه به نیازهای این دانش‌آموزان، باز انگار روش‌های آن‌ها ناکافی و نامناسب به نظر می‌رسد. دلیل سردرگمی معلمان در این باره، شاید تنوع دانش‌آموزان به اصطلاح **تیزهوش** باشد، یعنی درست است که گاهی به یک دانش‌آموز با ویژگی‌های خاص، عنوان مستعد در ریاضی اطلاق می‌شود، اما معلوم نیست که دقیقاً، کدام یک از ویژگی‌های او، نشان‌دهنده تیزهوشی وی است؟ و آیا همه ویژگی‌ها، بین آن دانش‌آموزان مشترک و یکسان است؟

بعضی از پژوهشگران، موضوع **تیزهوشی و هوشمندی**^۲ را به هم مرتبط دانسته و آن‌ها را در یک حوزه مشترک وارد کرده و مورد مطالعه قرار می‌دهند و فرد مستعد و تیزهوش در ریاضی را در اصل، فردی برخوردار از نوع خاصی از هوش می‌دانند. گاردنر^۳ (۲۰۰۰) در مدل **هوش‌های چندگانه** خویش، انواعی از هوش را معرفی کرده است که نسبتاً، قائم‌به‌ذات بوده، و مستقل از هم عمل می‌کنند. یکی از این هوش‌ها، «هوش منطقی - ریاضی»^۴ است که به دو شاخه هوش تحلیلی (استدلال‌های منظم و منطقی) و هوش ترکیبی (شناسایی الگوها و تعمیم‌سازی) تقسیم شده است. منظور گاردنر از هوش تحلیلی آن است که یک فرد در هنگام حل یک مسئله، به خوبی اجزای مختلف مسئله را مورد تحلیل قرار داده، مسئله را به بخش‌های مختلف تجزیه کند، فرضیه‌ها را مورد بررسی قرار دهد و سعی کند هدف و

خواسته آن مسئله را به خوبی بشناسد. در مقابل، منظور او از هوش ترکیبی این است که فرد به خوبی قادر باشد از مثال‌ها، نمونه‌ها، غیرنمونه‌ها و تجربه‌های مختلف درس گیرد و بتواند با ترکیب اجزای مختلف پدیده‌ها با یکدیگر و مرتبط کردن آن‌ها به هم، به یک نتیجه منطقی یا تعمیمی مناسب در مورد آن‌ها، دست یابد.

این دو شاخه از هوش منطقی - ریاضیاتی را به خوبی می‌توانیم در رفتار دانش‌آموزان تیزهوش در ریاضی مشاهده کنیم. در ادامه، به برخی از ویژگی‌های مشترک بین دانش‌آموزان تیزهوش که آن‌ها را از سایر همکلاسی‌هایشان متمایز می‌سازد، اشاره می‌کنیم:

- هنگام ارائه مطالب جدید از جانب معلم، از سرعت گیرایی بالایی برخوردارند؛
- با اعتماد به نفس زیاد از نمادهای ریاضی استفاده می‌کنند، گویی برایشان کار با نمادها، راحت‌تر از کار با مثال‌های ملموس است و به سرعت، بین مثال‌های ملموس و نمادها، پل می‌زنند؛
- تمایل عجیبی به برقراری ارتباط بین مباحث مختلف ریاضی و مرتبط کردن آن‌ها به یکدیگر دارند؛
- به سرعت، متوجه نکته ریاضی یا محاسباتی موجود در مسئله‌ها می‌شوند؛
- غالباً، الگوها و روابط را به صورت فی‌البداهه، به دیگر موقعیت‌ها تعمیم می‌دهند؛
- به راحتی می‌توانند یک روش مشخص را که برای حل یک مسئله خاص به کار برده‌اند، به دیگر مسائل تعمیم دهند و شناسایی کنند که کدام مسائل را می‌توان به کمک آن روش‌ها حل کرد و برای کدام مسائل، امکان استفاده از آن‌ها نیست؛
- زمانی که مسئله‌های معمولی را حل می‌کنند، مراحل واسطه و میانی و به قول خودشان **وقت‌گیر و تشریفاتی** را حذف می‌کنند؛
- برای رسیدن به جواب پافشاری می‌کنند و در این راه، روش‌ها و استراتژی‌های مختلف را امتحان می‌کنند؛
- ذهنی منعطف و شخصیتی خطرپذیر دارند و خود را به قواعد یکنواخت و فرآیندهای رایج، محدود نمی‌کنند؛
- سرعت بالایی در بازخوانی نتایج، روش‌ها و اصول از قبل فراگرفته شده، دارند.

همان‌طور که از این فهرست دیده می‌شود، ویژگی‌های دانش‌آموزان تیزهوش در ریاضی، اصلاً شامل تکنیک‌های خاص و اعجاز‌های محاسباتی - عددی نیست. کروتسکی^۵

داشتن تفکر خلاق در ریاضی، تا آنجا اهمیت دارد که می‌توان حتی آن را معیار اصلی سنجش تیزهوشی در ریاضی دانست که بعد از تفکر تحلیلی و تفکر ترکیبی، سومین ویژگی تیزهوشی در ریاضی است. به گفته هایلاک (۱۵۹: ۲۰۰۴)، دانش‌آموزان تیزهوش در ریاضی، کسانی نیستند که تنها در حوزه‌های معمول (مهارت‌ها، دانش، درک و اجرا) موفق‌اند، بلکه آن‌هایی هستند که در زمینه‌هایی غیرمعمول (محدود نکردن خود به روش‌ها و چارچوب‌های خاص و داشتن تفکری خلاق و واگرا) نیز، موفق هستند

(۱۹۷۶) معتقد است که به هیچ وجه توانایی‌های خاص محاسباتی، نمی‌توانند نمایانگر تیزهوشی در ریاضی باشند. همچنین، تأکید بر توانایی انجام محاسبات با تکنیک‌های خاص و نکته‌دار، در برنامه درسی هیچ کشوری، جزو اهداف یا استانداردهای برنامه درسی ریاضی نیست. بلکه برعکس، بیشتر مباحث در برنامه‌ها، حول ایجاد توانایی در فرآیندهای شناختی مانند انعطاف‌پذیر بودن و عدم اصرار بر استفاده از روش‌های معمول و یکنواخت و تقویت تفکر خلاق، متمرکزند. داشتن تفکر خلاق در ریاضی، تا آنجا اهمیت دارد که می‌توان حتی آن را معیار اصلی سنجش تیزهوشی در ریاضی دانست که بعد از تفکر تحلیلی و تفکر ترکیبی، سومین ویژگی تیزهوشی در ریاضی است. به گفته هایلک (۲۰۰۴: ۱۵۹)، دانش‌آموزان تیزهوش در ریاضی، کسانی نیستند که تنها در حوزه‌های معمول (مهارت‌ها، دانش، درک و اجرا) موفق‌اند، بلکه آن‌هایی هستند که در زمینه‌هایی غیرمعمول (محدود نکردن خود به روش‌ها و چارچوب‌های خاص و داشتن تفکری خلاق و واگرا) نیز، موفق هستند.

با توجه به این که دانش‌آموزان تیزهوش، از سطوح بالای تفکر مانند راه‌حل‌های ترکیبی، روش‌ها و راهکارهای ابتکاری، تفکر تحلیلی و استدلال‌های منطقی پیشرفته بهره‌مندند، نمی‌توان نیازهای خاص این دانش‌آموزان را به راحتی و براساس برنامه درسی ارائه شده به دیگر دانش‌آموزان معمولی، برآورده کرد. در نتیجه، دانش‌آموزان تیزهوش نیاز دارند که برایشان، برنامه‌ای خاص و متناسب با استعدادشان در نظر گرفته شود، یا حداقل معلمان آن‌ها، در روش‌های تدریس و طراحی درس‌های خود، به نیازهای ویژه آنان نیز، توجه داشته باشند.

در ادامه، چند پیشنهاد و راهنمایی برای معلمان و برنامه‌ریزان درسی، جهت توجه بیشتر به نیازهای دانش‌آموزان تیزهوش در ریاضی، ارائه می‌کنیم:

● استفاده از دانش و مهارت‌های ریاضی برای حل مسائل غیرمعمول و ناآشنا و ایجاد فرصت‌هایی برای پرداختن به چنین مسائلی در کلاس؛

● طرح مسئله‌هایی که در آن‌ها، از راهنمایی‌های کمتری استفاده شده است، به این معنا که مسئله‌ها، دارای کمترین اطلاعات لازم، برای حل باشد. همچنین، مسئله‌هایی ارائه شوند که دارای اطلاعات اضافه، غیرضروری و حتی گمراه‌کننده باشند!

● آموزش شناسایی فرض‌ها و تعیین اهداف (حکم)، هم‌چنین شناسایی اهداف و نتایج ثانویه از حل یک مسئله؛

● دادن فرصت به دانش‌آموزان تا بتوانند از استدلال‌های منطقی و راه‌حل‌های خود دفاع کنند و آن‌ها را توضیح دهند؛

● در اختیار قرار دادن مفاهیم و مهارت‌های جدید و به روز شده به دانش‌آموزان تیزهوش تا برایشان، فرصت‌هایی جهت گسترش تجربه‌ها، تفکرات و فرآیندهای ریاضی فراهم شود؛

● ارائه مثال‌هایی برای کشف الگوهای عددی حاصل از الگوهای هندسی و برعکس؛

● ارائه تعمیم‌ها به صورت جمله‌های جبری و نمادین؛

● آموزش شناسایی متغیرهای مستقل از متغیرهای وابسته و دست‌کاری متغیرهای مستقل برای مشاهده تأثیر آن‌ها بر متغیرهای وابسته (مثلاً دست‌کاری در اندازه طول ضلع یک مربع یا شعاع یک دایره و مشاهده چگونگی تغییر مساحت آن‌ها)؛

● استفاده از جدول‌های دوسویه برای خلاصه‌سازی جهت کشف الگوها (روش جدول‌بندی)؛

● ایجاد موقعیت‌هایی برای تحقیق، حدس زدن، فرضیه‌سازی، تعمیم‌دادن و ارزیابی آن‌ها؛

● دادن فرصت‌هایی به دانش‌آموزان برای شناسایی قواعد عمومی مشترک بین فرآیندهای مختلف که در موقعیت‌های مشابه دیگر نیز، قابل اجرا باشند؛

● تشویق دانش‌آموزان تیزهوش هنگام پافشاری بر حل یک مسئله، احترام به روش‌های پیشنهادی آن‌ها و محدود نکردن تکنیک‌ها و راه‌حل‌های معلم به دایره کوچکی از روش‌های محاسباتی؛

● مشارکت دادن دانش‌آموزان تیزهوش در کارهایی که به استدلال‌های منطقی نیازمندند؛

● درگیر کردن دانش‌آموزان تیزهوش با موقعیت‌هایی که ظاهراً غیرمعقول‌اند، و استفاده از موقعیت‌های غیرثابت و انعطاف‌پذیر و چالش‌برانگیز به این منظور که تفکر آن‌ها به سمت واگرایی سوق یابد.

مثال‌های عملی

تانگاتا (یکی از نویسندگان کتابی که این بخش مربوط به آن است)، در تحقیقی که بر روی گروهی از دانش‌آموزان ممتاز و توانمند در ریاضی انجام داد، متوجه این واقعیت شد که یک دانش‌آموز، می‌تواند ممتاز باشد ولی تیزهوش نباشد. همچنین، مهم‌تر این است که حتی یک دانش‌آموز، می‌تواند ویژگی‌های تیزهوشی را داشته باشد، ولی از نظر کسب نمرات و نتایج، ممتاز نباشد. وی در تحقیق خود،

توانست دو دانش آموز ممتاز که آن‌ها را J و K نامیده بود، شناسایی کند که دارای چنین ویژگی‌های متفاوتی بودند.

J: یک دانش آموز موفق و ممتاز که نمی‌توان او را تیزهوش نامید

J، یکی از دانش‌آموزانی بود که معلمان او را به‌عنوان دانش‌آموز ممتاز کلاس می‌شناختند. او در یادگیری موارد رایج و استاندارد و کسب نمرات عالی در آزمون‌های ریاضی، بسیار خوب عمل می‌کرد. اما محقق دریافت که J از اعتماد به نفس پایینی برخوردار بوده و زمانی که با مسائل ناشناخته روبه‌رو می‌گردد، دچار اضطراب می‌شود، کارش را از بقیه پنهان می‌کند و تمایلی به خطرپذیری ندارد. J در تشخیص الگوهای عددی و فرآیند تعمیم‌سازی ضعیف بود. در برقراری ارتباط با مسئله و روابط موجود بین اجزای آن، کند عمل می‌کرد و زیاد فکر می‌کرد. اگرچه J در آزمون‌ها و ارزشیابی‌های ملی، موفق به کسب نمرات عالی می‌شد، ولی با همه این اوصاف، J نمی‌توانست دارای ویژگی‌های اصلی تیزهوش بودن در ریاضی باشد. در نتیجه از جانب پژوهشگر، به‌عنوان یک فرد تیزهوش در ریاضی، به رسمیت شناخته نشد.

K: یک دانش آموز تیزهوش اما با نمرات و نتایج ضعیف

در مقابل، K یک کودک ۹ ساله بازیگوش و نامرتب بود که در مهارت‌های نوشتاری و کتبی، ضعیف عمل می‌کرد. K در کلاس درس ریاضی با رویکرد معمول تدریس، عملکرد خوبی نداشت. معلم او را به‌عنوان یک دانش آموز ناموفق، بی‌دقت، بی‌انگیزه و بی‌میل نسبت به انجام تکالیف خود، می‌شناخت.

در یک فعالیت، محقق یک ورق روزنامه (با یادآوری اینکه هر ورق روزنامه چهار صفحه است) با شماره صفحات ۳۵، ۳۶، ۱۰۹ و ۱۱۰، در اختیار K قرار داد. K توانست به‌سرعت تشخیص دهد که تعداد کل صفحات این روزنامه چقدر است، و بعد از این که باقی صفحات روزنامه را به او دادند، توانست ورق‌های روزنامه را لای یکدیگر چیده و به‌صورت اصلی آن، مرتب کند. محقق به این دانش‌آموز، یک ایده جبری ساده داد و او را راهنمایی کرد که نماد n را برای تعداد صفحات روزنامه، m را برای تعداد ورق‌های روزنامه، f را برای شماره صفحه روی نیم‌برگ اول، b را برای شماره پشت نیم‌برگ دوم و l و r را به‌ترتیب برای شماره صفحه‌های چپ و راست دو صفحه داخلی هر ورق

روزنامه به کار گیرد. K به‌سرعت نتیجه گرفت که $n = m \times 4$. این دانش‌آموز، از بین جدول‌های مختلف که فقط یکی از آن‌ها نمایانگر روابط بین شماره‌های روزنامه بود، جدول زیر را که پاسخ صحیح بود، انتخاب کرد.

b	r	l	f
۷۲	۷۱	۲	۱
۷۰	۶۹	۴	۳
۶۸	۶۷	۶	۵
۶۶	۶۵	۸	۷
... و به همین ترتیب			

علاوه بر این، K توانست این تعمیم‌ها را نیز ارائه کند: «l و b همیشه فرد هستند»، « $b = n + ۱$ » و « $f + r = n$ » که باعث شگفتی محقق و معلم او شد. K حتی توانست این روابط را به‌خوبی توضیح دهد و از آن‌ها دفاع کند. وی توانست به‌خوبی نشان دهد که چگونه می‌تواند این نمادها را با در اختیار داشتن فقط یک ورق از روزنامه، به کار گیرد تا تعداد صفحه‌های آن روزنامه را به دست آورد. K در پاسخ به سؤال محقق که از او پرسید «این روش برای کدام نشریه‌ها کاربرد دارد؟»، گفت: «می‌توان این را برای همه مجلات که هر ورق آن چهار صفحه‌ای است اعمال کرد». با مطالعه رفتار K در این فعالیت و چند فعالیت مشابه دیگر، تانگاتا برخی از ویژگی‌ها و توانایی‌های خاص او را که از نظر وی، تیزهوش در ریاضی محسوب می‌شد، به‌صورت زیر فهرست کرد:

- توانایی خارق‌العاده در درک ساختار اجزای به کار رفته در مسئله و توانایی زیاد در استدلال ریاضی؛
- توانایی تعمیم دادن الگوهای عددی و استفاده درست از چهار عمل اصلی، مربع اعداد و نمادهای جبری، برای تعمیم‌ها؛
- برخورداری از سطح مناسبی از اعتماد به نفس، پشتکار و علاقه و اصرار، برای حل مسائل ناآشنا؛
- داشتن حافظه‌ای خوب برای دریافت اصطلاحات و مفاهیم ریاضی، و توانایی بازخوانی درست آن‌ها در شرایط جدید.

مطالعه بیشتر

مطالعات کروتسکی (۱۹۷۶) را می‌توان نقطه آغازین پژوهش‌های جدی با موضوع تیزهوشی در ریاضی دانست. کوشی^۶ (۲۰۰۵)، توصیه‌های نظری و عملی مختلف و

برای خطاهای ناشی از بی‌دقتی، نقش معلم می‌تواند اشاره به خطای اتفاق افتاده و دادن فرصت به دانش‌آموز برای تصحیح آن باشد. اما در بسیاری مواقع، عدم اشاره مستقیم به پاسخ صحیح یا ارائه چندین گزینه برای اصلاح خطای مورد نظر، راهکاری مؤثرتر است

مفیدی در زمینه تدریس ریاضی به کودکان مستعد و تیزهوش ارائه کرده است. پورتر^۷ (۲۰۰۵) نیز به اصول خاصی در تدریس و کار با کودکان تیزهوش تا سن ۸ سال اشاره می‌کند و هر چند توصیه‌های او در این زمینه شامل همه موضوعات درسی است و تمرکزش تنها بر ریاضی نیست، اما مطالعه پیشنهادها و در مورد رفتار با دانش‌آموزان تیزهوش، خالی از لطف نیست. همچنین، فصلی با موضوع «حمایت از کودکان تیزهوش در ریاضی» در ادواردز (۱۹۹۸) موجود است که برای محدوده سنی دبستان نوشته شده است. پایگاه مشهور NRIC (به نشانی www.nrich.maths.ogr) نیز، حاوی مواد آموزشی مناسبی برای معلمان، در این زمینه است.

مفاهیم مرتبط با این بخش

خلاقیت در ریاضی، تفاوت، تعمیم، حل مسئله.

معرفی مفهوم خطاها در ریاضی

معمولاً دانش‌آموزان، در انجام تکالیف نوشتاری، انجام کارهای عملی و پاسخ شفاهی به سؤالات معلم دچار خطا می‌شوند. خطا می‌تواند ناشی از بی‌دقتی یا ناشی از انتخاب و استفاده نادرست از فرایندها باشد. خطاهای ناشی از بی‌دقتی و حواس‌پرتی را می‌توان به کمک تمرین و تکرار مرتفع ساخت، اما بحث اصلی ما، راجع به خطاهای فرآیندی است که می‌تواند دلایل مختلفی همچون درک نادرست از مفاهیم، به کارگیری روش‌های غلط و استفاده نادرست از روابط و قواعد ریاضی داشته باشد. نکته اساسی دیگر در مورد خطاها این است که خود آن‌ها، می‌توانند ابزاری برای آموزش ریاضی باشند، به این معنا که معلمان در روش‌های تدریس خود، عمداً مرتکب خطاهای هدف‌داری می‌شوند و با هدف ایجاد توجه بیشتر دانش‌آموزان به آن، موضوع مورد یادگیری را طراحی و مدیریت کنند.

توضیح و بحث

به غیر از درس آواشناسی (آموزش زبان مادری) اغلب خطاهای دانش‌آموزان دوره ابتدایی، در درس ریاضی اتفاق می‌افتد و دلیلش هم این است که اکثر کارهایی که دانش‌آموزان در ریاضی انجام می‌دهند، به پاسخ‌هایی نیازمند است که درست یا نادرست بودن آن‌ها، مورد قضاوت قرار می‌گیرد. مثلاً از دانش‌آموزان انتظار می‌رود که به‌درستی، اعمال ریاضی را انجام دهند. البته موضوع دقت در انجام

تکلیف‌ها و فعالیت‌های ریاضی، بسیار مهم است و تا حدودی، انتظارات و سخت‌گیری‌ها در این زمینه قابل توجیه‌اند. هیچ کدام از ما دوست نداریم توسط پرستاری که فرق بین میلی‌لیتر و لیتر را نمی‌داند، درمان شویم و یا هنگام معامله کردن، کسی طرف معامله ما باشد که در انجام محاسبات عددی، دقیق نیست و به اشتباه، وقتی باید ۱۰۰ تومان به ما برگرداند، ۷۲ تومان به ما پس بدهد. اکنون این سؤال پیش می‌آید که یک معلم در هنگام مواجهه با خطاهای دانش‌آموزان در درس ریاضی، چه در کارهای عملی مانند خطا در اندازه‌گیری و چه در پاسخ به سؤال‌های شفاهی، چه اقداماتی را بهتر است انجام دهد. اینکه معلم دائماً اهمیت دقت در ریاضی را یادآور شود و توجه دانش‌آموز را به انجام دقیق محاسبات جلب کند، لازم است اما کافی نیست.

یادآوری و اصلاح خطاها یک راهکار کوتاه‌مدت است که برای خطاهای پر دانشی کوچک و کم‌اهمیت که در اصل، لحظه‌ای و ناشی از عدم تمرکز هستند، مناسب است. برای خطاهای ناشی از بی‌دقتی، نقش معلم می‌تواند اشاره به خطای اتفاق افتاده و دادن فرصت به دانش‌آموز برای تصحیح آن باشد. اما در بسیاری مواقع، عدم اشاره مستقیم به پاسخ صحیح یا ارائه چندین گزینه برای اصلاح خطای مورد نظر، راهکاری مؤثرتر است. دانش‌آموزان نیاز دارند که انجام خطاها را تجربه کنند؛ به‌خصوص در مورد خطاهای فرآیندی که نشان‌دهنده عدم درک صحیح آن‌ها از مفاهیم، فرایندها و قواعد ریاضی است. در ادامه، سعی داریم روش‌های مؤثری را در مواجهه با خطاهای دانش‌آموزان در درس ریاضی و استفاده از آن‌ها در تدریس ریاضی، از چهار منظر مختلف، مورد توجه و بررسی قرار دهیم.

به چالش کشیدن و تطابق

معلمان به ارتکاب خطا از جانب دانش‌آموزان‌شان نیازمندند، تا مشخص کنند که تکلیف‌هایی که در اختیار دانش‌آموزان قرار داده‌اند، تا چه اندازه چالش‌برانگیز بوده‌اند. می‌توان گفت میزان چالش‌برانگیز بودن یک فعالیت ریاضی، با تعداد خطاهای انجام شده توسط دانش‌آموزان در حین انجام آن، ارتباط مستقیم دارد. اگر دانش‌آموزی در پاسخ به سؤال‌های ریاضی، نسبتاً زیاد مرتکب خطا می‌شود، مهم‌ترین نتیجه از این امر این نیست که بگوییم آن دانش‌آموز در انجام آن کار، ناموفق و ناتوان است (اگرچه ممکن است این طور هم باشد)، بلکه نتیجه مهم را باید در مورد میزان تطابق سطح سؤال با سطح دانش‌آموز دانست. شاید این

معلم است که در تطابق تکالیف با سطح دانش و توانایی دانش آموزان، ناموفق بوده است.

داشتن نیم‌نگاهی به بدفهمی‌ها و پیش‌بینی وقوع خطا

آموزگاران می‌توانند از خطاهای مشابه دانش‌آموزان در کلاس‌های دیگر یا سال‌های قبل، برای به‌دست آوردن دیدگاهی مبتنی بر تجربه، نسبت به بدفهمی‌ها و ابهامات دانش‌آموزان استفاده کنند. این دیدگاه‌ها به آنان کمک می‌کند تا درس ریاضی مورد نظر را، با آگاهی بیشتری راجع به چالش‌های موجود در آن، آموزش دهند. برای مثال، وقتی که یک دانش‌آموز ۹ ساله، برای محاسبه $227 - 340$ ، پاسخ ۱۲۷ را می‌دهد، یک معلم باهوش و باتجربه، به‌سرعت ماهیت این خطا را تشخیص داده و بدون آن که در ارائه پاسخ درست به دانش‌آموز عجله کند، از او می‌خواهد که نحوه انجام تفریق خود را توضیح دهد. ممکن است پاسخ دانش‌آموز شامل این جمله باشد که «اگر هفت را از صفر کم کنیم، هفت باقی می‌ماند». در چنین حالتی، با تحلیل این خطا، معلم درمی‌یابد که مشکل کار به استفاده نادرست «هیچ» به جای «صفر» برمی‌گردد و بدفهمی دانش‌آموز این است که عدد صفر، برایش همان هیچ است و چون هیچ است، می‌تواند آن را نادیده بگیرد. این دیدگاه در واقع، برای تشخیص خطا قبل از وقوع، در کارهای بعدی و هنگام به‌کارگیری عدد صفر در محاسبات، می‌تواند یاری‌دهنده معلم باشد.

بهره‌گیری از خطا برای یادگیری مؤثرتر (خطا در جهت کیفیت‌بخشی به آموزش)

خطاهایی را که دانش‌آموزان مرتکب می‌شوند می‌توان به‌عنوان فرصت‌های سازنده در جهت غنا بخشیدن آموزش در نظر گرفت. هنگامی که یک خطا با فرآیند ارزیابی آن خطا همراه شود، یادگیری از اشتباهاتمان می‌تواند مؤثرترین نوع یادگیری در ریاضی باشد (بلک^۹، ۲۰۰۳). این موضوع وقتی با استفاده از تعارض شناختی^{۱۰} همراه شود، مؤثرتر نیز خواهد بود. مثلاً وقتی معلم با خطای تفریق که در بالا توضیح دادیم روبرو می‌شود، از دانش‌آموز بخواهد که تفریق $7 - 10$ را انجام دهد، زیرا مطمئن است که دانش‌آموز می‌داند پاسخ ۳ است. سپس به او مجموعه‌ای از تفریق‌های مشابه مانند $7 - 20$ ، $7 - 30$ ، $7 - 40$ و $7 - 14$ بدهد تا دانش‌آموز بتواند به عبارت $7 - 340$ پاسخ درست دهد. حال معلم می‌تواند از دانش‌آموز بخواهد دوباره به تفریق $227 - 340$ فکر و به‌طور مشابه، عمل

کند. مشاهده این عبارتها در کنار هم، می‌تواند باعث ایجاد یک تعارض شناختی سازنده در ذهن دانش‌آموز شده و او را قادر سازد که خطای اولیه خود را تصحیح کند. مطمئناً این رویکرد معلم، مؤثرتر از زمانی خواهد بود که معلم خودش مستقیماً برای دانش‌آموز توضیح دهد که خطای او کجاست و چگونه باید آن را اصلاح کند.

نحوه برخورد اخلاقی معلم با خطاهای دانش‌آموزان

این احتمال وجود دارد که یک معلم، رفتاری را در کلاس پیشه کند که براساس آن، خطاها و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در ریاضی، با جریمه‌ها و تنبیه‌های متعدد همراه شود. یا این که معلمی دیگر، رویه‌ای اتخاذ کند که در آن هر خطا، فرصتی برای تمام دانش‌آموزان کلاس، جهت توسعه درک و فهمشان از آن مسئله باشد. در رویکرد دوم، هنگامی که دانش‌آموزی خطا می‌کند، در واقع از دید معلم یک مشکل جزئی است و آن را به دید یک اتفاق مفید در کلاس نگاه می‌کند. معلم حتی می‌تواند از دانش‌آموز، به‌خاطر وقوع این خطا تشکر کند، زیرا فرصتی را برای تمام دانش‌آموزان فراهم کرده است که بیشتر یاد بگیرند و از یک دام بالقوه، رهایی یابند. رویکرد درست و منطقی نیز همین رویکرد است. معلمان ابتدایی نباید به دنبال تبدیل کلاس خود به یک کلاس عاری از خطا باشند، بلکه باید اجازه دهند خطاها رخ دهند و حتی گاهی خود عمداً، این خطاها را انجام دهند. این رویکرد، از جانب «دفتر تعیین استانداردها در آموزش^{۱۱}» (Ofsted) در انگلستان نیز، مورد تأیید قرار گرفت. اما در نقطه مقابل، اگر ارتکاب خطا با برخورد نامناسب و قهرآلود و گاهی مواقع تنبیه و کم کردن نمره همراه شود، نه تنها کمکی به یادگیری بیشتر نمی‌کند، بلکه باعث بروز مشکلات روانی مانند اضطراب ریاضی می‌شود که اعتماد به نفس، قدرت خطرپذیری و فعالیت دانش‌آموز را در کلاس، کاهش می‌دهد.

دفتر تعیین استانداردها در آموزش (Ofsted) معتقد است که معلمان با اتخاذ رویکرد اخلاقی محبت‌آمیز در برخورد با اشتباهات و خطاهای دانش‌آموزان، باعث می‌شوند که آن‌ها، ترسی از خطا کردن نداشته باشند و موفق‌تر عمل کنند. از این گذشته، این دفتر به معلمان توصیه می‌کند که خطاها را به‌عنوان بخش غیرقابل‌انکاری از آموزش، در نظر بگیرند.

معلم حتی می‌تواند از دانش‌آموز، به‌خاطر وقوع این خطا تشکر کند، زیرا فرصتی را برای تمام دانش‌آموزان فراهم کرده است که بیشتر یاد بگیرند و از یک دام بالقوه، رهایی یابند. رویکرد درست و منطقی نیز همین رویکرد است

مثال‌های عملی

در ادامه، دو مثال از خطاهای متداول و واکنش صحیح معلم به آن‌ها را، ارائه می‌کنیم.

خطای فرآیندی در جمع

یک کودک ۵ ساله که جمع را با شمارش رو به بالا انجام می‌دهد، ممکن است خطاهایی مانند آنچه که در زیر مشاهده می‌کنید، انجام دهد:

$$8+4=11 \quad 6+5=10 \quad 7+3=9$$

معلم از دانش‌آموز می‌خواهد که نشان دهد که چگونه این جواب‌ها را به دست آورده، در حالی که توجه دارد که در جمع $7+3$ ، دانش‌آموز از هفت شروع به شمارش کرده است (هفت، هشت، نه)، به جای آنکه به‌طور صحیح، از هشت شروع به شمارش کند (هشت، نه، ده). این دانش‌آموز، از سه انگشت خود نیز استفاده می‌کند، اما به شیوه‌ای نادرست و با شروع از گفتن واژه هفت به جای واژه هشت، این کار را می‌کند. تحلیل این خطاها توسط معلم باعث می‌شود که در آموزش این فرآیندها، از عبارت‌های مناسب‌تری مانند «هفت و سه تا بیشتر» به جای عبارت گیج‌کننده «سه تا بشمار از هفت» استفاده کند. بنابراین، معلم با کسب تجارب بیشتری از خطاهای دانش‌آموزان، می‌تواند از الگوهای زبانی بهتری برای درک درست دانش‌آموزان در کارهای شفاهی بعدی خود، استفاده کند.

معلمان ابتدایی نباید به دنبال تبدیل کلاس خود به یک کلاس عاری از خطا باشند، بلکه باید اجازه دهند خطاها رخ دهند و حتی گاهی خود عمداً، این خطاها را انجام دهند

درک نادرست از ضرب اعداد اعشاری در مضارب ۱۰

گاهی معلمان ابتدایی، شاهد آن هستند که دانش‌آموزان ۱۱ ساله در انجام برخی از محاسبات بر روی مضارب ۱۰، به نتایج نادرستی می‌رسند. مثلاً حالتی مثل عبارت $2/3 \times 10 = 2/30$ بسیار مشاهده شده است. معلم می‌تواند این خطا را به فرصتی برای درک عمیق‌تر دانش‌آموزان از ضرب اعداد اعشاری در مضارب ۱۰، تبدیل کند.

در مثال بالا، خطا به این دلیل رخ داده است که دانش‌آموز از یک قاعده در مورد ضرب در عدد ۱۰، به اشتباه استفاده کرده است. این قاعده «اضافه کردن صفر» نام دارد و حرفش این است که اگر عددی در ۱۰ ضرب شود، کافی است برای به‌دست آوردن حاصل، یک صفر به انتهای آن عدد اضافه شود. یک معلم باهوش می‌تواند از دانش‌آموزان بپرسد که «کدام عدد بزرگ‌تر است؟ $2/3$ یا $2/30$ ؟» و این سؤال، می‌تواند بحثی در کلاس به راه اندازد

که در نهایت، مشخص شود دو عدد با هم برابرند. اکنون با به چالش کشیدن قاعده «اضافه کردن صفر»، این قانون در ذهن دانش‌آموز به زیر سؤال رفته است. به این ترتیب، اولین نشانه‌ها از تعارض شناختی در چهره دانش‌آموزان نمایان می‌شود. معلم سپس در کلاس، نمونه‌هایی از شرایط واقعی در زندگی را بیان می‌کند که به ضرب $2/3$ در ۱۰ مربوط می‌شود. مثلاً می‌گوید، «۱۰ تخته چوب خریدیم که طول هر کدامشان، $2/3$ متر است. طول تمام تخته‌ها با هم، چقدر است؟ یا می‌گوید که $2/3$ کیلوگرم شکلات خریدیم که قیمت هر کیلوگرم، ۱۰ تومان است. چقدر باید به فروشنده پول بدهیم؟» مرتبط کردن مسئله به شرایط واقعی، می‌تواند در ذهن دانش‌آموز، تصور عینی‌تری از اشتباه او ایجاد کند. در نهایت، معلم به روش‌های دقیق‌تر محاسباتی از این نوع اشاره کرده و از همه دانش‌آموزانی که در درک بهتر این موضوع و رفع این خطا کمک کرده‌اند، تشکر می‌کند.

مطالعه بیشتر

کوکبرن (۱۹۹۹) به تعریف، شناسایی و چگونگی اصلاح برخی از خطاهای رایج ریاضی در سنین پایین‌تر پرداخته است. در روز^{۱۲} نیز، مطالعه مفیدی در مورد خطاهای محاسباتی کودکان و بدفهمی‌های آن‌ها، در فصل دوم از کتاب هانسون^{۱۳} (۲۰۰۵) آورده است. اضافه بر اینها، مطالعه مهم دیگری نیز توسط کوشی و همکاران (۲۰۰۰)، تحت عنوان «خطاها و بدفهمی‌های کودکان^{۱۴}»، انجام شده است.

مفاهیم مرتبط با خطاهای ریاضی

سنجش برای یادگیری، تعارض شناختی، جنسیت و ریاضی، جور بودن و ناجور بودن.

پی‌نوشت‌ها

1. Giftedness in Mathematics
2. Intelligence
3. Gardner
4. Logical-Mathematical Intelligence
5. Krutetskii
6. Koshy
7. Porter
8. Error
9. Black
10. Cognitive conflict
11. Office for Standards in Education: Ofsted
12. Drews
13. Hanson
14. Children's Mistakes and Misconception



هادی دهقان، دبیر ریاضی شهرستان کرمان
عباس حسن خانی، دانشیار دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمان،
دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمان بخش ریاضی

میزان توجه اولین کتاب ریاضی متوسطه (پایه هفتم) به سطوح مختلف اهداف آموزشی

از دیدگاه اندرسون

چکیده

طبقه‌بندی تجدیدنظر شده بلوم (اندرسون) که از دو بُعد دانش و فرایند شناختی تشکیل شده است در سال ۲۰۰۱ معرفی شد. این پژوهش با موضوع تحلیل محتوای کتاب ریاضی پایه هفتم چاپ ۱۳۹۲ بر مبنای طبقه‌بندی حیطه شناختی اندرسون انجام شده است. با توجه به اهمیت بحث تحلیل محتوای کتاب‌های درسی که در نظام آموزشی متمرکز ایران بسیار تأثیرگذار است. در این پژوهش محتوای کتاب ریاضی پایه هفتم چاپ ۱۳۹۲ در سطوح مختلف طبقه‌بندی اندرسون طبقه‌بندی شد. این تحقیق به لحاظ روش، از نوع توصیفی - تحلیلی و به لحاظ هدف از نوع کاربردی است. پس از تجزیه و تحلیل یافته‌های پژوهش مشخص شد که در کتاب مزبور به تمام سطوح طبقه‌بندی اندرسون توجه شده و به سطوح به یاد آوردن، فهمیدن و به کار بستن در بعدهای دانشی اولیه توجه بیشتری شده است. پیشنهاد می‌شود با توجه به اهمیت و کاربرد زیاد سطوح بالای طبقه‌بندی اندرسون، با گنجاندن قسمت‌هایی مثل بازی و ریاضی در محتوای کتاب، به این سطوح توجه بیشتری صورت گیرد.

کلیدواژه‌ها: تحلیل محتوا، کتاب ریاضی پایه هفتم، دیدگاه اندرسون

مقدمه

در راستای اجرای نظام جدید آموزشی، کتاب تازه تألیف ریاضی پایه هفتم منتشر شد. ریاضیات پایه هفتم در شرايطی تألیف شده است که از یک طرف باید محتوای تعیین شده را طبق برنامه درسی مصوب ارائه کند و از طرف دیگر، دانش آموزانی در این سال تحصیلی کتاب را مطالعه می کردند که پنج ساله دوره ابتدایی را در نظام قدیمی برنامه ریاضی خوانده اند و تنها کتاب ریاضی پایه ششم را دیده اند که تا اندازه ای حال و هوای برنامه جدید را دارد. از طرف دیگر، معلمان دوره راهنمایی نیز به زمان احتیاج دارند تا به کار آشنا و بر تدریس این کتاب مسلط شوند. با این توضیح، تدریس کتاب های درسی جدید در سال اول خالی از اشکال نیست. آن چه می تواند آسیب های این موضوع را کاهش دهد، کسب آمادگی و آشنا شدن هر چه بیشتر معلمان دوره اول متوسطه (راهنمایی سابق) با محتوا و برنامه های جدید خواهد بود (داوودی، ۱۳۹۲).

برای بسیاری از معلمان ریاضی، کتاب درسی اولین راهنما برای اجرای برنامه درسی است (کائیدی، ۱۳۹۳). با توجه به اهمیت بسیار زیاد کتاب های درسی در نظام آموزشی متمرکز ایران، از جمله کتاب ریاضی پایه هفتم که اولین کتاب ریاضی دوره متوسطه است و مسلماً پایه و اساس ریاضیات این دوره را تشکیل می دهد نیاز است تا تحلیل محتوای این کتاب از یک دیدگاه معتبر بین المللی مثل طبقه بندی حیطه شناختی اندرسون که در قرن ۲۱ معرفی شده است؛ انجام گیرد تا اهداف آموزشی کتاب به خوبی مشخص و طبقه بندی گردد.

از آنجا که هدف آموزش یادگیری است، پس به همان نسبت که یادگیری ها متنوع اند، هدف های آموزشی هم گوناگون اند. هدف های متعدد آموزشی در سطوح مختلف تحصیلی نیاز به نوعی سازمان و نظم و ترتیب دارند (سیف، ۱۳۸۹).

طبقه بندی هدف های آموزشی چارچوبی است برای دسته بندی بیاناتی از این قبیل که از

دانش آموزان چه انتظاراتی برای آموختن نتایج آموزش داریم. این چارچوب به عنوان ابزاری برای تسهیل تبادل آیت های آزمون در بین اعضای هیئت علمی در دانشگاه های مختلف به منظور ایجاد بانکی از آیت ها و هر کدام برای سنجش هدف های آموزشی تصور شده است (اندرسون، ۲۰۰۱).

در سال تحصیلی ۹۳-۱۳۹۲ وزارت آموزش و پرورش با هدف پرورش بیشتر قوه تفکر، منطق و خلاقیت و همچنین کاربردی کردن محتوای کتاب های ریاضی اقدام به تألیف کتاب ریاضی پایه هفتم نمود. اکنون ما در این پژوهش بررسی می کنیم که آیا محتوای این کتاب می تواند دانش آموزانی فعال و خلاق پرورش دهد یا باز هم بیشتر به بعد دانش و سطح دانش امور واقعی در طبقه بندی هدف های آموزشی از دیدگاه اندرسون توجه شده است؟

طبقه بندی حیطه شناختی اندرسون

حیطه شناختی به طور کلی به یادگیری مطالب و کسب شناخت و معرفت درباره آن ها مربوط می شود. نتایج حاصل از آموزش های شناختی به مهارت های ذهنی از قبیل بازشناسی، یادآوری، فهمیدن، توانایی کاربرد آموخته ها، تجزیه و تحلیل، ترکیب و ارزشیابی منتهی می گردد. سلسله مراتب آموختنی های حیطه شناختی از روند آسان به مشکل پیروی می کند و دامنه آن از یادگیری سطحی تا درک بسیار عمیق از مطالب، متغیر است. حیطه شناختی از شش طبقه یا سطح تنظیم شده و هر طبقه بالاتر مستلزم کسب مهارت های شناختی طبقه یا طبقات (سطح یا سطوح) پایین تر است. بنجامین بلوم در سال ۱۹۵۶ با معرفی این شش سطح، طبقه بندی حیطه شناختی بلوم را به جهانیان عرضه کرد. (صفوی، ۱۳۹۰) بیش از چهار دهه بعد، چند نفر از صاحب نظران آموزشی (اندرسون، کراتول، و همکاران، ۲۰۰۱) در طبقه بندی حوزه شناختی، معروف به طبقه بندی بلوم، تجدیدنظر کردند و طبقه بندی تازه ای با نام یک طبقه بندی برای یادگیری، آموزش، و سنجش پدید آوردند. در طبقه بندی تجدیدنظر شده حوزه

شناختی، یک بعد دانش و یک بعد فرایند شناختی وجود دارد. بعد دانش شامل دانش امور واقعی، دانش مفهومی، دانش روندی، و دانش فراشناختی است. بعد فرایند شناختی در برگیرنده به یاد آوردن، فهمیدن، به کار بستن، تحلیل کردن، ارزشیابی کردن، و آفریدن است. طبقه‌های هر دو بعد این طبقه‌بندی به صورت سلسله مراتبی، یعنی از عینی به انتزاعی و از ساده به پیچیده تنظیم یافته‌اند. ویژگی دو بُعدی بودن این طبقه‌بندی آن است که در آن هر هدف با توجه به هر دو بُعد دانش و فرایند شناختی طبقه‌بندی می‌شود و در یکی از خانه‌های درون جدول که محل تلاقی دو خط برآمده از دو بُعد است قرار می‌گیرد (اندرسون، ۲۰۰۱).

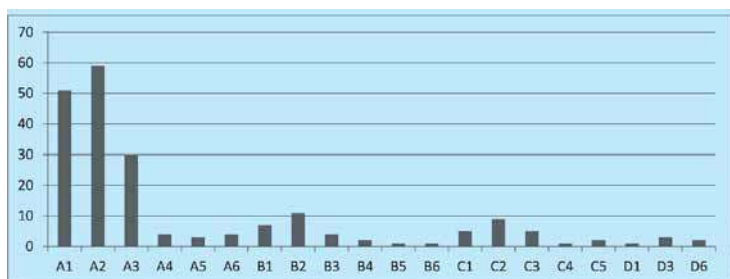
بعد فرایند شناختی						۳ ۲ ۱	
۶ آفریدن	۵ ارزشیابی کردن	۴ تحلیل کردن	۳ به کار بستن	۲ فهمیدن	۱ به یاد آوردن		
A۶	A۵	A۴	A۳	A۲	A۱		دانش امور واقعی A
B۶	B۵	B۴	B۳	B۲	B۱		دانش مفهومی B
C۶	C۵	C۴	C۳	C۲	C۱		دانش روندی C
D۶	D۵	D۴	D۳	D۲	D۱		دانش فراشناختی D

جدول ۱: متغیرهای طبقه‌بندی حیطه شناختی از دیدگاه اندرسون

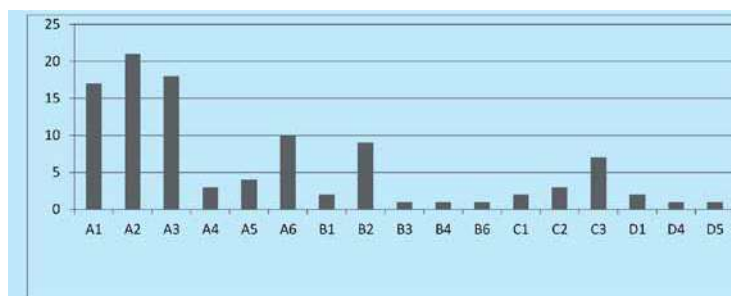
روش‌شناسی

این تحقیق به لحاظ روش از نوع توصیفی-تحلیلی و با توجه به هدف از نوع کاربردی است و در صدد است با توجه به فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها و تمرین‌های موجود در کتاب درسی ریاضی پایه هفتم چاپ ۱۳۹۲، آن‌ها را از جهت توجه به سطوح مختلف حیطه شناختی از دیدگاه اندرسون، تحلیل محتوا نماید. برای تحقق این هدف با استفاده از کتاب‌های مرجع (مانند کتاب راهنمای معلم) و نظر دبیران مجرب و استاد راهنمای پایان‌نامه خود، اهداف مورد نظر از کتاب درسی مزبور استخراج و به اهداف رفتاری تبدیل شدند؛ سپس این اهداف در سطوح مختلف حیطه شناختی اندرسون طبقه‌بندی گردیدند. در پایان با استفاده از آمار توصیفی درصد فراوانی هر یک از سطوح مشخص شد و با تجزیه و تحلیل کلی نتایج، سطح کلی کتاب ریاضی پایه هفتم چاپ ۱۳۹۲ مشخص شد.

در این تحقیق تمام فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب ریاضی پایه هفتم چاپ ۱۳۹۲ مورد بررسی واقع شد. متغیرهای مورد استفاده در جدول زیر ذکر شده‌اند.



نمودار ۱: نمودار ستونی سطوح طبقه‌بندی اندرسون مربوط به فعالیت‌های کتاب ریاضی پایه هفتم چاپ ۹۲



نمودار ۲: نمودار ستونی سطوح طبقه‌بندی اندرسون مربوط به کار در کلاس‌های کتاب ریاضی پایه هفتم، چاپ ۹۲

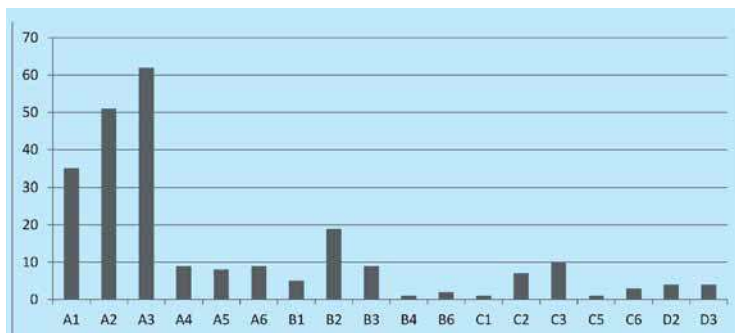
طبقه‌بندی اندرسون طبقه‌بندی شده‌اند.

کتاب مربوطه دارای ۳۴ تمرین است که در این ۳۴ تمرین، ۲۴۰ سؤال ریاضی مطرح شده است. ۲۴۰ هدف آموزشی موجود در تمرین‌های کتاب در نمودار زیر براساس تعداد اهداف و توزیع درصد فراوانی در هر یک از سطوح اندرسون مشخص شده‌اند.

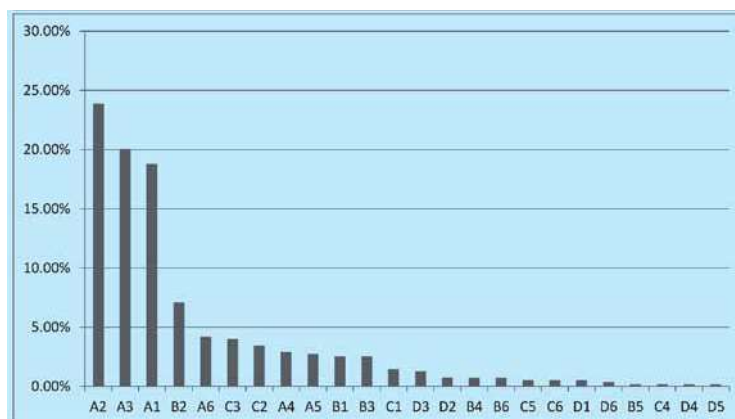
بحث و نتیجه‌گیری

با استفاده از نمودارهای موجود در مورد میزان توجه کتاب ریاضی پایه هفتم به سطوح مختلف طبقه‌بندی اندرسون در فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب درسی مربوطه باید گفت: به‌طور کلی میزان توجه کتاب ریاضی پایه هفتم که دارای ۲۰۵ سؤال در «فعالیت‌ها»، ۱۰۳ سؤال در «کار در کلاس‌ها» و ۲۴۰ سؤال در «تمرین‌ها» - جمعاً ۵۴۸ سؤال یا ۵۴۸ هدف آموزشی - می‌باشد به سطوح مختلف طبقه‌بندی اندرسون مطابق با نمودار ۴ است.

- با توجه به نتایج حاصل از تحلیل فعالیت‌های کتاب، میزان توجه به «سطح فهمیدن دانش امور واقعی» بیش از سایر سطوح است.
 - با توجه به نتایج حاصل از تحلیل کار در کلاس‌های کتاب، میزان توجه به «سطح فهمیدن دانش امور واقعی» بیش از سایر سطوح است.
 - با توجه به نتایج حاصل از تحلیل تمرین‌های کتاب، میزان توجه به «سطح به‌کار بستن دانش امور واقعی» بیش از سایر سطوح است.
- در کتاب ریاضی پایه هفتم به کلیه سطوح طبقه‌بندی اندرسون توجه شده است اما به بعضی طبقات توجه ویژه و به بسیاری از طبقات دیگر توجه بسیار کمی شده است. به‌طور مثال در این کتاب، به سطوح فهمیدن دانش امور واقعی و به‌کار بستن دانش امور واقعی (سطوح اولیه طبقه‌بندی) به ترتیب بیشترین توجه شده است و به سطوح ارزشیابی دانش مفهومی، تحلیل کردن دانش رویه‌ای، تحلیل کردن دانش فراشناختی و ارزشیابی کردن دانش



نمودار ۳: نمودار ستونی سطوح طبقه‌بندی اندرسون مربوط به تمرین‌های کتاب ریاضی پایه هفتم چاپ ۹۲



نمودار ۴: نمودار ستونی درصد سطوح طبقه‌بندی اندرسون مربوط به کلیه فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب ریاضی پایه هفتم چاپ ۹۲

نتایج

کتاب ریاضی پایه هفتم دارای ۵۵ فعالیت است که براساس آن ۲۰۵ سؤال ریاضی مطرح شده است. ۲۰۵ هدف آموزشی موجود در فعالیت‌های کتاب براساس تعداد اهداف و توزیع فراوانی در هر یک از سطوح طبقه‌بندی اندرسون در نمودار ستونی زیر رسم شده است.

کتاب همچنین دارای ۵۴ کار در کلاس می‌باشد که در این ۵۴ کار در کلاس، ۱۰۳ سؤال ریاضی مطرح شده است. ۱۰۳ هدف آموزشی موجود در کار در کلاس‌های کتاب در نمودار ستونی زیر براساس تعداد اهداف و توزیع فراوانی در هر یک از سطوح

نتایج حاصل از آموزش‌های شناختی به مهارت‌های ذهنی از قبیل بازشناسی، یادآوری، فهمیدن، توانایی کاربرد آموخته‌ها، تجزیه و تحلیل، ترکیب و ارزشیابی منتهی می‌گردد. سلسله مراتب آموختنی‌های حیطه شناختی از روند آسان به مشکل پیروی می‌کند و دامنه آن از یادگیری سطحی تا درک بسیار عمیق از مطالب، متغیر است. حیطه شناختی از شش طبقه یا سطح تنظیم شده و هر طبقه بالاتر مستلزم کسب مهارت‌های شناختی طبقه یا طبقات (سطح یا سطوح) پایین‌تر است

فراشناختی، که همگی از سطوح مهم، کاربردی و سطح بالای طبقه‌بندی هستند، کمترین توجه شده است.

از آنجا که در طبقه‌بندی هدف‌های آموزشی حیطه شناختی از دیدگاه اندرسون، سطوح بالای طبقه‌بندی از اهمیت و کاربرد فراوانی برخوردارند و سؤالاتی که با توجه به این سطوح طراحی شوند موجب یادگیری پایدار و طولانی‌تری می‌شوند اهمیت دادن به این سطوح در کتاب‌های درسی، خصوصاً کتاب‌های ریاضی، می‌بایست به شدت مورد توجه قرار گیرد تا دانش‌آموزان در طول دوران تحصیل به جای حفظ کردن طوطی‌وار مطالب به فهم جامع و کامل و کاربردی از مطالب و محتوای آموزشی برسند و به اختراع و اکتشاف و تولید علم بپردازند. این در حالی است که در کتاب درسی ریاضی پایه هفتم چاپ ۱۳۹۲ به سطوح بالای طبقه‌بندی توجه کمتری شده است و این می‌تواند دلیل خوبی بر کم رغبتی دانش‌آموزان در استقبال از بعضی مطالب این کتاب باشد. تجربه اینجانب و همکاران در تدریس این کتاب در سال تحصیلی ۹۳-۹۲ به خوبی نشان داد که سؤالات مبتنی بر سطوح بالای طبقه‌بندی اندرسون برای دانش‌آموزان جالب‌تر و جذاب‌تر است و یادگیری پایداری را برای آن‌ها به ارمغان می‌آورد.

پیشنهاد به معلمان، دانش‌آموزان و برنامه‌ریزان درسی

۱. برنامه‌ریزان درسی باید محتوایی را برای کتاب درسی انتخاب کنند که به هدف‌های تمام سطوح طبقه‌بندی اندرسون توجه داشته باشد.
۲. با توجه به نتایج به‌دست آمده از این تحقیق در مورد توجه کم کتاب درسی به سطوح بالای طبقه‌بندی اندرسون و اهمیت و کاربرد زیاد این سطوح، پیشنهاد می‌شود با گنجانیدن قسمت‌هایی مثل بازی و ریاضی به کتاب درسی، به سطوح بالای طبقه‌بندی اندرسون توجه بیشتری شود.
۳. در کتاب درسی و کتاب راهنمای معلم اهداف رفتاری مشخص گردد.
۴. بیشترین حجم کتاب درسی مربوط به فعالیت‌هاست؛ لذا باید از دبیران خواسته شود به این قسمت کتاب درسی توجه بیشتری داشته باشند تا روش تدریس دانش‌آموز محور تقویت گردد.
۵. با توجه به متفاوت بودن میزان توجه هر قسمت از کتاب درسی به سطوح مختلف طبقه‌بندی اندرسون و ناهمگن بودن سطح علمی دانش‌آموزان، دبیران بایستی جهت رسیدن به اهداف آموزشی مطلوب، به تفاوت‌های فردی دانش‌آموزان توجه ویژه‌ای داشته باشند.

منابع

۱. داوودی، خسرو، (۱۳۹۲)، ریاضی پایه هفتم، مجله رشد آموزش متوسطه، ش ۱۰۷
۲. سیف، علی اکبر، (۱۳۸۹)، روان‌شناسی پرورشی نوین، نشر دوران، تهران
۳. صفوی، امان‌الله، (۱۳۹۰)، کلیات روش‌ها و فنون تدریس (متن کامل)، نشر معاصر، تهران.
۴. کانیدی، اعظم، (۱۳۹۳)، از تجزیه تحلیل محتوای برنامه درسی ۲۰۶۱ بیاموزیم، مجله رشد آموزش ریاضی، ش ۱۱۵

5. Anderson, L. W. ,&Kratwohl,d. (Eds.) (2001). A Taxonomy For learning, Teaching and Assesing: A Revision of Bloom's Taxonomy Of Educational Objectives, New York:Longman,

تلفیق روش های آموزش- و ارائه راهبردهای نوین در آموزش ریاضی

مقدمه

مغز انسان دارای ده توانایی بالقوه است. برخی از این توانایی ها شامل یادآوری، مقایسه، گروه بندی، تجزیه و تحلیل، و تصور هستند. اگر رشد تفکر، به معنای رشد و پرورش این توانایی ها باشد، بایستی در خلال آموزش، بستری برای رشد این توانایی ها فراهم شود. این در حالی است که رشد یکایک این توانایی ها نیازمند کاربرد آن ها در جریان یادگیری توسط خود فرد است [۱].

در صورتی که انگاره شامل تصور، الگو، طرح، تصویر، ایده و... باشد، فرایند یادگیری را می توان به صورت ساختن انگاره های جدیدی در ذهن و یا گسترش و تعمیم انگاره های موجود تعریف نمود. به علاوه یک مفهوم وقتی یاد گرفته می شود که از ورای تجربیات، مشاهدات و جمع بندی ها به برداشتی از یک شئی یا پدیده تبدیل شود. این در حالی است که علم ریاضی بر پایه مفاهیم عمده انتزاعی و ذهنی شکل گرفته است، لذا اگر بتوان مدل هایی عینی برای همین مفاهیم انتزاعی ایجاد نمود، همزمان با افزایش شهود و نقش دانش آموز در فضای آموزشی، مهارت های تفکری، حرکتی و فیزیکی، اجتماعی، همکاری و... در او پرورش می یابند.

چکیده

بحث پیرامون روش تدریس ریاضی، همواره مطرح بوده و تحقیقات زیادی در این زمینه انجام شده است. در این مقاله روش فعال جهت تدریس ارائه می شود. در این روش، هدف اصلی این است که دانش آموزان در فرایند آموزش پر جنب و جوش باشند. سه اصل آموزش این روش عبارت است از: یادگیری فعال، بهترین انگیزه و تسلسل مراحل. از معایب این روش وقت گیر بودن آن در شروع کار است، تلفیق روش فعال و جهت دهی منطقی به تفکر، طبق بررسی ها باعث کاهش نواقص و افزایش مزایای این روش خواهد شد. مشخص شده است که استفاده همزمان از روش «کارگروهی» بر بازدهی یاددهی می افزاید. در جهت گیری منطقی، هنر حل مسئله دانش آموز تقویت می شود، و لذا دانش آموز حین تفکر به حل مسئله درباره نحوه تفکرش هم می اندیشد. در این مقاله تأثیر تلفیق روش های فوق مورد مطالعه قرار گرفته است.

کلیدواژه ها: روش فعال، تفکر منطقی، کارگروهی،

یادگیری و آموزش ریاضی

در خانه ریاضیات اصفهان فرصت مناسبی برای بررسی و پیاده‌سازی یک فضای عینی در راستای آموزش ریاضی فراهم آمد. در این فرصت فعالیتی شامل کارگروهی و تفکر منطقی در قالب روش فعال انجام گرفت و میزان تأثیر این تلفیق بررسی شد. در این مقاله سعی شده است روش آموزش تلفیقی مطالعه شده جهت استفاده در سایر کلاس‌های آموزشی ارائه شود.

اهداف

در فعالیت مورد نظر، روش فعال، روش تفکر منطقی و کارگروهی به صورت همزمان اجرا شد. هدف از تلفیق روش فعال با کارگروهی و تفکر منطقی، تقویت مهارت‌های فکری و اجتماعی، افزایش بازدهی یادگیری و افزایش قدرت تحلیل دانش‌آموزان حین آموزش ریاضی، و همچنین کاهش نقایص ناشی از استفاده مجزا از هر روش است.

تعاریف روش فعال

در روش فعال، هدف این است که دانش‌آموزان در فرایند آموزش، فعال و پرجنب و جوش باشند. برخلاف روش‌های منفعل که «معلم‌محور» است روش فعال «دانش‌آموز‌محور» است، یعنی دانش‌آموز در امر یادگیری شرکت فعال دارد، با مسائل مواجه می‌شود، راجع به حل آن‌ها فکر می‌کند و با راهنمایی معلم به حل آن‌ها می‌پردازد. در این روش دانش‌آموز در حین کار، خودش به مفاهیم پی می‌برد. در این صورت است که به حل مسئله‌ها علاقه‌مند می‌گردد. موفقیت این روش، به مهارت معلم و تسلط او به درس بستگی دارد. در این روش، دانش‌آموز از طریق حل مسئله در طی فرایند آموزش به تدریج به مفاهیم پی می‌برد و نسبت به مطالب احساس علاقه و مالکیت می‌کند. همچنین در او حس اعتماد به نفس تقویت می‌شود، چون در به‌دست آوردن نتیجه‌ها و کشف قواعد سهیم است. در جریان کار فعال، دانش‌آموز رشد می‌کند و تفکر منطقی‌اش تقویت می‌شود. در این روش، برای به‌دست آوردن نتیجه بهتر لازم است سه اصل زیر در آموزش مطالب مورد استفاده قرار گیرد.

۱. اصل یادگیری فعال: در این اصل کشف موضوع یا زیرموضوع توسط خود دانش‌آموز ضمن انجام فعالیت‌های مناسب تعریف می‌شود. اگر دانش‌آموز در تنظیم صورت مسئله‌هایی که باید حل کند، شرکت

داشته باشد، خیلی فعال‌تر خواهد بود. بنابراین لازم است معلم شرایطی را فراهم آورد که دانش‌آموز بتواند مسائل خودش را طرح کند.

۲. اصل بهترین انگیزه: در این اصل معلم باید توجه خود را به انتخاب مسئله و ارائه هرچه بهتر آن به دانش‌آموزان معطوف کند. مسئله باید نه تنها از موضع معلم، بلکه از موضع شاگرد هم، جالب باشد. وقتی از دانش‌آموز خواسته می‌شود که نتیجه را حدس بزند، ولو بخشی از آن را، و او فرضیه‌ای ارائه می‌کند، در واقع خود را به آن وابسته کرده است، بنابراین با اشتیاق، به سرنوشت مسئله و کار کلاس علاقه‌مند می‌شود. [۴]

۳. اصل تسلسل مرحله‌ها: در این مرحله بررسی، پژوهش و فراگیری اهمیت می‌یابد. در واقع دانش‌آموز براساس دو اصل قبلی به یادگیری ترغیب می‌شود. بنابراین سه فاز یادگیری در عمل و همزمان با آموزش در کلاس پیاده می‌شود؛ فاز اول: دانش‌آموز حدس و گمان می‌زند. فاز دوم: آن را به صورت کلمات درمی‌آورد و فاز سوم: برای تثبیت یادگیری تمرین و ممارست انجام می‌شود. [۴]

تفکر منطقی

تفکر منطقی روشی است که مغز را ورزش می‌دهد و در آن شکستی وجود ندارد؛ زیرا هر شکستی بخشی از پیروزی بعدی خواهد بود. همچنین دانش‌آموز با نحوه تفکر، توانایی‌ها و ضعف‌هایش آشنا می‌شود و گام به گام درصدد ارزشیابی آن‌ها برمی‌آید. در این مبحث از سه نوع طریقه تفکر؛ تفکر مستقیم، تفکر مرحله‌ای و تفکر راهبردی صحبت می‌شود. در تفکر مستقیم گام‌هایی که برای حل مسئله برداشته می‌شود همگی آشکار نیست و به نظر می‌رسد راه حل با یک جرعه ناگهانی در ذهن پیدا می‌شود. در فکر کردن مرحله‌ای، راه حل از طریق گام‌های پیش‌رونده پیدا می‌شود و حتماً لازم نیست گام برداشته شده منطقی باشد، با این حال گام‌ها یکی پس از دیگری برداشته می‌شوند. در تفکر راهبردی از بین گام‌های موجود بهترین انتخاب می‌شود، لذا هدف انتخاب سازگارترین گام موجود در رسیدن به حل مسئله است [۶].

کارگروهی

کارگروهی یکی از مؤثرترین روش‌های انجام فعالیت است که براساس قوانین و دستورالعمل‌ها اجرا می‌شود، به عنوان مثال قوانین در سطح اول شامل؛ ورود آرام و

سریع به گروه، مانند در گروه تا زمان اتمام کار، دانستن وظیفه خود، سطح دوم نوبت گرفتن، نظر خود را بیان کردن، از نظر خود با دلیل دفاع کردن، تشویق به مشارکت، قدردانی از مشارکت دیگران، تمرکز تیم روی وظیفه‌اش و در سطح سوم توضیح دادن، تفسیر نظرات، تحلیل روند کار گروه خود، به اتفاق نظر رسیدن و نهایتاً انتقاد از نظر نه از فرد است. با اجرای این روش به تدریج وابستگی مثبت بین افراد، مسئولیت‌پذیری، تأکید بر وظیفه و ادامه آن، پرورش مهارت‌های اجتماعی و مساعدت دوجانبه در افراد گروه شکل می‌گیرد. یکی از ترندهای اجرای کار گروهی، به صحبت آوردن و بیان نظرات دانش‌آموزان با کمک روش «شکستن یخ»^۱ است [۸، ۹].

روش کار

قبل از شروع هر کلاس لازم است سطح اطلاعات دانش‌آموزان معلوم شود و متناسب با آن طرح کلاس نوشته و تعداد جلسات لازم تعیین گردد. حل یک مسئله می‌تواند موضوع اصلی کلاس باشد به نحوی که با سطح اطلاعات دانش‌آموزان هم‌خوانی داشته باشد تا دانش‌آموزان با یادآوری برخی از مباحث از پیش آموخته، توانایی صحبت در کلاس را داشته باشند [۳]. در واقع مسئله بایستی به گونه‌ای مطرح شود که در کنار ایجاد انگیزه جهت پیگیری و یادگیری، زمینه مشارکت و صحبت دانش‌آموزان در کلاس را فراهم آورد، تا یک یا چند نفر متکلم‌های اصلی کلاس نشوند [۴].

در این مرحله با کمک دانش‌آموزان، باید موضوع اصلی به زیرموضوع‌های مختلف تقسیم شود. در واقع این لحظه، اولین زمانی است که دانش‌آموزان در کلاس شرکت می‌کنند لذا نحوه برخورد مدرس با پیشنهادها دانش‌آموزان می‌تواند در ادامه روند کلاس بسیار مؤثر باشد. با برقراری صمیمیت در کلاس و حتی بین افراد گروه، اصل شکستن یخ اجرا می‌شود و لذا ترس دانش‌آموز برای بیان نظراتش کاهش می‌یابد. در ادامه برای درک بهتر و جهت بخشی به صحبت‌های دانش‌آموزان، سؤالاتی توسط مدرس مطرح شود تا در کلاس ضمن دادن فرصت تفکر به دانش‌آموز، این امکان را به او بدهد که به تفکرهايش جهت داده و با هم‌گروهی‌هایش بهتر مشورت کند. در این میان باید از هر فرصتی برای عینی و عملی نمودن موضوعات کمک گرفته شود تا ضمن فعالیت بیشتر دانش‌آموز سر کلاس و رفع خستگی او، مفاهیم ذهنی به انگاره‌های

عینی تبدیل شوند. در این جریان دانش‌آموز گام به گام ضمن گذر از کار انفرادی به گروهی، از تفکر مستقیم و انفرادی بر موضوع، تفکر مرحله‌ای را نیز تجربه نمودند [۸، ۶].

از بین پیشنهادها دانش‌آموزان، جواب‌هایی را که به پیشرفت کلاس کمک می‌کند انتخاب کنید و سعی کنید با برقراری تسلسل مراتب یا شیوه‌هایی چون پیکان عمودی، ارتباطی بین جواب‌ها ایجاد کنید. این کار، پیشرفت کلاس و درک ارتباط مطالب برای دانش‌آموزان را راحت‌تر می‌کند. اگر سخنان دانش‌آموزان بیشتر به صورت نجوا باشد، قوانینی بر مبنای کار گروهی گذاشته شود. برخی از این قوانین بلند صحبت کردن و سکوت به هنگام صحبت سایر دانش‌آموزان است [۸، ۷، ۹].

یکی از مراحل مقدماتی تحقیق و آموزش، «طرح سؤال» است. نباید ترسی از بابت طرح سؤال در دانش‌آموزان ایجاد شود، تقسیم موضوع تا جایی ادامه می‌یابد که در کلاس نتیجه شود طرح سؤال کافی است و باید به دنبال جواب بود و لذا با فرایند معکوس از انتهای مطالب شروع کرده و ادامه دهید تا به موضوع ابتدای کلاس منتهی شوید. در این مسیر لازم نیست هر چیزی تعریف شود چون برخی اوقات، کلماتی مطرح و پیشنهاد می‌شود که کل کلاس جواب مورد قبولی برای آن ارائه نمی‌دهد، چنین کلماتی به مطالعه و بحث بیشتری نیاز دارند، می‌توان این کلمات را به عنوان تحقیق مطرح نمود و در مورد آن‌ها در ساعات اضافی کلاس صحبت کرد [۱۰، ۶]. اغلب چنین موضوعاتی در جلسات بعدی بسیار مؤثر هستند.

از هر فرصت برای «عینیت» بخشیدن به موضوع استفاده نمایید. در این راستا از ابزارهای آموزشی استفاده کنید؛ ابزارهایی مثل نقاله، پرگار و خط‌کش با هدف ارتقای توانایی ترسیم شکل دانش‌آموزان و حل زیر مسئله‌ها بسیار مفید است. از دانش‌آموزان بخواهید تا با رسم جدول نظام‌دار و نوشتن جواب‌ها در آن، خودشان به ارتباط‌های ممکن بین جواب‌ها پی ببرند.

نتیجه‌گیری

روش پیشنهادی، در خانه ریاضیات اصفهان، با موضوع «چندضلعی‌های منظم» اجرا شد. در این دوره، تمامی راه‌کارهای فوق به کار رفت. ایجاد فضای عینی در یادگیری مؤثر، به علاوه استفاده از روش فعال ضمن تقویت روحیه مشارکت و کار گروهی باعث تفهیم بهتر

موضوع می‌شد. در فضای فوق که تمرینی برای انجام کار گروهی بود، دانش‌آموزان از ابتدا تا انتهای جلسه مشترکاً با پای‌بندی بر قوانین تنظیم شده در کلاس روند کار انفرادی به کار گروهی را طی کردند به نحوی که به‌نظر خودشان در انتهای کلاس نتیجه‌گیری و جمع‌بندی مطالب برای اعضا آسان‌تر شده بود. با پیاده‌سازی مقوله‌های مورد نظر، دانش‌آموزان در مهارت‌هایی چون طرح سؤال، پاسخ‌گویی ریاضی‌وار و ساده‌سازی مسئله ممارست و تمرین‌هایی انجام داده بودند.

چون حل مسئله با رسم توأم شد ضمن رفع حالت خستگی ناشی از کلاس، دانش‌آموزان بر نحوه استفاده از این ابزارهای ابتدایی حل مسئله تسلط بیشتری یافتند. روند پاسخ‌گویی معکوس برای سؤالات مطرح شده باعث شد تا ضمن پاسخ‌گویی بهتر به سؤالات، فهم جواب‌های یافت شده برای سؤالات از سوی دانش‌آموزان آسان‌تر شود و ارتباط بین مطالب ریاضی بهتر درک گردد. به‌علاوه، تمرینی برای تعمیم این روش جهت سایر موضوعات از سوی دانش‌آموزان بود. استفاده از جدول نظام‌دار باعث تسریع روند پیشرفت دانش‌آموزان و نیز فهم بهتر مسئله شد. در جریان این روش، تکیه دانش‌آموز بر معلم و هم‌کلاسی‌هایش به‌تدریج کمرنگ شد به نحوی که در انتهای دوره، دانش‌آموزان به تنهایی و بدون تأیید معلم به‌خوبی صحت موضوعی را بررسی و قضاوت مناسبی درباره جواب‌ها داشتند.

از دیگر نتایج به‌دست آمده، تلفیق روش فعال با «هنر سریع فکر کردن» بود که باعث شد تا کمبود زمان به‌خصوص در ابتدای کار با روش فعال به حداقل برسد. این روش می‌تواند گام‌به‌گام تفکر مستقیم و مستقل را به تفکر مرحله‌ای و گروهی و حل راهبردی مسائل جهت دهد. بنابراین حین تفکر بر موضوع پیشرفت سریع‌تر خواهد بود. زیرا کار گروهی مناسب از طریق بحث روی مطالب در مرحله اول در گروه و در مرحله بعد در کلاس باعث شد تا مطالب و تعاریف نامناسب در مرحله گروهی حذف یا تصحیح و سپس در کلاس مطرح شوند. با استفاده از تکنیک‌های کار گروهی نقش دانش‌آموز در کلاس بیشتر شد و تمرکز معلم در کلاس بیشتر در مدیریت زمان متناسب با پیشرفت کلاس و نیاز تأمل بر مطالب صرف می‌شد. در این مقاله شاید به واسطه موضوع و روند کار به تمرکز بیشتری بر مقوله عینیت نیاز بود. در واقع بستگی به موضوع، نحوه اجرا، زمان‌بندی کلاس و رفتار دانش‌آموزان، تمرکز بر

هر یک از مقوله‌های عینیت، ذهنیت متفاوت خواهد شد. با تلفیق روش‌های فعال و جهت‌دهی تفکر توأم با کار گروهی، تمرکز بر موضوعات و مدیریت زمان آسان‌تر شد، ضمن آنکه مهارت‌های ارتباط جمعی، فهم و درک مسائل و مهارت‌های اخلاقی دانش‌آموزان هم رشد یافت.

تشکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر علی رجالی که مرا در زمینه تکمیل و تصحیح این مقاله راهنمایی نمودند تشکر نمایم. همچنین از تمامی همکارانم در خانه ریاضیات اصفهان که در راستای اجرای این طرح مرا یاری نمودند سپاس‌گزارم.

پی‌نوشت‌ها

1. Ice Break

منابع

۱. بهین آیین، ن. ماهیت ریاضیات، چگونگی آموزش و نقش آن در فرایند تفکر، مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۷۱، ۱۳۸۲، صفحه ۴۵-۵۰.
۲. شمس اسفندآباد، ج. روان‌شناسی تفاوت‌های فردی، سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاه‌ها، چاپ اول، ۱۳۸۰.
۳. لوراین، م. اصل یادگیری = حافظه + اطلاعات، ترجمه احمد میرعابدینی، تهران، چکامه، چاپ اول، ۱۳۷۵، صفحه ۳۳-۲۵.
۴. رحمانی، م. آموزش ریاضی و حل مسئله، مشهد، قائم‌المهدی، چاپ اول، ۱۳۸۳.
۵. تابش، ی. حاجی‌بابایی، ج. رستگار، آ. آموزش هنر حل مسئله (ریاضیات تکمیلی)، چاپ اول، ۱۳۷۹، صفحه ۸۰-۳ و ۳۰۵-۲۳۵.
۶. دوبونو، ا. هنر سریع فکر کردن، ترجمه مزدا صدیقی‌افشار، اختران، چاپ سوم، ۱۳۸۷، صفحه ۱۴-۹ و ۱۲۲، ۹۹، ۸۸، ۵۳، ۲۹ و ۲۲-۱۳۹-۱۳۵.
7. Tuckman's Model of Group Development, ATHERTON J S(2003) Learning & Teaching, online: <http://www.dmu.ac.uk/~jamesa/teaching/groupdevelopment.htm>
8. Group dynamic from Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/group_dynamics
9. Index to Group Activities, Games, Exercises & Initiatives(2004), <http://wilderdom.edu>
10. Reuben Hersh, Independent Thinking. The College Math. J.,34(2003)

چند وبگاه مرجع درباره آزمون تیمز

چکیده

با توجه به نتایج ملی آزمون‌های مطالعات تیمز مشاهده می‌شود که جایگاه دانش آموزان ایرانی در کلیه ادوار این آزمون همواره از میانگین بین‌المللی پایین‌تر بوده است. این نتایج ضعیف نیازمند تحقیق و پژوهش‌های فراوان برای علت‌یابی موضوع است. از آنجا که هر پژوهشی نیازمند منابع و اطلاعات است بر آن شدم برخی سایت‌های مفید در این زمینه را که می‌توانند برای پژوهشگران این عرصه راهگشا باشند معرفی نمایم. از این جهت مقاله حاضر از نوع نظری-کاربردی می‌باشد.

کلیدواژه‌ها: آزمون تیمز، تیمز، وبگاه مرجع

مقدمه

کشورها از سراسر جهان گام‌های مؤثری را در زمینه ارتقا و بهبود سطح یادگیری برداشته است. یکی از مهم‌ترین و گسترده‌ترین مطالعات انجام شده توسط IEA، مطالعه بین‌المللی روندهای آموزش ریاضی و علوم (TIMSS) است که تاکنون بیش از شصت کشور در آن شرکت کرده‌اند.

تاریخچه‌ای مختصر از آزمون تیمز

در سال ۱۹۵۷ میلادی، با پرتاب نخستین قمر مصنوعی به فضا در اتحاد جماهیر شوروی، آمریکایی‌ها احساس عقب‌ماندگی کردند. از آن پس در جامعه آمریکا توجهات زیادی به امر آموزش معطوف شد چرا که آن‌ها علت عقب‌افتادگی خود در رقابت فضایی را

نظام‌های آموزشی در همه جا از ارکان مهم توسعه جوامع به‌شمار می‌آیند. اصولاً جوامع، اهداف و آرمان‌های خود را از طریق تأسیس این نظام‌ها دنبال می‌کنند. با این تعبیر، آموزش و پرورش را می‌توان الگوی کلی نهادها و مؤسسات موجود در جامعه قلمداد نموده، و یا رشد و توسعه جوامع را در گرو رشد و توسعه نظام‌های آموزشی ممکن دانست (کیامنش و خیریه، ۱۳۷۹).

انجمن بین‌المللی ارزشیابی پیشرفت تحصیلی (IEA) از مؤسسات پژوهشی معتبری است که با سابقه بیش از نیم قرن و انجام ده‌ها مطالعه بین‌المللی در موضوعات مختلف آموزشی و جلب مشارکت

ضعف در امر آموزش مدرسه‌ای دیدند. آغاز «دوران ریاضیات جدید» و همچنین «رجعت به اصول» گواهی است بر این مدعا.

در همان زمان ویلیام وال، نخستین رئیس انجمن بین‌المللی ارزشیابی پیشرفت تحصیلی (IEA) در فاصله سال‌های ۱۹۵۸ تا ۱۹۶۲ تلاش خود را برای انجام مطالعات بین‌المللی آغاز کرد و در سال‌های ۶۷-۱۹۵۹ اولین مطالعه بین‌المللی ریاضی (FIMS) (First International Mathematics Study) را با کمک یونسکو انجام داد. انجمن، به‌علاوه، در سایر حوزه‌های آموزشی هم، در سال‌های ۷۳-۱۹۶۶ اولین مطالعه بین‌المللی علوم (First International Science Study)، در سال‌های ۸۹-۱۹۷۶ دومین مطالعه بین‌المللی ریاضی (SIMS) (Second International Science Study) و در سال‌های ۸۹-۱۹۸۰ دومین مطالعه بین‌المللی علوم (SISS) (Second International Science Study) را طراحی و اجرا کرد. همچنین از سال ۱۹۹۵ به بعد به‌طور منظم هر ۴ سال یک بار دو موضوع ریاضی و علوم با هم و همزمان مورد آزمون بین‌المللی قرار گرفته که به آزمون تیمز (TIMSS) (Third International Mathematics and Science Study) مشهور شده است.

تعداد کشورهای شرکت‌کننده در مطالعات انجمن بین‌المللی ارزشیابی پیشرفت تحصیلی در هر دوره (۱۹۹۵، ۱۹۹۹، ۲۰۰۳، ۲۰۰۷، ۲۰۱۱) متفاوت بوده است. در مطالعات اخیر علاوه بر کشورهای اروپایی، امریکای شمالی و جنوب شرقی آسیا چندین کشور از خاورمیانه، آسیای مرکزی و آفریقا نیز شرکت داشته‌اند.

از سال ۲۰۰۳ به بعد نام «سومین مطالعه بین‌المللی ریاضیات و علوم» به «مطالعه بین‌المللی روند ریاضی و علوم» (Trend International Mathematics and Science Study) تغییر نام داد. شایان ذکر است که به دلیل یکسان بودن حرف اول دو کلمه سومین و روند در زبان انگلیسی (Third & Trend) در علامت اختصاری مطالعه (TIMSS) تغییری به‌وجود نیامد.

مطالعه تیمز روی سه نوع جمعیت صورت می‌گیرد: جمعیت اول، دانش‌آموزان پایه چهارم (چهارم ابتدایی) جمعیت دوم، دانش‌آموزان پایه هشتم (پایه سوم راهنمایی) جمعیت سوم، دانش‌آموزان پایه دوازدهم (سال آخر دوره دبیرستان و فنی حرفه‌ای).

هدف از مطالعات تیمز ارزیابی عملکرد

دانش‌آموزان، بهبود فرایندهای یاددهی و یادگیری ریاضی و علوم و فراهم نمودن اطلاعات در مورد پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان در ارتباط با انواع متفاوت برنامه‌های درسی، اقدامات آموزشی و محیط مدرسه بر عملکرد دانش‌آموزان است.

جایگاه ایران در تیمز

کشور جمهوری اسلامی ایران به‌منظور ارزیابی و بهبود نظام آموزشی خود از سال ۱۳۷۰ برابر با ۱۹۹۱ میلادی رسماً همکاری خود را با انجمن بین‌المللی ارزشیابی پیشرفت تحصیلی آغاز کرده و تاکنون در مطالعات دوره‌های ۱۹۹۵، ۱۹۹۹، ۲۰۰۳، ۲۰۰۷، ۲۰۱۱ و تیمز پیشرفته، ۲۰۰۸، شرکت کرده است و هم‌اکنون در حال تدارک و اجرای آزمون تیمز ۲۰۱۵ می‌باشد.

نتایج آزمون‌های تیمز در دوره‌های مختلف آزمون به شرح زیر است:

رتبه ایران در تیمز ۱۹۹۵	رتبه ایران در تیمز ۱۹۹۹	رتبه ایران در تیمز ۲۰۰۳	رتبه ایران در تیمز ۲۰۰۷	رتبه ایران در تیمز ۲۰۱۱
تعداد کل کشورهای شرکت‌کننده	تعداد کل کشورهای شرکت‌کننده	تعداد کل کشورهای شرکت‌کننده	تعداد کل کشورهای شرکت‌کننده	تعداد کل کشورهای شرکت‌کننده
۲۵ ۳۶	-	۲۲ ۲۵	۲۸ ۳۶	۴۳ ۵۰
ریاضیات پایه چهارم				
۲۵ ۳۶	-	۲۲ ۲۵	۲۷ ۳۶	۳۸ ۵۰
علوم پایه چهارم				
۳۷ ۴۱	۳۳ ۳۸	۳۴ ۴۶	۳۴ ۴۹	۳۲ ۴۲
ریاضیات پایه سوم راهنمایی				
۳۸ ۴۱	۳۱ ۳۸	۳۱ ۴۶	۲۹ ۴۹	۲۲ ۴۲
علوم پایه سوم راهنمایی				

رتبه دانش‌آموزان ایران در دروس ریاضیات و علوم در دو پایه چهارم ابتدایی و سوم راهنمایی در سال‌های ۱۹۹۵، ۱۹۹۹، ۲۰۰۳، ۲۰۰۷، ۲۰۱۱ و ۲۰۱۵

با نگاهی گذرا به نتایج آزمون تیمز واضح است که دانش‌آموزان ایرانی عملکرد ضعیفی در این آزمون داشته‌اند و با توجه به اینکه نمونه انتخابی از سوی انجمن بین‌المللی پیشرفت تحصیلی معرف کل جامعه دانش‌آموزی کشور است و نیز با عنایت به جایگاه برجسته و ممتاز ایران در المپیادهای علمی لازم است پژوهش‌هایی در این خصوص صورت گیرد تا علت این ضعف مشخص گردد و سهم هر یک از عوامل تأثیرگذار بر عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان تعیین گردد و معلوم شود چگونه می‌توان درصدد برطرف کردن نقاط ضعف برآمد. اما همان‌طور که مسلم است از مهم‌ترین نیازهای یک محقق و پژوهشگر اطلاعات است، اطلاعاتی که بتوان با کمک آن نتایج ارزشمندی

در رابطه با نظام آموزش کشور به دست آورد.

در همین راستا بر آن شدیم تا برخی از مهم‌ترین و کامل‌ترین منابع و وبگاه‌هایی را که اطلاعات مربوط به آزمون‌های تیمز و پرلز را در ادوار مختلف در بر دارند معرفی نماییم تا از این طریق زمینه برای تحقیق و پژوهش افراد علاقه‌مند فراهم آید.

۱. وبگاه انجمن بین‌المللی پیشرفت تحصیلی (IEA)

نشانی این وبگاه عبارت است از (www.iea.nl). این سایت مرجعی است کامل از کلیه اطلاعات مربوط به آزمون‌های بین‌المللی از جمله تیمز و پرلز که توسط انجمن IEA برگزار شده است.



در این سایت قسمت‌های متفاوتی از جمله مطالعات انجام شده، کتاب‌ها و مقالات منتشر شده پیرامون آزمون‌ها و نیز کنفرانس‌های برگزار شده می‌باشد. اما مهم‌ترین قسمتی که می‌توان بدان اشاره کرد سربرگ data است که در آن می‌توان به کلیه داده‌های مربوط به آزمون‌های برگزار شده دست یافت. داده‌هایی شامل:

۱. پاسخ دانش‌آموزان کشورهای شرکت‌کننده به سؤالات؛
 ۲. پاسخ دانش‌آموزان کشورهای شرکت‌کننده به پرسش‌نامه‌های دانش‌آموز؛
 ۳. پاسخ دبیران کشورهای شرکت‌کننده به پرسش‌نامه‌های معلم؛
 ۴. پاسخ مدیران مدارس کشورهای شرکت‌کننده به پرسش‌نامه‌های مدیران مدرسه.
- گفتنی است که در آزمون تیمز علاوه بر سؤالاتی که دانش‌آموزان در دو درس ریاضی و علوم پاسخ می‌دهند، سه نوع پرسش‌نامه دانش‌آموز، مدیر مدرسه و دبیر مربوطه نیز باید پاسخ داده شود. این پرسش‌نامه‌ها حاوی مطالبی پیرامون وضع اقتصادی خانواده، امکانات مدرسه، سابقه دبیر و ... است که خود منبع بسیار مناسبی برای تحقیق و پژوهش است.

۲. وبگاه مرکز ملی مطالعات بین‌المللی تیمز و پرلز



نشانی این وبگاه <http://timsspirils.ir> می‌باشد. این وبگاه شامل قسمت‌هایی مانند انتشارات، پژوهش‌ها و گزارش‌های تحلیلی است. یکی از بخش‌های مفید این وبگاه پرسش‌نامه‌های دبیر، دانش‌آموز و مدیر مدرسه است که به زبان فارسی نیز قابل دریافت است.

۳. وبگاه پژوهشگاه مطالعات آموزش و پرورش

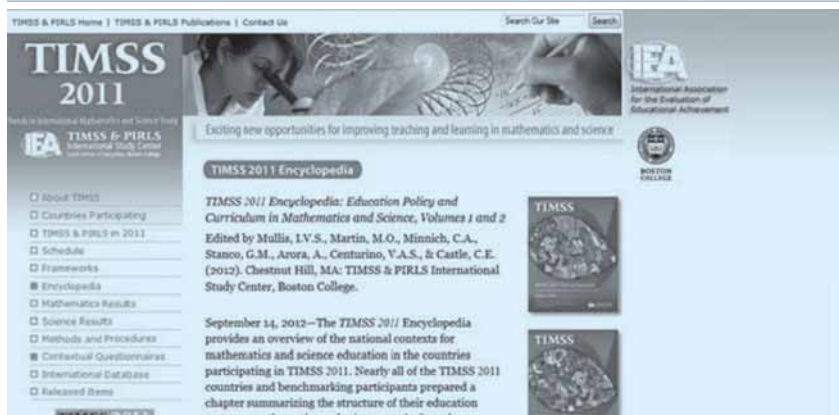
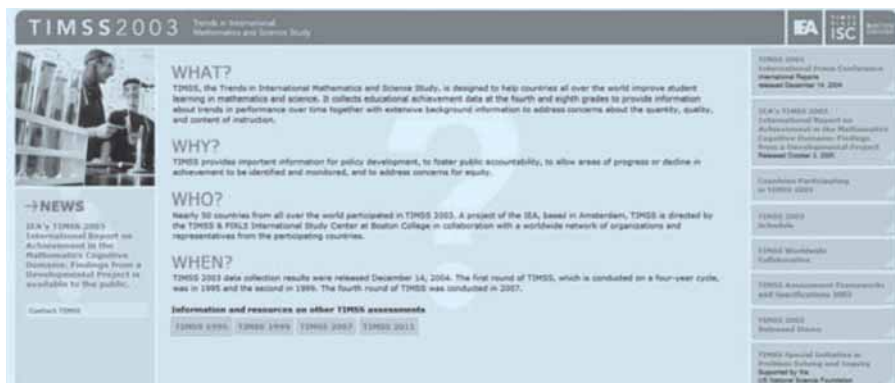
نشانی این وبگاه <http://www.rie.ir> است و شامل بخش‌های مفیدی از جمله طرح‌های در حال اجرا، پایان‌نامه، مقاله و کتابخانه می‌باشد. همچنین در قسمت «مرکز ملی مطالعات تیمز و پرلز» آخرین اخبار



گزارش‌ها و کارگاه‌های آموزشی پیرامون تیمز و پرلز قابل دسترسی است. در این وبگاه به هر دوره از آزمون‌های تیمز نیز یک وبگاه فرعی اختصاص یافته است که شامل اطلاعات، تحقیقات و گزارش‌های منتشر شده پیرامون آزمون مورد نظر می‌باشد. این وبگاه‌های فرعی عبارتند از:

- الف. تیمز ۱۹۹۵: <http://timss.bc.edu/timss1995.html>
- ب. تیمز ۱۹۹۹: <http://timss.bc.edu/timss1999.html>
- ج. تیمز ۲۰۰۳: <http://timss.bc.edu/timss2003.html>
- د. تیمز ۲۰۰۷: <http://timss.bc.edu/timss2007.html>
- ه. تیمز ۲۰۱۱: <http://timss.bc.edu/timss2011.html>





در این مجموعه سایت اطلاعات مفیدی به لحاظ تحقیق و پژوهش موجود است که بیان همه آن‌ها از حوصله این بحث خارج است، اما به عنوان نمونه می‌توان به بخش encyclopedia اشاره کرد که شامل توضیحاتی پیرامون نظام‌های آموزشی هر یک از کشورهای شرکت‌کننده در آزمون است.

منابع

۱. احمدی، حمیده (۱۳۹۱). تحلیل عوامل مرتبط با پیشرفت تحصیلی ریاضیات دانش‌آموزان ایرانی پایه دوازدهم شرکت‌کننده در مطالعه تیمز پیشرفته ۲۰۰۸. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمان.
۲. استیگلر، جیمز و جیمز هیبرت. (۱۳۹۰). **شکاف آموزشی؛ بهترین ایده‌ها از معلمان جهان برای بهبود آموزش در کلاس درس**. مترجمان: دکتر محمدرضا سرکارآزانی، علی‌رضا مقدم، انتشارات مدرسه، تهران.
۳. الماسی، علی محمد. (۱۳۷۵). **آموزش و پرورش تطبیقی**. رشد، چاپ ششم، ۸۲، تهران.
۴. بابانگرد، اسماعیل. (۱۳۸۸). **روش‌های تحقیق در روان‌شناسی و علوم تربیتی** (جلد اول). انتشارات نشر دوران، تهران.
۵. بیرمی‌پور، علی و محمدجواد لیاقت‌دار. (۱۳۸۸). بررسی کیفیت تدریس درس ریاضی پایه چهارم دبستان شهر اصفهان به منظور ارائه راهکارهایی برای بهبود عملکرد دانش‌آموزان در آزمون بین‌المللی تیمز: پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی.
۶. پهلوان صادق، اعظم. (۱۳۸۴). ارتباط پیشرفت ریاضی دانش‌آموزان دختر و پسر ایرانی شرکت‌کننده در مطالعه تیمز ۲۰۰۳ با متغیرهای فردی و خانوادگی. دانشگاه تربیت معلم، تهران.