

معادلات دیفرانسیل

(رشته‌های فنی)

فهرست

پ	فهرست
۳	۱ معادلات مرتبه اول
۴	۱.۱ مقدمه
۷	۲.۱ معادلات مرتبه اول خطی
۱۲	۳.۱ معادلات مرتبه اول غیرخطی
۱۳	۱.۳.۱ معادلات جدائی پذیر
۱۵	۲.۳.۱ معادلات برنولی
۱۷	۳.۳.۱ معادلات کامل
۲۰	۴.۳.۱ معادلات همگن
۲۳	۵.۳.۱ معادلات ریکاتی
۲۵	۶.۳.۱ معادلات لاگرانژ
۲۶	۷.۳.۱ معادلات کلرو
۲۷	۸.۳.۱ عامل انتگرال ساز
۳۱	۹.۳.۱ معادله دسته منحنی
۳۲	۱۰.۳.۱ پوش دسته منحنی
۳۳	۱۱.۳.۱ مسیرهای قائم

۳۹

مراجع

۴۰

نمایه

فصل ۱

معادلات مرتبه اول

۱.۱ مقدمه

مطالعه رشته‌های مختلف علوم و مسائل مهم آن‌ها در قالب ریاضی اغلب منجر به معادله‌ای می‌شوند که شامل یک یا چند متغیر مستقل، تابع مجهول و مشتقات تابع مجهول است. چنین معادله‌ای را **معادله دیفرانسیل** نامند. حل معادله دیفرانسیل یعنی یافتن تابعی که خودش و مشتقاتش در آن معادله صدق نماید. معادلات دیفرانسیل برحسب تعداد متغیرهای مستقل بر دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱. **معادلات دیفرانسیل معمولی.** یک متغیر مستقل داریم و مشتقات معمولی هستند.

مثال ۱.۱.۱

معادله کاهش ماده رادیواکتیو ($R(t)$ برحسب زمان t): $\frac{dR(t)}{dt} = -kR(t)$

معادله کاهش بار خازن (ولتاژ $E(t)$ و ضریب خودالقائی L): $L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E(t)$

۲. **معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی.** چند متغیر مستقل داریم و مشتقات جزئی هستند.

مثال ۲.۱.۱

معادله پتانسیل: $\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y^2} = 0$

معادله موج: $a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$

معادلات دیفرانسیل معمولی را بحث خواهیم کرد که در حالت کلی به صورت $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ بیان می‌شوند.

تعریف ۳.۱.۱. بالاترین مرتبه مشتق y در یک معادله دیفرانسیل را **مرتبه معادله دیفرانسیل** گویند. به طور مثال معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$ یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو است.

تعریف ۴.۱.۱. اگر بتوان معادله دیفرانسیل را به صورت چندجمله‌ای نسبت به مشتقاتش نوشت، بزرگترین توان موجود برای بالاترین مرتبه مشتق y در معادله را **درجه معادله دیفرانسیل** گویند.

مثال ۵.۱.۱. ممکن است یک معادله درجه نداشته باشد:

معادله مرتبه دوم و درجه اول: $y'' + y'y = x^2 + \sin x$

معادله مرتبه سوم و درجه پنجم: $(y''')^5 + 3y'' - 4x(y')^7 = \tan x$

معادله مرتبه سوم که درجه ندارد: $(y''')^5 - \cos(y') = 0$

جواب خصوصی معادله تابعی مانند $y = \phi(x)$ است که با مشتقاتش در معادله $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ صدق کنند.

مثال ۶.۱.۱. تابع $y = x^3$ یک جواب خصوصی معادله $xy' - 3y = 0$ است.

توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ جواب‌های خصوصی معادله $y'' + y = 0$ هستند.

جواب عمومی معادله تابع جوابی مانند $y = \phi(x, c)$ است که هر جواب معادله را بتوان با یک مقدار معلوم برای ثابت c از آن به دست آورد. یافتن جواب خصوصی $y = \phi(x)$ از روی جواب عمومی معادله با حذف c ممکن هست و برای این کار معلوم بودن یک نقطه (x_0, y_0) از تابع جواب کافی است.

مثال ۷.۱.۱. تابع $y = cx^3$ جواب عمومی معادله $xy' - 3y = 0$ است.

تابع $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ جواب عمومی معادله $y'' + y = 0$ هستند.

مثال ۸.۱.۱. تابع $y = cx^3$ جواب عمومی معادله $xy' - 3y = 0$ است. اگر شرط $y(1) = 3$ را داده باشند با قرار دادن $x = 1$ و $y = 3$ در جواب عمومی معادله مقدار $c = 3$ به دست می‌آید و لذا $y = 3x^3$ جواب خصوصی معادله خواهد بود.

تعریف ۹.۱.۱. یک معادله دیفرانسیل همراه با یک شرط اولیه را یک مسئله مقدار اولیه نامند. شرایطی را که تحت آن مسئله مقدار اولیه مربوط به معادله خطی مرتبه اول دارای یک و فقط یک جواب است به قضیه وجود و یکتایی جواب معروف است.

قضیه ۱۰.۱.۱. فرض کنیم توابع p و g در بازه $a < x < b$ که حاوی نقطه $x = x_0$ است پیوسته باشند. آنگاه تابع یکتای $y = \phi(x)$ وجود دارد که در معادله دیفرانسیل $y' + p(x)y = g(x)$ به ازای هر $a < x < b$ صدق می‌کند و شرط اولیه $y_0 = y(x_0)$ در آن برقرار است.

جواب غیرعادی معادله تابع جوابی مانند $y = \psi(x)$ است که نتوان آن را از روی جواب عمومی به دست آورد (یعنی هیچ مقدار معلوم c آن را نتیجه ندهد).

مثال ۱.۱.۱.۱. تابع $y = cx - c^2$ جواب عمومی معادله $y = xy' - (y')^2$ است.

تابع $y = \frac{x^2}{4}$ جواب غیرعادی $y = xy' - (y')^2$ است زیرا از جواب عمومی نتیجه نمی‌شود.

۲.۱ معادلات مرتبه اول خطی

معادلات مرتبه اول در حالت کلی به صورت $F(x, y') = 0$ می‌باشند. ساده‌ترین معادله مرتبه اول به فرم $y' = f(x)$ است که جواب آن با یک انتگرال ساده به صورت $y = \int^x f(t)dt + c$ به دست می‌آید که در آن منظور از $\int^x f(t)dt$ ، همان انتگرال $\int f(x)dx$ است اما بدون ثابت c .

مثال ۱.۲.۱. جواب معادله $y' = \cos 2x$ از انتگرال زیر به دست می‌آید.

$$y = \int \cos 2x dx = \int^x \cos 2t dt + c = \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

معادله مرتبه اول خطی در حالت کلی به صورت

$$P_1(x)y' + P_0(x)y = g(x)$$

می‌باشد که در آن $P_1(x) \neq 0$. با تقسیم طرفین معادله بر $P_1(x)$ ، معادله‌ی

$$y' + p(x)y = q(x)$$

نتیجه خواهد شد که در آن توابع $p(x)$ و $q(x)$ توابعی پیوسته بر بازه‌ی مفروض (a, b) هستند.

برای حل معادله مرتبه اول خطی، نخست انتگرال $\int^x p(t)dt$ را محاسبه نموده و عامل انتگرال‌ساز

$$\mu(x) = e^{\int^x p(t)dt}$$

را مشخص می‌کنیم. سپس جواب معادله را از

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)q(x)dx.$$

به دست می‌آوریم. نخست مثال‌هایی از معادلات مرتبه اول خطی و مسائل مقدار اولیه حل می‌کنیم. در ادامه، روش رسیدن به جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی را بحث خواهیم نمود.

مثال ۲.۲.۱. هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$$۱. \quad y' + 3y = e^{-x}$$

$$\begin{aligned}
 p(x) = 3, \quad q(x) = e^{-x} &\longrightarrow \int^x 3dt = 3x \xrightarrow{\text{عامل انتگرال ساز}} \\
 &\longrightarrow \mu(x) = e^{3x} \xleftarrow{\text{قرار دادن در فرمول}} \\
 &\longrightarrow y = \frac{1}{e^{3x}} \int e^{3x} \cdot e^{-x} dx = e^{-3x} \int e^{2x} dx \xleftarrow{\text{جواب معادله}} \\
 &\longrightarrow y = e^{-3x} \left(\frac{1}{2} e^{2x} + c \right) = \frac{1}{2} e^{-x} + ce^{-3x}.
 \end{aligned}$$

$$۲. \quad y' + (\tan x)y = \sin 2x$$

$$\begin{aligned}
 p(x) = \tan x, \quad q(x) = \sin 2x &\longrightarrow \int^x \tan t dt = -\ln(\cos x) \xrightarrow{\text{عامل انتگرال ساز}} \\
 &\longrightarrow \mu(x) = e^{-\ln(\cos x)} = \frac{1}{\cos x} \xleftarrow{\text{قرار دادن در فرمول}} \\
 &\longrightarrow y = \frac{1}{\frac{1}{\cos x}} \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin 2x dx \xleftarrow{\text{جواب معادله}} \\
 &\longrightarrow y = \cos x \int 2 \sin x dx = \cos x (-2 \cos x + c) \\
 &\longrightarrow y = -2 \cos^2 x + c \cdot \cos x.
 \end{aligned}$$

$$۳. \quad y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
 p(x) = \frac{2}{x}, \quad q(x) = \frac{\cos x}{x^2} &\longrightarrow \int^x \frac{2}{t} dt = 2 \ln x \xrightarrow{\text{عامل انتگرال ساز}} \\
 &\longrightarrow \mu(x) = e^{2 \ln x} = x^2 \xleftarrow{\text{قرار دادن در فرمول}} \\
 &\longrightarrow y = \frac{1}{x^2} \int x^2 \cdot \frac{\cos x}{x^2} dx \xleftarrow{\text{جواب معادله}} \\
 &\longrightarrow y = \int \cos x dx = \frac{1}{x^2} (\sin x + c).
 \end{aligned}$$

$$y' - 2xy = -x \quad .۴$$

$$\begin{aligned} p(x) = -2x, \quad q(x) = -x &\longrightarrow \int^x -2t dt = -x^2 \xrightarrow{\text{عامل انتگرال ساز}} \mu(x) = e^{-x^2} \\ &\longrightarrow y = \frac{1}{e^{-x^2}} \int e^{-x^2} \cdot (-x) dx = \int e^t \frac{dt}{2} \\ &\longrightarrow y = e^{x^2} \left(\frac{1}{2} e^{-x^2} + c \right) \\ &\longrightarrow y = \frac{1}{2} + ce^{x^2}. \end{aligned}$$

مثال ۳.۲.۱. مسائل مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y(1) = 0, \quad y' + y = x \quad .۱$$

$$\begin{aligned} p(x) = 1, \quad q(x) = x &\longrightarrow \int^x 1 dt = x \xrightarrow{\text{عامل انتگرال ساز}} \mu(x) = e^x \\ &\longrightarrow y = \frac{1}{e^x} \int e^x \cdot x dx \\ &\longrightarrow y = e^{-x} (xe^x - e^x + c) \\ &\longrightarrow y = x - 1 + ce^{-x} \\ &\longrightarrow x = 1, \quad y = 0 \longrightarrow 0 = 1 - 1 + ce^{-x} \\ &\longrightarrow c = 0 \rightarrow y = x - 1. \end{aligned}$$

$$y(0) = 2, \quad y' + (\cos x)y = \cos x \quad .۲$$

$$\begin{aligned} p(x) = \cos x, \quad q(x) = \cos x &\longrightarrow \int^x \cos t dt = \sin x \xrightarrow{\text{عامل انتگرال ساز}} \mu(x) = e^{\sin x} \\ &\longrightarrow y = \frac{1}{e^{\sin x}} \int e^{\sin x} \cdot \cos x dx \\ (u = \sin x \rightarrow \int e^{\sin x} \cdot \cos x dx = \int e^u du) &\longrightarrow y = e^{-\sin x} (e^{\sin x} + c) \\ &\longrightarrow y = 1 + ce^{-\sin x} \\ x = 0, \quad y = 2 &\longrightarrow 2 = 1 + ce^{-\sin 0} \\ &\longrightarrow c = 1 \rightarrow y = 1 + e^{-\sin x}. \end{aligned}$$

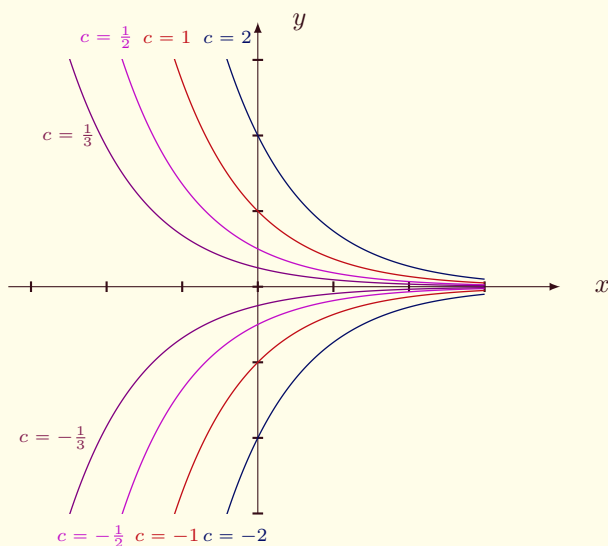
جواب معادله خطی مرتبه اول با بحث روی حالت‌های خاص و تعمیم آن‌ها به دست می‌آید:

حالت خاص ۱. معادلاتی که به شکل $y' + ay = 0$ هستند.

واضح است که توابع چندجمله‌ای، مثلثاتی و لگاریتمی نمی‌توانند جواب معادله فوق باشند و فقط توابع نمایی ممکن است جواب باشند چون مشتق $y = e^{ax}$ برابر $y' = ae^{ax}$ است. لذا باید جواب معادله را مضارب تابع $y = e^{-ax}$ در نظر بگیریم:

$$y = ce^{-ax} \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}} y' = -cae^{-ax} \xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جای‌گذاری}} y' + ay = -cae^{-ax} + cae^{-ax} = 0$$

بنابراین تابع $y = ce^{-ax}$ جواب معادله دیفرانسیل $y' + ay = 0$ است که با تغییر c جواب‌های مختلفی برای معادله به دست می‌آید. این جواب‌ها را خم‌های انتگرال برای معادله نامند.



اگر یکی از خم‌ها جواب معادله باشد، باید نقطه‌ای از آن خم (شرط اولیه $y(x_0) = y_0$) معلوم باشد.

حالت خاص ۲. معادلاتی که به شکل $y' + ay = q(x)$ با شرط $a \neq 0$ هستند.

اگر طرف اول معادله را به صورت مشتق یک تابع بیان کنیم، یعنی $(\quad)' = q(x)$ ، آنگاه با یک انتگرال‌گیری

ساده جواب معادله به دست می‌آید. برای این منظور طرفین معادله را در e^{ax} ضرب می‌کنیم:

$$y' + ay = q(x) \rightarrow e^{ax}y' + ae^{ax}y = e^{ax}q(x)$$

$$\rightarrow (e^{ax}y)' = e^{ax}q(x)$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{e^{ax}} \left(\int e^{ax}q(x)dx \right).$$

حالت خاص ۳. معادلاتی که به شکل کلی $y' + p(x)y = q(x)$ هستند.

اگر بخواهیم طرف اول معادله را به صورت مشتق یک تابع بیان کنیم نیاز به یک تابع مانند $\mu(x)$ داریم که با

ضرب آن در طرفین معادله یعنی $\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x)$ طرف اول به شکل مطلوب درآید:

$$\mu y' + \mu.p.y = (\mu.y)' \rightarrow \mu y' + \mu.p.y = \mu'.y + \mu.y'$$

$$\rightarrow \mu.p.y = \mu'.y = \frac{d\mu}{dx}y$$

$$\rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = p(x)dx.$$

بنابراین عامل انتگرال‌ساز $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ می‌باشد که با ضرب آن معادله به صورت $(\mu(x)y)' = \mu(x)q(x)$

در می‌آید و جواب معادله نتیجه خواهد شد:

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)q(x)dx.$$

۳.۱ معادلات مرتبه اول غیرخطی

برخلاف معادلات مرتبه اول خطی، معادلات مرتبه اول غیرخطی پیچیدگی خاصی دارد و روش کلی برای حل این معادلات وجود ندارد. به همین دلیل دسته خاصی از آن‌ها (معادلاتی به صورت $y' = f(x, y)$) مطالعه شده است. قضیه وجود و یکتایی جواب برای معادلات غیرخطی، نظیر معادلات خطی است:

قضیه ۱.۳.۱. فرض کنیم توابع f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در ناحیه مستطیلی $a < x < b$ و $c < y < d$ که حاوی نقطه (x_0, y_0) است پیوسته باشند. آنگاه در یک زیربازه $[x_0 - h, x_0 + h]$ از $[a, b]$ یک جواب یکتای $y = \phi(x)$ برای مسئله مقدار اولیه

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

وجود دارد.

همان طور که دیدیم جواب معادله مرتبه اول خطی یک فرمول صریح برای $y = \phi(x)$ بود. حال آن که در معادلات غیرخطی به ندرت می‌توان چنین فرمول صریحی به دست آورد و در اغلب موارد جوابی فاقد مشتق y و به صورت ضمنی

$$\varphi(x, y) = 0$$

به دست می‌آید که برای اجتناب از خطای احتمالی به همان صورت ضمنی باقی می‌ماند. هم چنین در بسیاری از مسائل، با رعایت دامنه تابع مقادیر در اعداد حقیقی نامنفی در نظر گرفته می‌شوند و بخاطر همین در داخل لگاریتم از علامت قدر مطلق صرف نظر می‌شود مگر در مواردی که قید آن ضروری باشد.

۱.۳.۱ معادلات جدائی پذیر

معادله مرتبه اول $y' = f(x, y)$ به شکل $\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ و در نتیجه به صورت $M(x, y)dx = N(x, y)dy$ قابل بیان است. در حالتی خاص، این معادله را می‌توان به صورت

$$M(x)dx = N(y)dy$$

نوشت که در آن $M(x, y) = M(x)$ تابعی فقط بر حسب x و نیز $N(x, y) = N(y)$ تابعی فقط بر حسب y است. چنین معادله‌ای را یک معادله جدائی پذیر گویند. جواب یک معادله دیفرانسیل جدائی پذیر با یک انتگرال‌گیری ساده به دست می‌آید.

مثال ۲.۳.۱. هریک از معادلات زیر را حل کنید.

$$۱. \quad y' + y^2 \sin x = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = -y^2 \sin x &\longrightarrow \frac{dy}{-y^2} = \sin x dx && \text{معادله جدائی پذیر} \\ &\longrightarrow \int \frac{dy}{-y^2} = \int (\sin x) dx \\ &\longrightarrow \frac{1}{y} = -\cos x + c \\ &\longrightarrow y = \frac{1}{-\cos x + c}. \end{aligned}$$

$$۲. \quad y' = \frac{\cos 2x}{\cos 4y}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{\cos 2x}{\cos 4y} &\longrightarrow \cos 4y dy = \cos 2x dx && \text{معادله جدائی پذیر} \\ &\longrightarrow \int \cos 4y dy = \int \cos 2x dx \\ &\longrightarrow \frac{1}{4} \sin 4y = \frac{1}{2} \sin 2x + c \end{aligned}$$

$$۳. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1 + y^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} = \frac{\cos x dx}{1 + y^2} &\longrightarrow \frac{1 + y^2}{y} dy = \cos x dx && \text{معادله جدائی پذیر} \\ &\longrightarrow \int \left(\frac{1}{y} + y\right) dy = \int \cos x dx \\ &\longrightarrow \ln |y| + \frac{1}{2} y^2 = \sin x + c. \end{aligned}$$

$$y' = e^{3x-2y} + 4x^3 e^{-2y} \quad .۴$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = e^{-2y}(e^{3x} + 4x^3) &\longrightarrow e^{2y} dy = (e^{3x} + 4x^3) dx && \text{معادله جدائی پذیر} \\ &\longrightarrow \int e^{2y} dy = \int (e^{3x} + 4x^3) dx \\ &\longrightarrow \frac{1}{2} e^{2y} = \frac{1}{3} e^{3x} + x^4 + c. \end{aligned}$$

$$y - xy' = 2(1 + x^2 y') \quad .۵$$

$$\begin{aligned} y - xy' = 2 + 2x^2 y' &\longrightarrow y - 2 = xy' + 2x^2 y' \\ &\longrightarrow y - 2 = (x + 2x^2) \frac{dy}{dx} \\ &\longrightarrow \frac{dy}{y-2} = \frac{dx}{x+2x^2} = \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{2x+1}\right) dx && \text{معادله جدائی پذیر} \\ &\longrightarrow \int \frac{dy}{y-2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{2x+1}\right) dx \\ &\longrightarrow \ln |y-2| = \ln |x| - \ln |2x+1| + c. \end{aligned}$$

$$y' = \sin^2(x - y + 1) \quad .۶$$

$$\begin{aligned} (z = x - y + 1 \rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - y') &\longrightarrow 1 - \frac{dz}{dx} = \sin^2 z \\ &\longrightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - \sin^2 z = \cos^2 z \\ &\longrightarrow \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \int dx && \text{معادله جدائی پذیر} \\ &\longrightarrow \tan z = \tan(x - y + 1) = x + c. \end{aligned}$$

۲.۳.۱ معادلات برنولی

فرم کلی این معادلات به صورت $y' + p(x)y = q(x)y^n$ می باشد. به ازای $n = 0$ و $n = 1$ همان معادله خطی مرتبه اول است. در حالتی که $n \neq 0, 1$ این معادلات با تغییر متغیر $v = y^{1-n}$ به معادله مرتبه اول خطی تبدیل می شود. از این که $v' = (1-n)y^{-n}y'$ ، با ضرب معادله در $(1-n)y^{-n}$ نتیجه لازم به دست می آید:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \longrightarrow (1-n)y^{-n}y' + (1-n)p(x)y^{1-n} = (1-n)q(x)$$

$$\xrightarrow[(1-n)y^{-n}y' = v']{v = y^{1-n}} v' + (1-n)p(x)v = (1-n)q(x).$$

مثال ۳.۳.۱. هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

۱. $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$

$$x^2y' + 2xy = y^3 \longrightarrow y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}y$$

$$n = 3, v = y^{-2} \longrightarrow v' + (-2)\frac{2}{x}v = (-2)\frac{1}{x^2}$$

$$\longrightarrow \int^x \frac{-4}{t}dt = \ln(x^{-4}) \rightarrow \mu(x) = e^{\ln(x^{-4})} = x^{-4}$$

$$\longrightarrow v = \frac{1}{x^{-4}} \int x^{-4} \left(\frac{-2}{x^2} \right) dx = x^4 \int (-2x^{-6}) dx$$

$$\longrightarrow v = x^4 \left(-2 \left(\frac{x^{-5}}{-5} \right) + c \right) = \frac{2}{5x} + cx^4$$

$$\longrightarrow y^{-2} = \frac{2}{5x} + cx^4.$$

۲. $y' + \frac{1}{x}y = (\cos x)y^{-2}$

$$n = -2, v = y^3 \longrightarrow v' + (3)\frac{1}{x}v = (3)\cos x$$

$$\longrightarrow \int^x \frac{3}{t}dt = \ln(x^3) \rightarrow \mu(x) = e^{\ln(x^3)} = x^3$$

$$\longrightarrow v = \frac{1}{x^3} \int x^3 (3 \cos x) dx$$

$$\longrightarrow v = \frac{3}{x^3} (x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + c)$$

$$\longrightarrow y^3 = 3 \sin x + \frac{9}{x} \cos x - \frac{18}{x^2} \sin x - \frac{18}{x^3} \cos x + \frac{c}{x^3}.$$

$$y' + \frac{1}{x}y = y^4 \quad .۳$$

$$\begin{aligned} n = 4, v = y^{-3} &\longrightarrow v' + (-3)\frac{1}{x}v = -3 \\ &\longrightarrow \int^x \frac{-3}{t}dt = \ln(x^{-3}) \rightarrow \mu(x) = e^{\ln(x^{-3})} = x^{-3} \\ &\longrightarrow v = \frac{1}{x^{-3}} \int x^{-3}(-3)dx \\ &\longrightarrow v = x^3 \left(-3\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) + c \right) = \frac{3}{2}x + cx^3 \\ &\longrightarrow y^{-3} = \frac{3}{2}x + cx^3. \end{aligned}$$

$$(x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0 \quad .۴$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{-xy}{x^2 + y^2 + 1} &\longrightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{x^2 + y^2 + 1}{xy} = -\frac{x}{y} - \frac{y^2 + 1}{xy} \\ &\longrightarrow x' + \frac{1}{y}x = \left(-\frac{y^2 + 1}{y}\right)x^{-1}, \\ n = -1, v = x^2 &\longrightarrow v' + 2\frac{1}{y}v = 2\left(-\frac{y^2 + 1}{y}\right) \\ &\longrightarrow \int^y \frac{2}{t}dt = \ln(y^2) \rightarrow \mu(y) = e^{\ln(y^2)} = y^2 \\ &\longrightarrow v = \frac{1}{y^2} \int y^2\left(-2\frac{y^2 + 1}{y}\right)dy = \frac{-2}{y^2} \int (y^3 + y)dy \\ &\longrightarrow v = \frac{-2}{y^2} \left(\frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} + c \right) = \frac{-y^2}{2} - 1 + \frac{c}{y^2} \\ &\longrightarrow x^2 = \frac{-y^2}{2} - 1 + \frac{c}{y^2}. \end{aligned}$$

۳.۳.۱ معادلات کامل

به یاد دارید که دیفرانسیل کامل تابع $z = \varphi(x, y)$ به صورت $d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy$ تعریف شد. هم چنین شرط تساوی $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$ پیوستگی توابع φ_{xy} و φ_{yx} هست.

تعریف ۴.۳.۱. معادله دیفرانسیل $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ را کامل گوئیم هرگاه تابعی چون $\varphi(x, y) = c$ چنان موجود باشد که $d\varphi = Mdx + Ndy$ ، یعنی $\varphi_x = M$ و $\varphi_y = N$.

قضیه ۵.۳.۱. فرض کنیم توابع M, N, M_x و N_y در ناحیه مستطیلی $a < x < b$ و $c < y < d$ پیوسته باشند. آنگاه معادله دیفرانسیل $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ در ناحیه فوق یک معادله کامل است اگر و فقط اگر $M_y = N_x$.

برای حل یک معادله دیفرانسیل کامل به روش زیر عمل می کنیم:

$$\begin{aligned} \varphi_x = M & \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{انتگرال}} \varphi = \int^x M(t, y)dt + h(y), \quad (*) \\ & \xrightarrow[\text{نسبت به } y]{\text{مشتق}} \varphi_y = \int^x M_y(t, y)dt + h'(y) = N \\ & \longrightarrow h'(y) = N - \int^x M_y(t, y)dt \end{aligned}$$

با محاسبه تابع $h(y)$ از $h'(y)$ و قرار دادن در (*) جواب معادله به صورت $\varphi(x, y) = c$ به دست می آید.

به طور خلاصه، با محاسبه هریک از انتگرال های

$$\begin{aligned} \varphi_x = M & \longrightarrow h(x, y) = \int M(x, y)dx \\ \varphi_y = N & \longrightarrow k(x, y) = \int N(x, y)dy \end{aligned}$$

جواب معادله کامل به صورت $\varphi(x, y) = h(x, y) + k'(x, y) = c$ به دست می آید که در آن $k'(x, y)$ برابر است با $k(x, y)$ منهای جملاتی که در $h(x, y)$ هم وجود دارند.

به عبارتی جواب معادله کامل را می توان با یکی از انتگرال های زیر محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} \int^x M(0, y)dy + \int^y N(x, y)dx &= c \\ \int^x M(x, y)dx + \int^y N(x, 0)dy &= c. \end{aligned}$$

مثال ۶.۳.۱. هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$$(2x^2 + 3y)dx + (3x + e^{2y})dy = 0 \quad ۱.$$

$$M = 2x^2 + 3y, \quad N = 3x + e^{2y} \xrightarrow{\text{مشتق جزئی}} M_y = 3 = N_x$$

$$M = 2x^2 + 3y \longrightarrow \int (2x^2 + 3y)dx = 2\left(\frac{x^3}{3}\right) + 3xy$$

$$N = 3x + e^{2y} \longrightarrow \int (3x + e^{2y})dy = 3xy + \frac{1}{2}e^{2y}$$

$$\longrightarrow 2\left(\frac{x^3}{3}\right) + 3xy + \frac{1}{2}e^{2y} = c.$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2e^y + 2)dy = 0 \quad ۲.$$

$$M = y \cos x + 2xe^y, \quad N = \sin x + x^2e^y + 2 \xrightarrow{\text{مشتق جزئی}} M_y = \cos x + 2xe^y = N_x$$

$$M = y \cos x + 2xe^y \longrightarrow \int (y \cos x + 2xe^y)dx = y \sin x + x^2e^y$$

$$N = \sin x + x^2e^y + 2 \longrightarrow \int (\sin x + x^2e^y + 2)dy = y \sin x + x^2e^y + 2y$$

$$\longrightarrow y \sin x + x^2e^y + 2y = c.$$

$$(e^x \sin y - 2y \sin x)dx + (e^x \cos y + 2 \cos x)dy = 0 \quad ۳.$$

$$M = e^x \sin y - 2y \sin x, \quad N = e^x \cos y + 2 \cos x \xrightarrow{\text{مشتق جزئی}} M_y = e^x \cos y - 2 \sin x = N_x$$

$$M = e^x \sin y - 2y \sin x \longrightarrow \int (e^x \sin y - 2y \sin x)dx = e^x \sin y + 2y \cos x$$

$$N = e^x \cos y + 2 \cos x \longrightarrow \int (e^x \cos y + 2 \cos x)dy = e^x \sin y + 2y \cos x$$

$$\longrightarrow e^x \sin y + 2y \cos x = c.$$

$$(x^2 + y^2)dx + (2xy)dy = 0 \quad ۴.$$

$$M = x^2 + y^2, \quad N = 2xy \xrightarrow{\text{مشتق جزئی}} M_y = 2y = N_x$$

$$M = x^2 + y^2 \longrightarrow \int (x^2 + y^2)dx = \frac{x^3}{3} + xy^2$$

$$N = 2xy \longrightarrow \int (2xy)dy = xy^2$$

$$\longrightarrow \frac{x^3}{3} + xy^2 = c.$$

$$(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})dx - \frac{x}{y^2}dy = 0 \quad .5$$

$$\begin{aligned} M = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad N = -\frac{x}{y^2} &\xrightarrow{\text{مشق جزئی}} M_y = -\frac{1}{y^2} = N_x \\ M = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &\longrightarrow \int (\frac{1}{x} + \frac{1}{y})dx = \ln|x| + \frac{x}{y} \\ N = -\frac{x}{y^2} &\longrightarrow \int (-\frac{x}{y^2})dy = \frac{x}{y} \\ &\longrightarrow \ln|x| + \frac{x}{y} = c. \end{aligned}$$

مثال ۷.۳.۱. منحنی جواب معادله دیفرانسیل $(x^3 - xy^2)dx + (y^3 - x^2y)dy = 0$ از مبدا مختصات می‌گذرد.

شکل منحنی جواب به چه صورتی است؟

حل.

$$\begin{aligned} M = x^3 - xy^2, \quad N = y^3 - x^2y &\xrightarrow{\text{مشق جزئی}} M_y = -2xy = N_x \\ M = x^3 - xy^2 &\longrightarrow \int (x^3 - xy^2)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2y^2}{2} \\ N = y^3 - x^2y &\longrightarrow \int (y^3 - x^2y)dy = \frac{y^4}{4} - \frac{x^2y^2}{2} \\ &\longrightarrow \frac{x^4}{4} - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = c \\ &\longrightarrow x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 - y^2)^2 = c \\ x = 0, \quad y = 0 &\longrightarrow c = 0 \\ &\longrightarrow x^2 = y^2. \end{aligned}$$

دو خط عمود برهم $y = x$ و $y = -x$.

۴.۳.۱ معادلات همگن

معادله دیفرانسیل $y' = f(x, y)$ را همگن گوئیم هرگاه تابع f به صورت تابعی برحسب $\frac{y}{x}$ قابل بیان باشد. به عبارت دیگر، معادله $y' = f(x, y)$ همگن است هرگاه بتوان به صورت $y' = F(\frac{y}{x})$ نوشت. این معادله با استفاده از تغییر متغیر $v = \frac{y}{x}$ و مشتق گیری حل می شود:

$$\begin{aligned} y = vx & \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}} y' = v + xv', \quad F\left(\frac{y}{x}\right) = F(v) \\ y' = F(v) & \longrightarrow v + x \frac{dv}{dx} = F(v) \\ & \longrightarrow \frac{dv}{F(v) - v} = \frac{dx}{x} \\ & \longrightarrow \int \frac{dv}{F(v) - v} = \int \frac{dx}{x} \\ & \longrightarrow \int \frac{dv}{F(v) - v} = \ln|x| + c_1 = \ln|cx| \\ & \longrightarrow \int \frac{dv}{F(v) - v} = \ln|cx|. \end{aligned}$$

قضیه ۸.۳.۱. معادله $y' = f(x, y)$ همگن است اگر و فقط اگر به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ ، $f(x, tx) = f(1, t)$.

مثال ۹.۳.۱. هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$$۱. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right) \longrightarrow F(v) = v^2 + 2v \\ &\longrightarrow \int \frac{dv}{F(v) - v} = \int \frac{dv}{v^2 + v} \\ \frac{1}{v^2 + v} &= \frac{1}{v} - \frac{1}{v + 1} \longrightarrow \int \frac{dv}{F(v) - v} = \ln|v| - \ln|v + 1| \\ &\longrightarrow \ln\left|\frac{v}{v + 1}\right| = \ln|cx| \\ &\longrightarrow \left|\frac{v}{v + 1}\right| = |cx| \\ &\longrightarrow \left|\frac{y}{x + y}\right| = |cx|. \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{x-y} \quad .۲$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{1+3\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} &\longrightarrow F(v) = \frac{1+3v}{1-v} \\ &\longrightarrow F(v) - v = \frac{1+3v}{1-v} - v = \frac{1+2v+v^2}{1-v} \\ &\longrightarrow \int \frac{dv}{F(v)-v} = \int \frac{(1-v)dv}{(v+1)^2} \\ \frac{1-v}{(v+1)^2} = \frac{2}{(v+1)^2} - \frac{1}{v+1} &\longrightarrow \int \frac{dv}{F(v)-v} = -\frac{2}{v+1} - \ln|v+1| \\ &\longrightarrow -\frac{2}{v+1} - \ln|v+1| = \ln|cx| \\ &\longrightarrow -\frac{2}{\frac{y}{x}+1} - \ln\left|\frac{y}{x}+1\right| = \ln|cx| \\ &\longrightarrow \frac{-2x}{x+y} = \ln|cx| - \ln\left|\frac{y+x}{x}\right| = \ln|c(x+y)|. \end{aligned}$$

$$(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0 \quad .۳$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2} &\longrightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + 3\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \\ &\longrightarrow F(v) = 1 + 3v + v^2 \\ &\longrightarrow \frac{dv}{F(v)-v} = \int \frac{dv}{v^2 + 2v + 1} = \int \frac{dv}{(v+1)^2} \\ &\longrightarrow -\frac{1}{v+1} = \ln|cx| \\ &\longrightarrow -\frac{x}{x+y} = \ln|cx|. \end{aligned}$$

تعریف ۱۰.۳.۱. تابع $f(x, y)$ را همگن از درجه n گوئیم هرگاه به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ ، $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

مثال ۱۱.۳.۱. تابع $f(x, y) = x + y + 1$ همگن نیست اما

تابع $f(x, y) = x + y$ همگن از درجه ۱ است: $f(x, y) = tx + ty = t(x + y) = tf(x, y)$.

تابع $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$ همگن از درجه ۲ است زیرا

$$f(tx, ty) = t^2x^2 + t^2y^2 + 3tx.ty = t^2(x^2 + y^2 + 3xy) = t^2f(x, y).$$

تابع $f(x, y) = \sin\left(\frac{x}{y}\right)$ همگن از درجه ۰ است زیرا $f(x, y) = \sin\left(\frac{tx}{ty}\right) = \sin\left(\frac{x}{y}\right) = f(x, y)$.

برخی معادلات قابل تبدیل به معادلات همگن هستند:

$$(ax + by + c)dx + (a'x + b'y + c')dy = 0$$

اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ آنگاه خطوط $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ در نقطه‌ای مانند (h, k) متقاطع‌اند. از تغییر متغیرهای $x = X + h$ و $y = Y + k$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & (a(X + h) + b(Y + k) + c)dX + (a'(X + h) + b'(Y + k) + c')dY = 0 \\ \longrightarrow & (aX + bY + \underbrace{ah + bk + c}_{\text{صفر}})dX + (a'X + b'Y + \underbrace{a'h + b'k + c'}_{\text{صفر}})dY = 0 \\ \longrightarrow & (aX + bY)dX + (a'X + b'Y)dY = 0 \end{aligned}$$

یک معادله همگن است.

مثال ۱۲.۳.۱. معادله $(x - y + 2)dx + (x + 2y - 1)dy = 0$ را حل کنید.

حل. خطوط $x - y + 2 = 0$ و $x + 2y - 1 = 0$ در نقطه $(-1, 1)$ همدیگر را قطع می‌کنند. با فرض $x = X - 1$ و $y = Y + 1$ معادله همگن

$$(X - Y)dX + (X + 2Y)dY = 0$$

به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dX} &= -\frac{X - Y}{X + 2Y} = -\frac{1 - \frac{Y}{X}}{1 + 2\frac{Y}{X}} \longrightarrow F(v) = \frac{v - 1}{1 + 2v} \\ \longrightarrow & F(v) - v = \frac{v - 1}{1 + 2v} - v = -\frac{2v^2 + 1}{1 + 2v} \\ \longrightarrow & \int \frac{dv}{F(v) - v} = -\int \frac{(1 + 2v)dv}{2v^2 + 1} \\ \frac{1 + 2v}{2v^2 + 1} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4v}{2v^2 + 1} + \frac{1}{2v^2 + 1} \longrightarrow \int \frac{dv}{F(v) - v} = -\frac{1}{2} \int \frac{4v dv}{2v^2 + 1} - \int \frac{dv}{2(v^2 + \frac{1}{2})} \\ \longrightarrow & \int \frac{dv}{F(v) - v} = -\frac{1}{2} \ln |2v^2 + 1| - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}v) \\ \longrightarrow & -\frac{1}{2} \ln(2v^2 + 1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}v) = \ln |cX| \\ \longrightarrow & -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2Y^2 + X^2}{X^2} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \left(\frac{\sqrt{2}Y}{X} \right) = \ln |cX|. \end{aligned}$$

۵.۳.۱ معادلات ریکاتی

معادله مرتبه اول ریکاتی به صورت $y' = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2$ تعریف می‌شود. فرض کنیم y_1 یک جواب خصوصی معادله فوق باشد. با تغییر متغیر $y - y_1 = \frac{1}{v}$ و مشتق‌گیری از آن و جای‌گذاری $y + y_1 = \frac{1}{v} + 2y_1$ تبدیل به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌شود:

$$\begin{aligned} y' - y_1' &= -\frac{v'}{v^2} \longrightarrow (q_1 + q_2y + q_3y^2) - (q_1 + q_2y_1 + q_3y_1^2) = -\frac{v'}{v^2} \\ &\longrightarrow q_2(y - y_1) + q_3(y^2 - y_1^2) = -\frac{v'}{v^2} \\ &\longrightarrow q_2\left(\frac{1}{v}\right) + q_3\left(\frac{1}{v}\right)\left(\frac{1}{v} + 2y_1\right) = -\frac{v'}{v^2} \\ &\longrightarrow q_2 + q_3\left(\frac{1}{v} + 2y_1\right) = -\frac{v'}{v} \\ &\longrightarrow q_2v + q_3 + 2y_1q_3v = -v' \\ &\longrightarrow v' + (q_2 + 2y_1q_3)v = -q_3. \end{aligned}$$

مثال ۱۳.۳.۱. هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$$۱. \quad y_1 = \frac{1}{x}, \quad y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$$

$$\begin{aligned} y - y_1 = \frac{1}{v}, \quad q_2 = -\frac{1}{x}, \quad q_3 = 1 &\longrightarrow v' + \left(-\frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot 1\right)v = -1 \\ &\longrightarrow v' + \frac{1}{x}v = -1 \\ &\longrightarrow \int^x \frac{1}{t} dt = \ln x \rightarrow \mu(x) = e^{\ln x} = x \\ &\longrightarrow v = \frac{1}{x} \int x(-1) dx \\ &\longrightarrow v = -\frac{1}{x} \int x dx \\ &\longrightarrow v = -\frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2} + c \right) = -\frac{x}{2} + \frac{c}{x} \\ &\longrightarrow y = \frac{1}{x} + \frac{1}{-\frac{x}{2} + \frac{c}{x}}. \end{aligned}$$

$$y_1 = \sin x \quad , y' = \frac{2 \cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2 \cos x} \quad .۲$$

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{1}{v}, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = \frac{1}{2 \cos x} \longrightarrow v' + (0 + 2 \cdot \sin x \cdot \frac{1}{2 \cos x})v = -\frac{1}{2 \cos x} \\ &\longrightarrow v' + \frac{\sin x}{\cos x}v = -\frac{1}{2 \cos x} \\ &\longrightarrow \int^x \frac{\sin t}{\cos t} dt = -\ln(\cos x) \rightarrow \mu(x) = e^{-\ln(\cos x)} = \frac{1}{\cos x} \\ &\longrightarrow v = \frac{1}{\frac{1}{\cos x}} \int \frac{1}{\cos x} \left(-\frac{1}{2 \cos x}\right) dx \\ &\longrightarrow v = -\frac{\cos x}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ &\longrightarrow v = -\frac{\cos x}{2} (\tan x + c) = -\frac{\sin x}{2} + c \cdot \cos x \\ &\longrightarrow y = \sin x + \frac{1}{-\frac{\sin x}{2} + c \cdot \cos x}. \end{aligned}$$

$$y_1 = x \quad , y' + (3 - 2x)y + y^2 = x^2 - 3x - 1 \quad .۳$$

$$y' = (x^2 - 3x - 1) - (3 - 2x)y - y^2 \longrightarrow q_2 = -(3 - 2x) = 2x - 3, \quad q_3 = -1$$

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{1}{v}, \longrightarrow v' + (2x - 3 + 2 \cdot x \cdot (-1))v = 1 \\ &\longrightarrow v' - 3v = 1 \\ &\longrightarrow \int^x (-3) dt = -3x \rightarrow \mu(x) = e^{-3x} \\ &\longrightarrow v = \frac{1}{e^{-3x}} \int e^{-3x} \cdot 1 dx \\ &\longrightarrow v = e^{3x} \int e^{-3x} dx \\ &\longrightarrow v = e^{3x} \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} + c \right) \\ &\longrightarrow y = x + \frac{1}{-\frac{1}{3} + c \cdot e^{3x}}. \end{aligned}$$

۶.۳.۱ معادلات لاگرانژ

فرم کلی معادلات لاگرانژ به صورت $y = xf(y') + g(y')$ می‌باشد. برای حل این معادلات تغییر متغیر $P = y'$ را به کار می‌بریم:

$$y = xf(P) + g(P) \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}} y' = f(P) + xP'f'(P) + P'g'(P)$$

$$\longrightarrow P = f(P) + P'(xf'(P) + g'(P))$$

$$\longrightarrow P - f(P) = \frac{dP}{dx}(xf'(P) + g'(P))$$

$$\longrightarrow (P - f(P))\frac{dx}{dP} = xf'(P) + g'(P)$$

$$\longrightarrow (P - f(P))x' - f'(P).x = g'(P). \quad \leftarrow \text{معادله خطی مرتبه اول } x \text{ نسبت به } P$$

یک معادله مرتب اول از x برحسب P است. با محاسبه x و جای‌گذاری در معادله، جواب y هم برحسب پارامتر P حساب می‌شود و لذا جواب معادله به صورت پارامتری خواهد بود.

مثال ۱۴.۳.۱. معادله $y = x - (y')^2$ را حل کنید.

حل.

$$P = y' \rightarrow y = x - P^2 \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}} y' = 1 - 2PP'$$

$$\longrightarrow P = 1 - 2PP'$$

$$\longrightarrow P - 1 = -2P\frac{dP}{dx}$$

$$\longrightarrow (P - 1)dx = -2PdP$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{حالت ۱} \\ P - 1 = 0}]{\text{جواب غیر عادی}} P = 1 \rightarrow y = x - 1$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{حالت ۲} \\ P - 1 \neq 0}]{\text{جواب غیر عادی}} dx = \frac{-2PdP}{P - 1} = \left(-2 - \frac{2}{P - 1}\right)dP$$

$$\longrightarrow x = -2P - 2\ln(P - 1) + c$$

$$\longrightarrow y = -2P - 2\ln(P - 1) - P^2.$$

۷.۳.۱ معادلات کلرو

معادلات کلرو حالت خاصی از معادلات لاگرانژ به صورت $y = xy' + g(y')$ می‌باشند. برای حل این معادلات تغییر متغیر $P = y'$ را به کار می‌بریم:

$$\begin{aligned}
 y = xP + g(P) & \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}} y' = P + xP' + P'g'(P) \\
 & \xrightarrow[\text{از فرض } P = y']{0 = P' \cdot (x + g'(P))} \quad \text{جواب عمومی} \\
 & \xrightarrow[\text{حالت ۱ } P' = 0]{P = c \rightarrow y = xc + g(c)} \\
 & \xrightarrow[\text{حالت ۲ } x + g'(P) = 0]{x = -g'(P), y = -g'(P)P + g(P)} \quad \text{جواب غیرعادی}
 \end{aligned}$$

مثال ۱۵.۳.۱. معادلات زیر را حل کنید.

۱. $y = xy' + \sqrt{y'}$

$$\begin{aligned}
 y = xP + \sqrt{P} & \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}} y' = P + xP' + \frac{P'}{2\sqrt{P}} \\
 & \xrightarrow[\text{از فرض } P = y']{0 = P'(x + \frac{1}{2\sqrt{P}})} \\
 & \xrightarrow[\text{حالت ۱ } P' = 0]{P = c \rightarrow y = xc + \sqrt{c}} \quad \text{جواب عمومی} \\
 & \xrightarrow[\text{حالت ۲ } x + \frac{1}{2\sqrt{P}} = 0]{x = -\frac{1}{2\sqrt{P}}, y = -\frac{1}{2\sqrt{P}}P + \sqrt{P}} \quad \text{جواب غیرعادی}
 \end{aligned}$$

۲. $y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$

$$\begin{aligned}
 y = xP + \sqrt{1 + P^2} & \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}} y' = P + xP' + \frac{2PP'}{2\sqrt{1 + P^2}} \\
 & \xrightarrow[\text{از فرض } P = y']{0 = P'(x + \frac{P}{\sqrt{1 + P^2}})} \\
 & \xrightarrow[\text{حالت ۱ } P' = 0]{P = c \rightarrow y = xc + \sqrt{1 + c^2}} \quad \text{جواب عمومی} \\
 & \xrightarrow[\text{حالت ۲ } x = \frac{-P}{\sqrt{1 + P^2}}]{x = -\frac{P}{\sqrt{1 + P^2}}, y = -\frac{P^2}{\sqrt{1 + P^2}} + \sqrt{1 + P^2}} \quad \text{جواب غیرعادی}
 \end{aligned}$$

۸.۳.۱ عامل انتگرال ساز

برخی از معادلات کامل نیستند اما با ضرب معادله در تابعی که آن را عامل انتگرال ساز می نامیم معادله به یک معادله کامل تبدیل می شود.

مثال ۱۶.۳.۱. نشان دهید معادله $4xe^{-y}dx + \ln x dy = 0$ کامل نیست اما با ضرب در $\mu(x, y) = \frac{e^y}{\ln x}$ به یک معادله کامل تبدیل می شود.

حل. معادله کامل نیست زیرا

$$\begin{aligned} M(x, y) = 4xe^{-y} &\xrightarrow[\text{نسبت به } y]{\text{مشتق}} M_y = -4xe^{-y} \\ N(x, y) = \ln x &\xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}} N_x = \frac{1}{x} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} M_y \text{ و } N_x \text{ برابر نیستند} \\ \text{جدائی پذیر و کامل است} \end{array}$$

$$\xrightarrow[\mu(x) = e^{y/\ln x}]{\text{ضرب در}} \frac{4x}{\ln x} dx + e^y dy = 0$$

مثال ۱۷.۳.۱. نشان دهید $\mu(x) = xy$ یک عامل انتگرال ساز معادله $(2y^2 + 2y)dx + (3xy + 2x)dy = 0$ است.

حل. معادله کامل نیست زیرا

$$\begin{aligned} M(x, y) = 2y^2 + 2y &\xrightarrow[\text{نسبت به } y]{\text{مشتق}} M_y = 4y + 2 \\ N(x, y) = 3xy + 2x &\xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}} N_x = 3y + 2 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} M_y \text{ و } N_x \text{ برابر نیستند} \\ \text{کامل است} \end{array}$$

$$\xrightarrow[\mu(x, y) = xy]{\text{ضرب در}} 2x(y^3 + y^2)dx + x^2(3y^2 + 2y)dy = 0$$

$$\begin{aligned} M(x, y) = 2x(y^3 + y^2) &\xrightarrow[\text{نسبت به } y]{\text{مشتق}} M_y = 2x(3y^2 + 2y) \\ N(x, y) = x^2(3y^2 + 2y) &\xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}} N_x = 2x(3y^2 + 2y) \end{aligned}$$

حال این سوال مطرح می شود که تحت چه شرایطی می توان عامل انتگرال ساز یک معادله را تعیین نمود؟ این سوال در برخی حالت های خاص جواب داده می شود.

فرض کنیم تابع $\mu(x, y)$ عامل انتگرال ساز معادله $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ باشد آنگاه

$$\begin{aligned}
 Mdx + Ndy = 0 & \xrightarrow[\mu(x, y)]{\text{ضرب در}} \mu Mdx + \mu Ndy = 0 && \text{کامل است} \\
 & \xrightarrow[\text{کامل بودن}]{\text{شرط}} (\mu M)_y = (\mu N)_x \\
 & \xrightarrow{\text{مشتق}} \mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x \\
 & \longrightarrow \mu_y M - \mu_x N = \mu(N_x - M_y) \quad (*)
 \end{aligned}$$

حالت خاص ۱. عامل انتگرال ساز μ تابعی فقط برحسب x باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}
 \mu(x, y) = \mu(x) & \xrightarrow{\text{فاقد } y} \mu_y = 0 \\
 & \xrightarrow{(*)} \mu_x = \frac{N_x - M_y}{-N} \mu && \text{برحسب } x \\
 & \longrightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{-N} dx \\
 & \xrightarrow{\text{انتگرال}} \ln(\mu(x)) = \int \frac{N_x - M_y}{-N} dx \\
 & \longrightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{-N} dx} && \text{عامل انتگرال ساز}
 \end{aligned}$$

نتیجه ۱۸.۳.۱. اگر تابع $\frac{N_x - M_y}{-N}$ فقط برحسب x باشد، عامل انتگرال ساز $\mu(x) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{-N} dx}$ خواهد بود.

مثال ۱۹.۳.۱. یک عامل انتگرال ساز برای معادله $(xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$ بیابید.

حل. معادله کامل نیست زیرا

$$\begin{aligned}
 M(x, y) = 3xy + y^2 & \xrightarrow[\text{نسبت به } y]{\text{مشتق}} M_y = 3x + 2y \\
 N(x, y) = x^2 + xy & \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}} N_x = 2x + y && M_y \text{ و } N_x \text{ برابر نیستند} \\
 N_x - M_y = -x - y & \longrightarrow \frac{N_x - M_y}{-N} = \frac{-(x + y)}{-(x^2 + xy)} = \frac{1}{x} \\
 & \longrightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{-N} dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} && \text{برحسب } x \\
 & \longrightarrow \mu(x) = e^{\ln x} = x && \text{عامل انتگرال ساز}
 \end{aligned}$$

حالت خاص ۲. عامل انتگرال ساز μ تابعی فقط برحسب y باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} \mu(x, y) = \mu(y) &\xrightarrow{\text{فاقد } x} \mu_x = 0 \\ &\xrightarrow{(*)} \mu_y = \frac{N_x - M_y}{M} \mu \quad \text{برحسب } y \\ &\longrightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{M} dy \\ &\xrightarrow{\text{انتگرال}} \ln(\mu(y)) = \int \frac{N_x - M_y}{M} dy \\ &\longrightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy} \quad \text{عامل انتگرال ساز} \end{aligned}$$

نتیجه ۲۰.۳.۱. اگر تابع $\frac{N_x - M_y}{M}$ فقط برحسب y باشد، عامل انتگرال ساز $\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$ خواهد بود.

مثال ۲۱.۳.۱. یک عامل انتگرال ساز برای معادله $y \cos x dx + 2 \sin x dy = 0$ بیابید.

حل. معادله کامل نیست زیرا

$$\begin{aligned} M(x, y) = y \cos x &\xrightarrow[\text{نسبت به } y]{\text{مشتق}} M_y = \cos x \\ N(x, y) = 2 \sin x &\xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}} N_x = 2 \cos x \quad N_x \text{ و } M_y \text{ برابر نیستند} \\ N_x - M_y = \cos x &\longrightarrow \frac{N_x - M_y}{-N} = \frac{\cos x}{y \cos x} = \frac{1}{y} \quad \text{برحسب } y \\ &\longrightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{-N} dx} = e^{\int \frac{1}{y} dy} \\ &\longrightarrow \mu(y) = e^{\ln y} = y \quad \text{عامل انتگرال ساز} \end{aligned}$$

حالت خاص ۳. عامل انتگرال ساز μ تابعی فقط برحسب xy باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} u = xy, \quad \mu(x, y) = \mu(u) &\longrightarrow \mu_x = u_x \cdot \mu_u = y \mu_u, \quad \mu_y = u_y \cdot \mu_u = x \mu_u \\ &\xrightarrow{(*)} x \mu_u \cdot M - y \mu_u \cdot N = (N_x - M_y) \mu \\ &\longrightarrow \mu_u = \frac{N_x - M_y}{xM - yN} \mu \quad \text{برحسب } u \\ &\longrightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{xM - yN} d(xy) \\ &\xrightarrow{\text{انتگرال}} \ln(\mu(xy)) = \int \frac{N_x - M_y}{xM - yN} dxy \\ &\longrightarrow \mu(xy) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{xM - yN} dxy} \quad \text{عامل انتگرال ساز} \end{aligned}$$

نتیجه ۲۲.۳.۱. اگر تابع $\frac{N_x - M_y}{xM - yN}$ فقط بر حسب xy باشد، عامل انتگرال ساز $e^{\int \frac{N_x - M_y}{xM - yN} dx}$ است.

مثال ۲۳.۳.۱. یک عامل انتگرال ساز برای معادله $(2y \sin x + xy \cos x)dx + 2x \sin x dy = 0$ بیابید.

حل. معادله کامل نیست زیرا

$$\begin{aligned} M(x, y) &= 2y \sin x + xy \cos x \xrightarrow[\text{نسبت به } y]{\text{مشتق}} M_y = 2 \sin x + x \cos x \\ N(x, y) &= 2x \sin x \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}} N_x = 2 \sin x + 2x \cos x \quad \text{برابر } N_x \text{ و } M_y \text{ نیستند} \\ N_x - M_y &= x \cos x \longrightarrow \frac{N_x - M_y}{xM - yN} = \frac{x \cos x}{x^2 y \cos x} = \frac{1}{xy} \quad \text{بر حسب } xy \\ &\longrightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{xM - yN} dx} = e^{\int \frac{1}{xy} dx} \\ &\longrightarrow \mu(y) = e^{\ln xy} = xy \quad \text{عامل انتگرال ساز} \end{aligned}$$

حالت خاص ۴. عامل انتگرال ساز μ تابعی فقط بر حسب $x^2 + y^2$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} u &= x^2 + y^2, \quad \mu(x, y) = \mu(u) \longrightarrow \mu_x = u_x \cdot \mu_u = 2x \mu_u, \quad \mu_y = u_y \cdot \mu_u = 2y \mu_u \\ &\xrightarrow{(*)} 2y \mu_u \cdot M - 2x \mu_u \cdot N = (N_x - M_y) \mu \\ &\longrightarrow \mu_u = \frac{N_x - M_y}{2(yM - xN)} \mu \quad \text{بر حسب } u \\ &\longrightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{2(yM - xN)} d(xy) \\ &\xrightarrow{\text{انتگرال}} \ln(\mu(xy)) = \int \frac{N_x - M_y}{2(yM - xN)} du \\ &\longrightarrow \mu(xy) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{2(yM - xN)} du} \quad \text{عامل انتگرال ساز} \end{aligned}$$

نتیجه ۲۴.۳.۱. اگر $\frac{N_x - M_y}{2(yM - xN)}$ بر حسب $u = x^2 + y^2$ باشد، عامل انتگرال ساز $e^{\int \frac{N_x - M_y}{2(yM - xN)} du}$ است.

حالت خاص ۵. عامل انتگرال ساز μ تابعی فقط بر حسب $x + y$ باشد.

$$\begin{aligned} u &= x + y, \quad \mu(x, y) = \mu(u) \longrightarrow \mu_x = u_x \cdot \mu_u = \mu_u, \quad \mu_y = u_y \cdot \mu_u = \mu_u \\ &\xrightarrow{(*)} \mu_u \cdot M - \mu_u \cdot N = \mu_u (M - N) = (N_x - M_y) \mu \end{aligned}$$

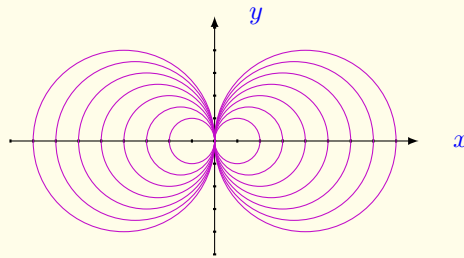
نتیجه ۲۵.۳.۱. اگر $\frac{N_x - M_y}{M - N}$ فقط بر حسب $u = x + y$ باشد، عامل انتگرال ساز $e^{\int \frac{N_x - M_y}{M - N} du}$ است.

۹.۳.۱ معادله دسته منحنی

برای پیدا کردن معادله دیفرانسیل دسته منحنی $f(x, y, c) = 0$ ابتدا با مشتق ضمنی از f نسبت به x ، رابطه $g(x, y, y', c) = 0$ را به دست آورده سپس با حذف c بین این دو رابطه f و g ، معادله دیفرانسیل دسته منحنی نتیجه می‌شود. اگر دسته منحنی n عدد ثابت داشت، n بار مشتق گرفته و ثابت‌ها را حذف می‌کنیم.

مثال ۲۶.۳.۱. معادله دسته منحنی‌های $x^2 + y^2 = 2cx$ را پیدا کنید.

حل.



$$x^2 + y^2 = 2cx \quad (*) \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}} 2x + 2yy' = 2c$$

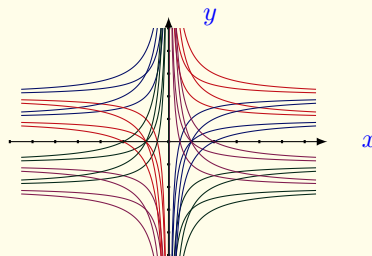
$$\longrightarrow x + yy' = c$$

$$\xrightarrow{(*)} x^2 + y^2 = 2(x + yy')x$$

$$\longrightarrow y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}. \quad \text{معادله دسته منحنی}$$

مثال ۲۷.۳.۱. معادله دسته منحنی‌های $y = \frac{c_1}{x} + c_2$ را پیدا کنید.

حل.



$$y = \frac{c_1}{x} + c_2 \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}} y' = -\frac{c_1}{x^2}$$

$$\xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}} y'' = \frac{2c_1}{x^3}$$

$$\xrightarrow{\text{حذف } c_1} xy'' + 2y' = 0. \quad \text{معادله دسته منحنی}$$

۱۰.۳.۱ پوش دسته منحنی

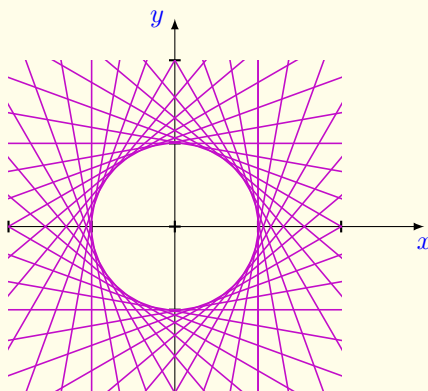
جواب غیرعادی معادله، جوابی است که به ازای هیچ ثابت c از جواب عمومی معادله قابل حصول نباشد.

تعریف ۲۸.۳.۱. پوش یک دسته منحنی در صورت وجود، آن منحنی است که بر تمام منحنی‌های آن دسته (و بر هر یک از منحنی‌هایش در یک نقطه) مماس باشد.

پوش دسته منحنی $f(x, y, c) = 0$ با مشتق‌گیری از f نسبت به c و حذف پارامتر c بین دو رابطه به دست می‌آید.

مثال ۲۹.۳.۱. پوش دسته منحنی‌های $x \sin c + y \cos c = 1$ را مشخص کنید.

حل.



$$x \sin c + y \cos c = 1 \xrightarrow[\text{نسبت به } c]{\text{مشتق}} x \cos c - y \sin c = 0$$

$$x \sin c + y \cos c = 1 \xrightarrow[\sin c]{\text{ضرب در}} x \sin^2 c + y \sin c \cos c = \sin c$$

$$x \cos c - y \sin c = 0 \xrightarrow[\cos c]{\text{ضرب در}} x \cos^2 c - y \sin c \cos c = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حذف } c} x = \sin c, y = \cos c$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

جمع

دایره‌ای به شعاع ۱

تعریف ۳۰.۳.۱. جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول $F(x, y, c) = 0$ را دسته منحنی $f(x, y, c) = 0$

در نظر بگیرید. پوش دسته منحنی (در صورت وجود) همان جواب غیرعادی معادله دسته منحنی است.

۱۱.۳.۱ مسیرهای قائم

تعریف ۳.۱.۳.۱. دو دسته منحنی $f(x, y, c) = 0$ و $g(x, y, c') = 0$ را مسیرهای قائم هم‌دیگر نامیم هرگاه هر یک از معادلات یک دسته بر هر یک از منحنی‌های دسته دیگر عمود باشد.

مسیرهای قائم دسته منحنی $f(x, y, c) = 0$ در دستگاه‌های مختصات:

الف. مختصات دکارتی. با مشتق ضمنی از f نسبت به x ، رابطه $g(x, y, y', c) = 0$ حاصل می‌شود که با حذف c بین دو رابطه f و g ، معادله دسته منحنی به دست می‌آید. سپس با تغییر y' به $-\frac{1}{y'}$ در معادله دسته منحنی، معادله مسیرهای قائم و حل آن منجر به یافتن مسیرهای قائم می‌شود.

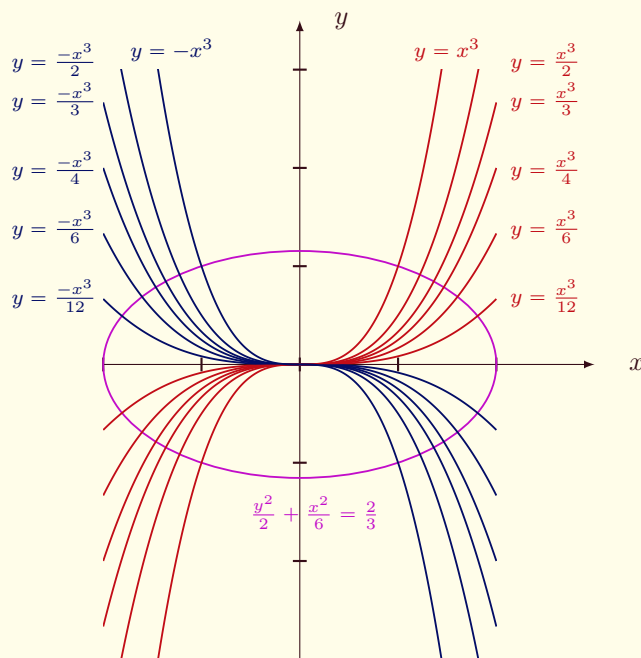
مثال ۳.۲.۳.۱. مسیرهای قائم دسته منحنی $(x^3 + 1)(y^3 + 1) = c$ را بیابید.

حل.

$$\begin{aligned}
 (x^3 + 1)(y^3 + 1) = c & \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}} 3x^2(y^3 + 1) + 3y'y^2(x^3 + 1) = 0 && \text{معادله دسته منحنی} \\
 & \xrightarrow{\div 3} x^2(y^3 + 1) + y'y^2(x^3 + 1) = 0 && \text{معادله مسیرهای قائم} \\
 & \xrightarrow{y' \rightarrow -\frac{1}{y'}} x^2(y^3 + 1) - \frac{1}{y'}y^2(x^3 + 1) = 0 && \text{معادله جدائی‌پذیر} \\
 & \xrightarrow{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}} x^2(y^3 + 1) = \frac{dx}{dy}y^2(x^3 + 1) \\
 & \rightarrow \frac{(y^3 + 1)dy}{y^2} = \frac{(x^3 + 1)dx}{x^2} \\
 & \rightarrow (y + \frac{1}{y^2})dy = (x + \frac{1}{x^2})dx \\
 & \xrightarrow{\text{انتگرال}} \int (y + \frac{1}{y^2})dy = \int (x + \frac{1}{x^2})dx \\
 & \xrightarrow[\text{فرض با انتگرال } y^{-2} = 1/y^2]{\text{مسیرهای قائم}} \frac{y^2}{2} - \frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + c
 \end{aligned}$$

مثال ۳.۳.۳.۱. مسیر قائم دسته منحنی $y = kx^3$ را بیابید که از نقطه $(-1, 1)$ می‌گذرد.

حل. با مشتق‌گیری و حذف k ، معادله دسته منحنی را پیدا می‌کنیم:

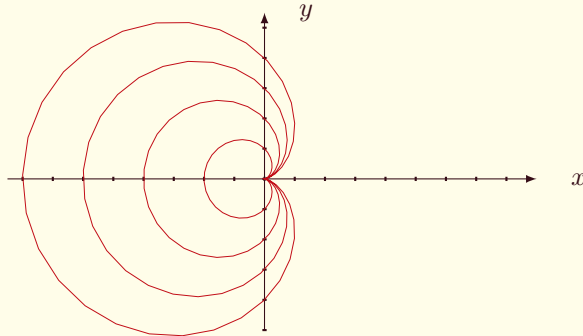


$$\begin{aligned}
 y &= kx^3 \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}} y' = 3kx^2 \\
 &\xrightarrow[\text{حذف } k]{\frac{y}{y'}} \frac{y}{y'} = \frac{x}{3} \\
 &\xrightarrow[y' \rightarrow -\frac{1}{y'}]{\frac{y}{y'}} -yy' = \frac{x}{4} \quad \text{معادله مسیره‌های قائم} \\
 &\xrightarrow[y' \rightarrow dy/dx]{\frac{y}{y'}} -y \frac{dy}{dx} = \frac{x}{3} \rightarrow -ydy = \frac{xdx}{3} \quad \text{معادله جدائی‌پذیر} \\
 &\rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{6} = k \\
 &\xrightarrow[(-1, 1) \text{ نقطه}]{\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{6} = k} \frac{1^2}{2} + \frac{(-1)^2}{6} = k \rightarrow k = \frac{2}{3} \\
 &\rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{مسیره‌های قائم}
 \end{aligned}$$

ب. **مختصات قطبی.** برای پیدا کردن مسیره‌های قائم دسته منحنی‌های $\phi(r, \theta, c) = 0$ کافیت از رابطه موجود نسبت به متغیر θ مشتق گرفته و بین دو رابطه، پارامتر c را حذف کنیم تا معادله دیفرانسیل دسته منحنی پیدا شود. سپس با تبدیل $\frac{dr}{d\theta}$ به $-r^2 \frac{d\theta}{dr}$ در معادله دسته منحنی، معادله مسیره‌های قائم به دست می‌آید که با حل آن مسیره‌های قائم نتیجه می‌شود.

مثال ۳۴.۳.۱. مسیره‌های قائم دسته منحنی $r = k(1 + \cos \theta)$ را بیابید.

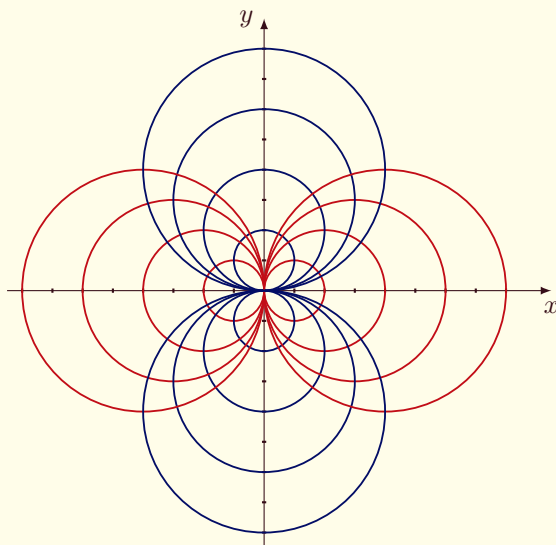
حل.



$$\begin{aligned}
 r &= k(1 + \cos \theta) \xrightarrow[\text{نسبت به } \theta]{\text{مشتق}} \frac{dr}{d\theta} = -k \sin \theta \\
 &\xrightarrow{\text{حذف } k} \frac{dr}{d\theta} = \frac{-r \sin \theta}{1 + \cos \theta} && \text{معادله دسته منحنی} \\
 &\xrightarrow{dr/d\theta \rightarrow -r^2 d\theta/dr} -r^2 \frac{d\theta}{dr} = \frac{-r \sin \theta}{1 + \cos \theta} && \text{معادله مسیرهای قائم} \\
 &\rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} d\theta && \text{معادله جدائی پذیر} \\
 &\xrightarrow{\text{انتگرال}} \ln r = \int \left(\frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) d\theta \\
 &\rightarrow \ln r = \int \frac{d\theta}{\sin \theta} + \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta} \\
 &\rightarrow \ln r = \int \frac{2tdt}{\frac{1+t^2}{1+t^2}} + \ln(\sin \theta) && t = \tan \frac{\theta}{2} \text{ تغییر متغیر} \\
 &\rightarrow \ln r = \ln(\tan \frac{\theta}{2}) + \ln(\sin \theta) + \ln c \\
 &\rightarrow \ln r = \ln c(1 - \cos \theta) \\
 &\rightarrow r = c(1 - \cos \theta)
 \end{aligned}$$

مثال ۳۵.۳.۱. مسیرهای قائم دسته دواير $x^2 + y^2 = cy$ را بیابید.

حل. برای پیدا کردن مسیرهای قائم دسته دواير از دستگاه مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.



$$x^2 + y^2 = cy \xrightarrow[y = r \sin \theta]{x^2 + y^2 = r^2} r^2 = c \cdot r \sin \theta \rightarrow r = c \sin \theta$$

$$\xrightarrow[\text{نسبت به } \theta]{\text{مشتق}} \frac{dr}{d\theta} = c \cos \theta$$

$$\xrightarrow{\text{حذف } c} \frac{dr}{d\theta} = r \cot \theta$$

معادله دسته منحنی

$$\xrightarrow{dr/d\theta \rightarrow -r^2 d\theta/dr} \frac{dr}{r} = \tan \theta d\theta$$

معادله مسیرهای قائم

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \ln r = \int \tan \theta d\theta$$

$$\rightarrow \ln r = \ln \cos \theta + \ln k$$

$$\rightarrow r = k \cos \theta \rightarrow r^2 = k \cdot r \cos \theta$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = cy$$

مسیرهای قائم دسته دواير

newlabel[۲] newdestlabel[۲]

مراجع

نمایه

معادله دسته منحنی، ۳۰	جواب خصوصی معادله، ۵
معادله دیفرانسیل، ۴	جواب عمومی معادله، ۵
معادله دیفرانسیل معمولی، ۴	جواب غیرعادی معادله، ۵
پوش دسته منحنی، ۳۱	خم‌های انتگرال، ۹
	عامل انتگرال‌ساز، ۲۶
	مسئله مقدار اولیه، ۵
	مسیرهای قائم، ۳۲
	معادله
	برنولی، ۱۴
	جدائی‌پذیر، ۱۲
	ریکاتی، ۲۲
	لاگرانژ، ۲۴
	مرتبه اول، ۶
	خطی، ۶
	غیرخطی، ۱۱
	همگن، ۱۹
	کامل، ۱۶
	کلرو، ۲۵
	معادله با مشتقات جزئی، ۴