

بخش ۲

کران‌داری و یک‌نوایی

پلکان آموزش

۱ - دنباله‌ی کران‌دار و بی‌کران

تعریف دنباله‌ی کران‌دار از بالا: دنباله‌ی $\{a_n\}$ را از بالا کران‌دار نامند؛ هرگاه عددی حقیقی مانند k وجود داشته باشد طوری که به‌ازای هر عدد طبیعی n جمله‌های دنباله‌ی a_n کوچک‌تر یا مساوی k باشند. به بیان دیگر داریم:

$$\{a_n\} \text{ دنباله‌ی } \exists k \in \mathbb{R} \ni \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq k \text{ از بالا کران‌دار است.}$$

در این صورت، k را یک کران بالای دنباله‌ی $\{a_n\}$ نامند. توجه داشته باشیم که اگر k یک کران بالای دنباله‌ی $\{a_n\}$ باشد، هر عدد بزرگ‌تر از k نیز یک کران بالای دنباله خواهد بود؛ در واقع اگر دنباله‌ای از بالا کران‌دار باشد، آن‌گاه این دنباله دارای بی‌شمار کران بالایی می‌باشد.

تعریف دنباله‌ی کران‌دار از پایین: دنباله‌ی $\{a_n\}$ را از پایین کران‌دار نامند؛ هرگاه عددی حقیقی مانند m وجود داشته باشد طوری که به‌ازای هر عدد طبیعی n جمله‌های دنباله‌ی a_n بزرگ‌تر یا مساوی m باشند. به بیان دیگر داریم:

$$\{a_n\} \text{ دنباله‌ی } \exists m \in \mathbb{R} \ni \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq m \text{ از پایین کران‌دار است.}$$

در این صورت، m را یک کران پایین دنباله‌ی $\{a_n\}$ نامند. توجه داشته باشیم که اگر m یک کران پایین دنباله‌ی $\{a_n\}$ باشد، هر عدد کوچک‌تر از m نیز یک کران پایین دنباله خواهد بود؛ در واقع اگر دنباله‌ای از پایین کران‌دار باشد، آن‌گاه این دنباله دارای بی‌شمار کران پایینی می‌باشد.

تعریف دنباله‌ی کران‌دار: دنباله‌ای که هم از بالا و هم از پایین کران‌دار باشد، دنباله‌ی کران‌دار نامند.

مثال ۱: آیا مجموعه‌ی $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ در مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ ، کران‌دار است؟ چرا؟

✓ چون n ، عددی طبیعی است، پس $n \geq 1$ و در نتیجه، $0 < \frac{1}{n} \leq 1$.

تمام عضوهای مجموعه‌ی A از صفر، بزرگ‌تر هستند؛ به عبارت دیگر، تمام اعداد حقیقی منفی یا صفر، کوچک‌تر یا مساوی عضوهای A هستند، پس مجموعه‌ی A از پایین، کران‌دار است. تمام عضوهای مجموعه‌ی A کوچک‌تر یا مساوی با عدد یک، هستند؛ به عبارت دیگر، تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۱ از عضوهای A یا بزرگ‌ترند و یا مساوی آن می‌باشند، پس مجموعه‌ی A از بالا، کران‌دار است.

چون مجموعه‌ی A هم از بالا و هم از پایین، کران‌دار است، بنا به تعریف، این مجموعه در مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ کران‌دار است.

❖ آیا مجموعه $A = \left\{ n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ در مجموعه $\mathbb{R}$ کران دار است؟ چرا؟

✓ چون n عددی طبیعی است، پس $n \geq 1$ و در نتیجه، $0 < \frac{1}{n} \leq 1$. بنابراین $n+1 \geq n + \frac{1}{n} \geq n$.
تمام عضوهای مجموعه A بزرگتر یا مساوی ۲ هستند، به عبارت دیگر، تمام عددهای حقیقی کوچکتر یا مساوی ۲، از عضوهای A کوچکتر هستند، پس مجموعه A از پایین، کران دار است.
مجموعه A از بالا، کران دار نیست، زیرا بزرگترین عدد طبیعی وجود ندارد، پس عددی حقیقی وجود ندارد که از تمام عددهایی که به صورت $n + \frac{1}{n}$ هستند بزرگتر باشد چون مجموعه A از بالا، کران دار نیست، بنا به تعریف، این مجموعه، در مجموعه $\mathbb{R}$ کران دار نیست.

❖ نشان دهید دنباله $\left\{ \frac{2+\sin n}{n} \right\}$ کران دار است.

✓ می دانیم برای هر n طبیعی، داریم $-1 < \sin n < 1$ ، پس $2 + \sin n < 3$. از طرفی به ازای هر n طبیعی، داریم $0 < \frac{1}{n} \leq 1$. اگر این دو نابرابری را که همگی مثبت هستند در هم ضرب کنیم، جهت ها عوض نمی شوند و به ازای هر n طبیعی، نتیجه می شود $0 < \frac{2+\sin n}{n} < 3$ ؛ یعنی عدد صفر، یک کران پایینی و ۳، یک کران بالایی دنباله است، به بیان دیگر، این دنباله هم از بالا و هم از پایین کران دار است، در نتیجه، این دنباله، کران دار است.
تذکر: اگر در دنباله $\{a_n\}$ به ازای هر n طبیعی داشته باشیم، $|a_n| \leq k$ ، آنگاه این دنباله کران دار است، زیرا از این رابطه نتیجه می شود $-k \leq a_n \leq k$ ؛ یعنی $-k$ یک کران پایینی و k یک کران بالایی دنباله است، پس دنباله، کران دار است.

❖ اگر $a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}$ ، آنگاه ثابت کنید این دنباله، کران دار است.

✓ اگر از دومین عامل به بعد در مجموع فوق، از $\frac{1}{3}$ فاکتور بگیریم، خواهیم داشت:

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^n} \right)$$

a_n

اگر دو طرف این تساوی را در ۳ ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$3a_n = 1 + a_n - \frac{1}{3^n} \Rightarrow 2a_n = 1 - \frac{1}{3^n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)$$

چون به ازای هر عدد طبیعی n ، رابطه $\frac{1}{3^n} > 0$ برقرار است، پس $1 - \frac{1}{3^n} < 1$ یا $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) < \frac{1}{2}$. پس $|a_n| < \frac{1}{2}$ و بنا بر تذکر فوق، این دنباله، کران دار است.

تعریف سوپریمم یک مجموعه: اگر مجموعه ای از بالا کران دار باشد، دارای بی نهایت کران بالایی است. اگر در بین کران های بالایی، کوچکترین عضو، وجود داشته باشد، آن عضو را سوپریمم مجموعه می نامند. به بیان دیگر، عضو می نیم کران های بالایی را در صورت وجود، سوپریمم آن مجموعه می نامند. اگر a ، کوچکترین کران بالایی مجموعه A باشد، آن را با نماد $\text{Sup}(A) = a$ نمایش می دهند.

تعریف اینفیمم یک مجموعه: اگر مجموعه ای از پایین، کران دار باشد، دارای بی نهایت کران پایینی است. اگر در بین کران های پایینی، بزرگترین عضو وجود داشته باشد، آن عضو را اینفیمم مجموعه می نامند. به بیان دیگر عضو ماکزیمم کران های پایینی را در صورت وجود، اینفیمم آن مجموعه می نامند. اگر b ، کوچکترین کران بالایی مجموعه A باشد، آن را با نماد $\text{Inf}(A) = b$ نمایش می دهند.

آقا، چرا تو این مسئله نوشتن $-1 < \sin n < 1$ در صورتی که می دانیم $-1 \leq \sin n \leq 1$.

بین عزیزم در این جا n برحسب رادین است و سینوس وقتی ۱ است که زاویه اش $2kn + \frac{n}{2}$ یا $(2k + \frac{1}{2})n$ باشد ولی این هیچ گاه عددی طبیعی نیست، پس هیچ گاه برابر ۱ نمی شود و با استدلالی مشابه معلوم می شود که هیچ گاه برابر -۱ نیز نخواهد شد.

مثال ۱۸.۴ ثابت کنید مجموعه‌ی $A = \left\{ \frac{4n+(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ کران‌دار است. آیا دارای عضو ماکزیمم است؟ عضو می‌نیمم چه طور؟

✓ اگر n عددی طبیعی و زوج باشد، آن‌گاه داریم:

$$\frac{4n+(-1)^n}{n} = \frac{4n+1}{n} = 4 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \geq 2 \Rightarrow \max(\frac{1}{n}) = 0.5} 4 < \frac{4n+(-1)^n}{n} \leq 4.5$$

و اگر n عددی طبیعی و فرد باشد، آن‌گاه داریم:

$$\frac{4n+(-1)^n}{n} = \frac{4n-1}{n} = 4 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \geq 1 \Rightarrow \min(-\frac{1}{n}) = -1} 3 \leq \frac{4n+(-1)^n}{n} < 4$$

پس اگر n عددی طبیعی و دل‌خواه باشد، آن‌گاه $3 \leq \frac{4n+(-1)^n}{n} \leq 4.5$ ؛ یعنی مجموعه‌ی A ، کران‌دار است. در ضمن، ۳ عضو می‌نیمم و ۴/۵ عضو ماکزیمم این مجموعه است.

۱ - کدام گزینه در باره‌ی مجموعه‌ی $A = \left\{ n \sin \frac{n\pi}{4} + \frac{1}{n} \cos n\pi \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ درست است؟

(۱) از بالا کران‌دار است ولی از پایین کران‌دار نیست. (۲) از بالا کران‌دار نیست ولی از پایین کران‌دار است.

(۳) کران‌دار است. (۴) نه کران بالا دارد و نه کران پایین.

۲ - کدام مجموعه، کران‌دار است؟

(۱) $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$ (۲) $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ (۳) $\{ \lfloor n \rfloor \mid n \in \mathbb{Z}^- \}$ (۴) هیچ‌یک از این‌ها

۳ - کدام مجموعه کران‌دار نمی‌باشد؟

(۱) $\left\{ \frac{1}{n^3} \mid n \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$ (۲) $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\}$ (۳) $\left\{ \frac{n|n|}{n^2+2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ (۴) $\left\{ \frac{n^2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

۴ - کدام مجموعه کران‌دار نیست؟

(۱) $\left\{ \frac{n+1}{n-1} \mid n \in \mathbb{N} - \{1\} \right\}$ (۲) $\left\{ \frac{n+1}{n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ (۳) $\left\{ \frac{a^2+1}{a^2+2} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ (۴) $\{x \mid x^2 - |x| - 6 > 0, x \in \mathbb{Q}\}$

۵ - مجموع بزرگ‌ترین کران پایین و کوچک‌ترین کران بالای مجموعه $A = \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{(n+3)^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ کدام گزینه است؟

(۱) $\frac{9}{16 \times 25}$ (۲) $\frac{8}{16 \times 25}$ (۳) $\frac{-9}{16 \times 25}$ (۴) $\frac{41}{16 \times 25}$

۶ - اختلاف کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران پایین مجموعه‌ی $A = \left\{ \frac{1}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{Z}, -7 < n < 3 \right\}$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{25}$ (۲) $\frac{36}{37}$ (۳) $\frac{48}{49}$ (۴) $\frac{32}{185}$

قضیه: اگر دنباله‌ای هم‌گرا باشد، آن‌گاه این دنباله، کران‌دار است.

مثال ۱۹.۴ قضیه‌ی فوق را ثابت کنید.

✓ اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ به L هم‌گرا باشد، بنا به تعریف هم‌گرایی، برای هر $\varepsilon > 0$ شماره‌ای طبیعی وجود دارد طوری که از آن شماره به بعد، باید داشته باشیم:

$$|a_n - L| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

پس برای جمله‌های با شماره‌ی بزرگ‌تر از M ، عدد $L - \varepsilon$ یک کران پایین و $L + \varepsilon$ یک کران بالای دنباله است. جملات قبل از شماره‌ی M نیز تعریف شده‌اند، پس آن‌ها نیز کران‌دار می‌باشند و در نتیجه در کل، این دنباله کران‌دار می‌باشد.

قضیه: اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ دنباله‌ی کران‌دار و دنباله‌ی $\{b_n\}$ به صفر هم‌گرا باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\{a_n \cdot b_n\}$ نیز به صفر هم‌گراست.

تذکر مهم: در قضیهی فوق، لزومی ندارد که دنبالهی $\{a_n\}$ هم‌گرا باشد، تنها کافی است کران‌دار باشد، هر چند اگر هم‌گرا باشد، خود به خود، کران‌دار نیز می‌باشد.

مثال ۱۳۰ نقطه‌ی هم‌گرایی دنباله‌ی $\left\{ \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+n-1} \sin \sqrt{3n-1} \right\}$ را مشخص کنید.

✓ واضح است که به‌ازای هر n طبیعی، رابطه‌ی $1 \leq \sin \sqrt{3n-1} \leq 1$ برقرار است، پس این دنباله، کران‌دار است. از طرفی دنباله‌ی $\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+n-1}$ به صفر هم‌گراست، در نتیجه بنابر قضیه‌ی فوق، دنباله‌ی مفروض، به صفر هم‌گراست.

مثال ۱۳۱ اگر دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به عددی یکسان هم‌گرا باشند و دنباله‌ی $\{c_n\}$ کران‌دار باشد، درباره‌ی هم‌گرایی یا واگرایی دنباله‌ی $\{(a_n - b_n) \cdot c_n\}$ چه می‌توان گفت؟

✓ واضح است که دنباله‌ی $\{a_n - b_n\}$ به صفر هم‌گراست و چون $\{c_n\}$ کران‌دار است، پس دنباله‌ی $\{(a_n - b_n) \cdot c_n\}$ نیز به صفر هم‌گراست.

۷ - جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $\{a_n\}$ به صورت $a_n = \begin{cases} n^2 - 5 & n < 4 \\ a_{n-1} & n \geq 4 \end{cases}$ است؛ در صورتی که دنباله‌ی $\{a_n \sin n - k \sin n\}$ هم‌گرا باشد، مقدار عددی k کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۸ - دنباله‌ی $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2-1}} \cos \frac{n+1}{\sqrt{n-1}} - \frac{n}{1-\sqrt{n}} \frac{n(-1)^n}{n^2+1}$ به چه عددی هم‌گرا است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) واگرا

۲ - یکنوایی دنباله‌ها

تعریف دنباله‌ی صعودی: دنباله‌ی $\{a_n\}$ را صعودی نامند، اگر داشته باشیم:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$$

تعریف دنباله‌ی نزولی: دنباله‌ی $\{a_n\}$ را نزولی نامند، اگر داشته باشیم:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$$

تعریف دنباله‌ی یکنوا: دنباله‌ی $\{a_n\}$ را یکنوا نامند؛ هرگاه این دنباله، تنها صعودی یا تنها نزولی باشد.

۳ - دنباله‌های اکیداً یکنوا

تعریف دنباله‌ی اکیداً صعودی: دنباله‌ی $\{a_n\}$ را اکیداً صعودی نامند، اگر داشته باشیم:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$$

تعریف دنباله‌ی اکیداً نزولی: دنباله‌ی $\{a_n\}$ را اکیداً نزولی نامند، اگر داشته باشیم:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$$

تعریف دنباله‌ی اکیداً یکنوا: دنباله‌ی $\{a_n\}$ را اکیداً یکنوا نامند، هرگاه این دنباله، تنها اکیداً صعودی یا تنها اکیداً نزولی باشد.

تذکر مهم: اگر تمام جملات دنباله‌ای مثبت باشند و داشته باشیم $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ، آن‌گاه دنباله،

صعودی است و اگر داشته باشیم $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ ، آن‌گاه دنباله، نزولی است.

اگر تمام جملات دنباله‌ای، مثبت باشند و داشته باشیم $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ، آن‌گاه این دنباله، اکیداً

صعودی است و اگر داشته باشیم $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ، آن‌گاه این دنباله، اکیداً نزولی است.

تذکر مهم: اگر دنباله‌ای اکیداً یکنوا باشد، آن‌گاه این دنباله، یکنوا نیز می‌باشد اما عکس این مطلب، در حالت کلی درست نیست، زیرا به عنوان مثال، دنباله‌ی ثابت، دنباله‌ای یکنواست ولی اکیداً یکنوا نیست. (دنباله‌ی ثابت هم می‌تواند صعودی باشد و هم می‌تواند نزولی باشد)

مثال ۱۳۸: یک‌نواپی دنباله‌ی $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$ را تحقیق کنید.

✓ چون جمله‌های دنباله، مثبت هستند (چرا؟)، پس:

زیرا صورت کسر، همواره از مخرج آن، بزرگ‌تر است $\frac{2(n+1)}{(n+1)+1} = \frac{2(n+1)}{n+2} = \frac{2n+2}{n+2} = \frac{2n}{n+2} + \frac{2}{n+2} > 1$

در نتیجه، این دنباله، اکیداً صعودی و بنابراین، صعودی است، پس یکنواست.

مثال ۱۳۹: نشان دهید دنباله‌ی $\left\{\frac{2^{n-1}}{n!}\right\}$ نزولی است.

✓ چون جمله‌های دنباله، مثبت هستند (چرا؟)، پس:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^n}{(n+1)!}}{\frac{2^{n-1}}{n!}} = \frac{2^n \times n!}{2^{n-1} \times (n+1)!} = \frac{2^{n-1} \times 2 \times n!}{2^{n-1} \times [n! \times (n+1)]} = \frac{2}{n+1} \leq 1$$

زیرا صورت کسر، همواره کوچک‌تر یا مساوی مخرج است، در نتیجه، این دنباله، نزولی است.

۴- اصل تمامیت (اصل کمال)

اصل تمامیت: هر زیر مجموعه‌ی ناتهی از عددهای حقیقی که از بالا کران‌دار باشد، دارای کوچک‌ترین کران بالایی (سوپریمم) است.

به‌عنوان مثال، بازه‌ی $[1, 2]$ یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از عددهای حقیقی و از بالا کران‌دار است، پس دارای کوچک‌ترین کران بالایی مانند ۲ می‌باشد. بازه‌ی $[1, 2)$ نیز یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از عددهای حقیقی و از بالا کران‌دار است، پس دارای کوچک‌ترین کران بالایی مانند ۲ می‌باشد. از این دو مثال، می‌توان درک نمود که کوچک‌ترین کران بالای یک مجموعه در صورت وجود، دلیلی ندارد عضوی از همان مجموعه باشد.

از اصل تمامیت، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

نتیجه: هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از مجموعه‌ی عددهای حقیقی که از پایین کران‌دار باشد، دارای بزرگ‌ترین کران پایینی (اینفیمم) است.

قضیه: اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی و از بالا کران‌دار باشد، هم‌گراست.

مثال ۱۴۰: قضیه‌ی فوق را ثابت کنید.

✓ تمام عضوهای دنباله‌ی $\{a_n\}$ را در مجموعه‌ای مانند S قرار می‌دهیم، پس داریم $S = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. چون دنباله، دارای عضوهای حقیقی است، پس S زیرمجموعه‌ی ناتهی از مجموعه‌ی عددهای حقیقی است و بنابر اصل تمامیت، این مجموعه دارای کوچک‌ترین کران بالا می‌باشد. کوچک‌ترین کران بالای این مجموعه را L می‌نامیم و ثابت می‌کنیم دنباله‌ی $\{a_n\}$ به L هم‌گراست.

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، چون $L - \varepsilon < L$ ، پس $L - \varepsilon$ نمی‌تواند یک کران بالای S باشد (زیرا L کوچک‌ترین کران بالای S است)، پس عددی طبیعی مانند M وجود دارد طوری که $a_M > L - \varepsilon$ و چون دنباله صعودی است، پس داریم:

$$\forall n \geq M \Rightarrow a_n \geq a_M > L - \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a_n - L \quad (1)$$

آقا! به‌نظر می‌رسد که هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از هر مجموعه‌ی عددی دارای سوپریمم باشد مثلاً مجموعه‌ی $A = \{x | 1 < x < 2, x \in \mathbb{Q}\}$ یک زیر مجموعه‌ی ناتهی از عددهای گویاست و از بالای کران‌داره و ۲ سوپریمم اونه. سئوالم اینه که چرا تو اصل تمامیت همش اصرار می‌کنی که باهاس زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}$ باشه.

بین عزیزم، شما یک مثال زدید و دیدید که زیرمجموعه‌ای ناتهی از مجموعه‌ی $\mathbb{Q}$ که از بالا کران‌دار است دارای سوپریمم می‌باشد ولی این برای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی و کران‌دار از بالا در $\mathbb{Q}$ برقرار نیست. به‌عنوان مثال، مجموعه‌ی $B = \{x | x^2 < 2, x \in \mathbb{Q}\}$ زیرمجموعه‌ای ناتهی و کران‌دار در $\mathbb{Q}$ است ولی دارای سوپریمم نیست. علت این است که $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ ولی $\sqrt{2}$ کوچک‌ترین کران بالای آن نیست، چون گویا نمی‌باشد. اگر فرض کنیم عدد گویای $a < \sqrt{2}$ سوپریمم آن باشد، چون بین a و $\sqrt{2}$ بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد و تمام آن‌ها در مجموعه‌ی B هستند؛ یعنی عضوی در B هست که از سوپریمم بزرگ‌تر می‌باشد و این تناقض است. به همین ترتیب اگر عدد گویای $a > \sqrt{2}$ سوپریمم آن باشد، باز هم به تناقض می‌رسیم.

چون L کوچکترین کران بالای S است، پس $L + \varepsilon$ نیز یک کران بالای S است و داریم:

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n < L + \varepsilon$$

چون رابطه‌ی بالا به‌ازای هر عدد طبیعی n برقرار است، پس به‌ازای هر $n \geq M$ نیز برقرار است. از

$$\forall n \geq M \Rightarrow a_n - L < \varepsilon \quad (۲)$$

رابطه‌ی فوق نتیجه می‌شود:

$$\forall n \geq M \Rightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\forall n \geq M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

یا

عبارت فوق، معادل با هم‌گرایی دنباله‌ی $\{a_n\}$ به L است.

نتیجه‌ای از قضیه‌ی فوق

نتیجه: اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی و از پایین کران‌دار باشد، هم‌گراست.

از قضیه‌ی فوق و نتیجه‌ی آن قضیه‌ی زیر را خواهیم داشت:

قضیه‌ی وایراشتراس: هر دنباله‌ای که یک‌نوا و کران‌دار باشد، هم‌گراست.

مثال ۳۵ نشان دهید دنباله‌ی $\left\{\frac{2^{n-1}}{n!}\right\}$ هم‌گراست. آیا می‌توانید نقطه‌ی هم‌گرایی این دنباله را پیدا کنید؟

در مثال ۳۳ ثابت کردیم که این دنباله، نزولی است، پس یک‌نواست. اکنون ثابت می‌کنیم تمام جملات این دنباله کوچک‌تر یا مساوی ۱ هستند. برای این منظور، از روش استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم:

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{2^0}{1} = 1 \leq 1 \quad \text{درست است}$$

$$n=k \Rightarrow a_k = \frac{2^{k-1}}{k!} \leq 1 \quad \text{فرض استقرا}$$

اکنون باید ثابت کنیم اگر $n = k+1$ ، آن‌گاه $a_{k+1} = \frac{2^k}{(k+1)!} \leq 1$ که همان حکم استقرا می‌باشد.

$$a_{k+1} = \frac{2^k}{(k+1)!} = \frac{2^{k-1} \times 2}{k! \times (k+1)} = \frac{2^{k-1}}{k!} \times \frac{2}{k+1}$$

$$\leq 1 \times \frac{2}{k+1} = 1 \quad \text{بنا بر فرض استقرا}$$

پس به‌ازای هر عدد طبیعی n داریم $|a_n| \leq 1$ ؛ یعنی دنباله، کران‌دار است.

چون دنباله، هم یک‌نوا و هم کران‌دار است، بنابر قضیه‌ی وایراشتراس، این دنباله، هم‌گراست.

با افزایش n هم صورت و هم مخرج دنباله، افزایش می‌یابند، اما رشد مخرج، سریع‌تر از صورت است، پس می‌توان انتظار داشت که دنباله به صفر هم‌گرا باشد. این فعلاً یک حدس است و نه اثباتی ریاضی. برای اثبات این که دنباله به صفر هم‌گراست از قضیه‌ی فشردگی استفاده می‌کنیم. با استقرای ریاضی روی n ، به سادگی ثابت می‌شود که به‌ازای هر n طبیعی، رابطه‌ی $n! > 3^{n-2}$ برقرار است،

$$\text{پس } \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} < \frac{2^{n-1}}{n!} < \frac{2^{n-1}}{3^{n-2}} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

هم‌گرا هستند، پس بنابر قضیه‌ی فشردگی دنباله‌ی موردنظر نیز به صفر هم‌گراست.

تذکر: در مثال ۳۵ دیدیم که دنباله نزولی است می‌توانستیم بگوییم که تمام جمله‌های دنباله مثبت

هستند یعنی از پایین کران‌دار است و در نتیجه هم‌گراست.

مثال ۳۶ ثابت کنید دنباله‌ی $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$ هم‌گراست.

واضح است که برای هر n طبیعی داریم $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ ، پس $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$ ؛ یعنی این دنباله،

از پایین، کران‌دار است. از طرفی:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \times \frac{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < 1 \end{aligned}$$

یعنی این دنباله، نزولی و از پایین کران‌دار است، در نتیجه بنابر قضیه، این دنباله هم‌گراست.

مثال ۱۳۷ ثابت کنید دنباله‌ی $\{\cos \frac{\pi}{2n}\}$ هم گراست و نقطه‌ی هم‌گرایی آن را مشخص کنید.

✓ واضح است که $0 < \frac{\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2}$ ، پس زاویه‌ی $\frac{\pi}{2n}$ در ربع اول است. با افزایش n کاهش می‌یابد. و در ربع اول با کاهش زاویه، کسینوس آن افزایش خواهد یافت. در نتیجه با افزایش n مقدار $\cos \frac{\pi}{2n}$ نیز افزایش می‌یابد؛ یعنی دنباله صعودی است. از طرفی $\cos \frac{\pi}{2n} \leq 1$ ، پس دنباله از بالا کران‌دار است و در نتیجه هم‌گراست. چون دنباله صعودی و از بالا کران‌دار است، پس بنابر بر قضیه نقطه‌ی هم‌گرایی آن سوپریم آن است و سوپریم این دنباله ۱ است، پس دنباله به ۱ هم‌گراست. اکنون مثالی مطرح می‌کنیم که به آزمون مقایسه در دنباله‌ها معروف است.

مثال ۱۳۸ اگر در دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به‌ازای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $0 \leq a_n \leq b_n$ و بدانیم دنباله‌ی $\{a_n\}$ یک‌نوا است، آن‌گاه ثابت کنید:

الف) اگر دنباله‌ی $\{b_n\}$ هم‌گرا باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\{a_n\}$ نیز هم‌گراست.

ب) اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگرا باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\{b_n\}$ نیز واگراست.

✓ الف) چون $\{b_n\}$ هم‌گراست، پس کران‌دار است و در نتیجه از بالا نیز کران‌دار است؛ یعنی عددی مانند M وجود دارد طوری که به‌ازای هر n طبیعی، داریم $b_n \leq M$ و با توجه به این‌که بنا به فرض داریم $0 \leq a_n \leq b_n$ ، در نتیجه به‌ازای هر n طبیعی داریم $0 \leq a_n \leq M$ ، در نتیجه دنباله‌ی $\{a_n\}$ کران‌دار است و چون بنا به فرض، دنباله‌ی $\{a_n\}$ یک‌نواست، پس بنابر قضیه‌ی ویراشتراس، این دنباله هم‌گراست. ب) اگر فرض کنیم دنباله‌ی $\{b_n\}$ هم‌گرا باشد (فرض خلف)، بنا بر قسمت (الف) باید دنباله‌ی $\{a_n\}$ هم‌گرا باشد و این خلاف فرض در قسمت (ب) می‌باشد، پس فرض خلف، باطل است، یعنی دنباله‌ی $\{b_n\}$ واگراست.

مثال ۱۳۹ دنباله‌ی $\{a_n\}$ به‌صورت مقابل، تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \end{cases}$$

ثابت کنید این دنباله، هم‌گراست و نقطه‌ی هم‌گرایی آن را پیدا کنید.

✓ واضح است که $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ ؛ یعنی دنباله، صعودی است. به‌نظر می‌رسد که تمام جملات این دنباله، کوچک‌تر از ۲ باشند؛ یعنی به‌نظر می‌رسد به‌ازای هر n طبیعی داشته باشیم $a_n < 2$. این حدس را با روش استقرای ریاضی روی n ثابت می‌کنیم.

درست است $n=1: a_1 = \sqrt{2} < 2$
فرض استقرا $n=k: a_k < 2$
حکم استقرا $n=k+1: a_{k+1} < 2$

اما با توجه به فرض استقرا داریم $2 = \sqrt{2+2} < \sqrt{2+a_k} = a_{k+1}$ ؛ یعنی حکم استقرا برقرار است.

چون $0 < a_n < 2$ ، پس این دنباله، کران‌دار است و از آن‌جا که یک‌نوا نیز هست، بنابر قضیه‌ی ویراشتراس، این دنباله، هم‌گراست.

اگر این دنباله، به L هم‌گرا باشد، آن‌گاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = L$.

اکنون داریم: $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \Rightarrow (a_{n+1})^2 = 2+a_n$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1})^2 = 2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \Rightarrow L^2 = 2 + L \Rightarrow \begin{cases} L = -1 \\ L = 2 \end{cases}$$

چون تمام جملات دنباله، بزرگ‌تر از صفر هستند، پس حد آن نیز نمی‌تواند منفی باشد و در نتیجه $L = 2$.

آقا! میشه این مسئله رو این جوری به خاطر بسپرم؟
اگه دنباله‌ی بزرگه، همگرا باشه، دنباله‌ی کوچیکه نیز هم‌گراست
اگر کوچیکه واگرا باشه، بزرگه هم واگراست.
بین جانم! درست است، متهی باید شرایط مطرح شده نیز برقرار باشند؛ یعنی یک‌نوا
دنباله‌ی کوچک‌تر و منفی نبودن دو دنباله.

دنباله‌هایی مانند دنباله‌ای که در مثال ۳۹ ارایه شده است را دنباله‌های بازگشتی نامند. علت این نام‌گذاری این است که اگر به فرض، بخواهیم جمله‌ی چهارم را پیدا کنیم، ابتدا باید جمله‌ی سوم را بیابیم و برای این منظور باید جمله‌ی دوم را داشته باشیم،؛ یعنی به عقب بازگشت می‌کنیم.

آقا! ببخشین، ما این مسئله رو این‌جوری حل می‌کنیم که اگه دنباله به L هم‌گرا باشه، از $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ نتیجه می‌شه:

$$L = \sqrt{2+L} \Rightarrow$$

$$L^2 = 2+L \Rightarrow L^2 - L - 2 = 0$$

جوابای این معادله، ۱- و ۲ هستن و چون جمله‌های دنباله، مثبتن، پس حدش منفی نیست، در نتیجه $L=2$. چرا هی لقمه‌رو دور سرمون بچرخونیم؟

بین عزیزم، شما فرض را بر این گذاشته‌اید که دنباله هم‌گرا می‌باشد ولی هنوز از هم‌گرایی آن مطمئن نشده‌اید. به عنوان مثال، دنباله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases}$$

پرو واضح است که این دنباله، یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت ۲ است، پس کران‌دار نیست و در نتیجه واگراست. اما اگر با شیوه‌ی شما مسئله را حل کنیم، چنان‌چه دنباله به L هم‌گرا باشد، آن‌گاه از $a_{n+1} = 2a_n$ خواهیم داشت $L = 2L$ یا $L = 0$!!!

تذکر: دنباله‌ی مثال ۳۹ به صورت زیر نیز نمایش داده می‌شود:

$$a_n = \sqrt[n]{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad \text{مرتبه } n$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = 2$$

و هم‌گرایی آن نیز به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

مثال ۴۰ اگر c عدد حقیقی و مثبت باشد و برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $a_n = \sqrt[n]{c}$ ، ثابت کنید دنباله‌ی $\{a_n\}$ هم‌گراست. سپس مشخص کنید به چه عددی هم‌گراست.

✓ اگر $c = 1$ ، آن‌گاه $a_n = 1$ و دنباله‌ی ثابت $\{1\}$ به ۱ هم‌گراست.

اگر $0 < c < 1$ ، به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1\sqrt{c}}{\sqrt[n]{c}} = c^{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = c^{-\frac{1}{n(n+1)}} = \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

چون $\frac{1}{c} > 1$ ، پس $\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} > 1$ ، پس دنباله‌ی $\{a_n\}$ صعودی است. ضمناً همه‌ی جمله‌های دنباله از ۱ کوچک‌تر هستند، یعنی دنباله از بالا کران‌دار است. بنابر قضیه‌ی وایراشتراس دنباله هم‌گراست. اگر دنباله به L هم‌گرا باشد، آن‌گاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. از طرفی $a_n = (c^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}}$ و دنباله‌ی $\left\{c^{\frac{1}{n}}\right\}$ زیردنباله‌ای از دنباله‌ی $\{a_n\}$ می‌باشد؛ پس این دنباله نیز به L هم‌گراست، در نتیجه:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (c^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}} = L^{\frac{1}{n}} \Rightarrow L = L^{\frac{1}{n}}$$

پس $L = 0$ یا $L = 1$. اما به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $a_n > c > 0$ پس $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq c$ یا $L \geq c > 0$ ، بنابراین $L = 0$ قابل قبول نیست. در نتیجه دنباله به عدد ۱ هم‌گراست. اگر $c > 1$ ، آن‌گاه $0 < \frac{1}{c} < 1$ در نتیجه:

$$a_n = \sqrt[n]{c} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}}$$

بنابر قسمت قبل دنباله‌ی $\sqrt[n]{\frac{1}{c}}$ به ۱ هم‌گراست (زیرا $0 < \frac{1}{c} < 1$) پس دنباله‌ی $\{a_n\}$ نیز به ۱ هم‌گراست.

مثال ۴۱ ثابت کنید دنباله‌ی $\{\sqrt[n]{n}\}$ به ۱ هم‌گراست.

✓ واضح است که به‌ازای هر $n > 1$ ، $\sqrt[n]{n} > 1$. پس اگر فرض کنیم $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$ ، آن‌گاه به‌ازای هر $n > 1$ ، $a_n > 0$. از طرفی $n = (1 + a_n)^n$ ، بسط دوجمله‌ای طرف دوم این رابطه را می‌نویسیم. داریم:

$$n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 + \dots + 1 + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 \Rightarrow n-1 > \frac{n(n-1)}{2}a_n^2$$

چون $n > 1$ ، در نتیجه $n-1 > 0$ ؛ پس رابطه‌ی فوق به صورت $\frac{n}{2}a_n^2 > 1$ تبدیل می‌شود که با $0 < a_n < \sqrt{\frac{2}{n}}$ هم‌ارزی است. چون دنباله‌های $\{0\}$ و $\{\sqrt{\frac{2}{n}}\}$ به صفر هم‌گرا هستند، بنابر قضیه‌ی فشردگی دنباله‌ی $\{a_n\}$ نیز به صفر هم‌گراست. در نتیجه داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n) = 1 + 0 = 1$$

مثال ۴۲ آیا دنباله‌ی $\{\sqrt[n]{n^3 + n}\}$ هم‌گراست؟

✓ به‌ازای هر $n > 1$ ، $n^3 < n^3 + n < n^4$. پس $\sqrt[n]{n^3} < \sqrt[n]{n^3 + n} < \sqrt[n]{n^4}$. از طرفی با توجه به مثال ۴۱ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^3 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}\right)^3 = 1^3 = 1$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4} = 1$. بنا بر قضیه‌ی فشردگی $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3 + n} = 1$. پس دنباله‌ی موردنظر به عدد ۱ هم‌گراست.

۹ - کدام یک از گزینه‌های زیر درست نیست؟

- (۱) اگر دنباله‌ای هم‌گرا باشد، کران‌دار است.
 (۲) اگر دنباله‌ای یک‌نوا نباشد، می‌تواند هم‌گرا باشد.
 (۳) اگر دنباله‌ای کران‌دار باشد، هم‌گرا است.
 (۴) اگر دنباله‌ای کران‌دار و یک‌نوا باشد، هم‌گرا است.

۱۰ - کدام گزینه درباره‌ی دنباله‌ی با جمله‌ی عمومی $a_n = (1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{1}{n+1}) \cdots (1 + \frac{1}{n+1})$ درست است؟

- (۱) اکیداً صعودی و هم‌گرا به ۱ است.
 (۲) اکیداً نزولی و هم‌گرا به ۱ است.
 (۳) اکیداً نزولی و واگراست.
 (۴) اکیداً صعودی و واگراست.

۱۱ - از چه شماره‌ای به بعد، دنباله‌ی $a_n = \frac{250^n}{(n+1)!}$ نزولی است؟

- (۱) ۲۵۰ (۲) ۲۴۹ (۳) ۲۴۸ (۴) ۲۴۷

۱۲ - دنباله‌ی با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{n^n + 3^{2n+5}}{2n^{n+1} + n! + 2^n}$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

- (۱) هم‌گرا به ۱ است. (۲) هم‌گرا به صفر است. (۳) به بی‌نهایت واگراست. (۴) هم‌گرا به $\frac{1}{2}$ است.

۱۳ - اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ هم‌گرا به L باشد، دنباله‌ی $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ کدام ویژگی را دارد؟

- (۱) به L هم‌گراست. (۲) به صفر هم‌گراست. (۳) به یک هم‌گراست. (۴) هیچ‌یک از این‌ها

۱۴ - کدام گزینه درست است؟

- (۱) اگر دنباله‌ای واگرا باشد، بی‌کران است.
 (۲) اگر $\{a_n\}$ کران‌دار و $\{b_n\}$ هم‌گرا به صفر باشد، دنباله‌ی $\{a_n \cdot b_n\}$ به صفر هم‌گراست.
 (۳) اگر دنباله‌ای یک‌نوا نباشد، واگراست.
 (۴) اگر دنباله‌ای واگرا باشد، یک‌نوا نیست.

۱۵ - دنباله‌ی $\{\cos \sqrt{n} - \cos \sqrt{n+1}\}$ دنباله‌ای است

- (۱) واگرا ولی یک‌نوا (۲) هم‌گرا به صفر (۳) واگرا و نوسانی (۴) هم‌گرا به $\frac{1}{2}$

۱۶ - دنباله‌ی $\left\{\frac{1}{\sqrt{n+4} - \sqrt{n}}\right\}$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

- (۱) هم‌گرا به $\frac{1}{4}$ است. (۲) هم‌گرا به $\frac{1}{2}$ است. (۳) هم‌گرا به صفر است. (۴) واگراست.

۱۷ - کدام گزینه درباره‌ی دنباله‌ی $\{a^n\}$ درست است؟

- (۱) اگر $a > 0$ باشد، دنباله هم‌گراست.
 (۲) اگر $|a| < 1$ باشد، دنباله واگراست.
 (۳) اگر $|a| > 1$ باشد، دنباله هم‌گراست.
 (۴) اگر $-1 < a \leq 1$ باشد، دنباله هم‌گراست.

۱۸ - دنباله‌ی $\left\{\frac{2^{2n} + 3^n + 1}{2^n + 4^{n-1} + 2}\right\}$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

- (۱) هم‌گرا به صفر است. (۲) هم‌گرا به ۴ است. (۳) هم‌گرا به $\frac{1}{4}$ است. (۴) واگراست.

۱۹ - دنباله‌ی $\{\sqrt{5} \times \sqrt[4]{5} \times \sqrt[5]{5} \times \cdots \times \sqrt[n]{5}\}$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

- (۱) هم‌گرا به $\sqrt{5}$ است. (۲) هم‌گرا به ۵ است. (۳) هم‌گرا به ۱ است. (۴) واگراست.

۲۰ - دنباله‌ی $\left\{\frac{(n+1)! - n!}{n^2(n-1)! + 2n - 1}\right\}$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

- (۱) هم‌گرا به ۱ است. (۲) هم‌گرا به صفر است. (۳) هم‌گرا به $\frac{1}{2}$ است. (۴) واگراست.

۲۱ - کدام گزینه درباره‌ی دنباله‌ی $\left\{\frac{2n+1}{3n+2} \sin n\right\}$ درست است؟

- (۱) هم‌گرا به $\frac{2}{3}$ است. (۲) هم‌گرا به صفر است. (۳) به بی‌نهایت واگراست. (۴) واگرا ولی کران‌دار است.

۲۲ - اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ هم‌گرا و دنباله‌ی $\{b_n\}$ در رابطه‌ی $|a_n - b_n| \leq \frac{|\cos n!|}{\sqrt[n]{n} - 1}$ صدق کند، کدام گزینه درباره‌ی دنباله‌ی $\{b_n\}$ درست است؟

(۱) هم‌گرا به ۱ است. (۲) واگرا ولی کران‌دار است. (۳) هم‌گرا به صفر است. (۴) کران‌دار است.

۲۳ - دنباله‌ی $\left\{\sin \frac{\pi}{n+1}\right\}$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

(۱) صعودی و هم‌گرا (۲) نزولی و هم‌گرا (۳) غیر یکنوا و هم‌گرا (۴) غیر یکنوا و واگرا

۲۴ - دنباله‌ی $\left\{\frac{\sqrt[n]{n}}{3} - \left\lfloor \frac{\sqrt[n]{n}}{3} \right\rfloor\right\}$ است.

(۱) هم‌گرا و یکنوا (۲) هم‌گرا و غیر یکنوا (۳) واگرا و یکنوا (۴) واگرا و غیر یکنوا

۲۵ - اگر کلیه‌ی جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ در بازه‌ی $(-3, 0)$ واقع باشند به قسمی که برای هر n طبیعی رابطه‌ی $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ برقرار باشد، آن‌گاه

کدام گزینه در مورد دنباله‌ی $\{a_n\}$ درست است؟

(۱) هم‌گرا و صعودی (۲) هم‌گرا و نزولی (۳) واگرا و صعودی (۴) واگرا و نزولی

۲۶ - اگر برای هر n طبیعی $\begin{cases} 0 < a_n < b_n \\ n^2(a_n - a_{n+1}) = 1 \end{cases}$ و دنباله‌ی $\{b_n\}$ کران‌دار باشد، کدام گزینه در مورد دنباله‌ی $\{a_n\}$ درست است؟

(۱) $\{a_n\}$ کران‌دار و صعودی است. (۲) $\{a_n\}$ کران‌دار و غیر یکنواست.

(۳) $\{a_n\}$ بی‌کران است. (۴) $\{a_n\}$ کران‌دار و نزولی است.

۲۷ - کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر دنباله‌ای هم‌گرا باشد، به سوپریم آن هم‌گراست. (۲) اگر دنباله‌ای هم‌گرا باشد، به سوپریم یا اینفیم آن هم‌گراست.

(۳) اگر دنباله‌ای واگرا باشد، کران‌دار نیست. (۴) هیچ‌کدام

۲۸ - کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر دنباله‌ای صعودی و از پایین کران‌دار باشد، هم‌گراست. (۲) اگر دنباله‌ای نزولی و از بالا کران‌دار باشد، هم‌گراست.

(۳) اگر دنباله‌ای یکنوا نباشد ممکن است هم‌گرا باشد. (۴) هیچ‌کدام

۵ - یک دنباله‌ی مهم

دنباله‌ی $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ را در نظر می‌گیریم. چند جمله‌ی اولیه‌ی این دنباله را با استفاده از یک ماشین حساب علمی محاسبه می‌کنیم که عبارت‌اند از:

$$a_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} \approx 2/4414, a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \approx 2/3703, a_2 = 1/5^2 = 2/25, a_1 = 2$$

با این چند جمله این تصور در ذهن شکل می‌گیرد که شاید این دنباله صعودی باشد و در این‌صورت از پایین کران‌دار است ولی هنوز نمی‌توانیم درباره‌ی همگرایی یا واگرایی آن حکمی قطعی بیان کنیم. اکنون برای این‌که تصورمان را تقویت کنیم جمله‌های دهم، صدم، هزارم و ده‌هزار

آن را با استفاده از ماشین حساب پیدا می‌کنیم، داریم:

$$a_{10} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = (1/1)^{10} \approx 2/5973, a_{1000} = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = (1/001)^{1000} \approx 2/7169, a_{10000} = \left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} = (1/0001)^{10000} \approx 2/7048$$

$$a_{100000} = \left(1 + \frac{1}{100000}\right)^{100000} = (1/00001)^{100000} \approx 2/7181$$

با نگاهی گذرا به این جملات تقریباً قانع می‌شویم که دنباله هم‌گراست نقطه‌ی هم‌گرایی آن عددی است غیر جبری که در تغییرات طبیعی خودنمایی می‌کند. در ادامه به مطالعه‌ی این مطلب می‌پردازیم.

ابتدا چند مسئله مطرح می‌شوند که در ادامه‌ی درس به آن نیازمندیم.

❖ **نابرابری برنولی:** در درس جبر و احتمال دیدید که به‌ازای هر عدد طبیعی n با فرض $x \geq -1$,

$$\forall n \in \mathbb{N}: x \geq -1 \Rightarrow (1+x)^n \geq 1+nx$$

رابطه‌ی $(1+x)^n \geq 1+nx$ برقرار است؛ به بیان دیگر:

نشان دهید دنباله‌ی $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ صعودی است.

جمله‌ی اول این دنباله، صفر است ولی اگر $n \geq 2$ باشد، جملات دنباله مثبت هستند. اکنون داریم:

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2: \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{1 - \frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n}}\right)^n \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geq \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \quad \text{بنابر نابرابری برنولی} \\ &= \frac{n^2+n-1}{n^2-1} \times \frac{n}{n+1} = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1 \quad \text{چون صورت کسر، بزرگ‌تر از مخرج است} \end{aligned}$$

پس دنباله صعودی است.

نشان دهید دنباله‌ی $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ صعودی است.

تمام جملات این دنباله مثبت هستند و داریم:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}: \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \times \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n \times \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^n \times \frac{n+2}{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{-1}{(n+1)^2}\right)^n \times \frac{n+2}{n+1} \geq \left(1 + \frac{-n}{(n+1)^2}\right) \times \frac{n+2}{n+1} \quad \text{بنابر نابرابری برنولی} \\ &= \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} \times \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1 \quad \text{چون صورت کسر، بزرگ‌تر از مخرج است} \end{aligned}$$

پس دنباله صعودی است.

قضیه: دنباله‌ی $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ همگراست.

نشان دهید قضیه‌ی فوق را ثابت کنید.

روش اول: در مثال قبل دیدیم این دنباله صعودی است. اکنون ثابت می‌کنیم دنباله از بالا نیز کران‌دار هم می‌باشد.

در مثال ۴۳ دیدیم که دنباله‌ی $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ صعودی است و چون جمله‌ی دوم آن برابر $\frac{1}{4}$ است، پس $\forall n \geq 2: b_n \geq \frac{1}{4}$. از آن‌جا که تمام جملات دنباله‌ی $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ مثبت هستند، پس:

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2 \Rightarrow a_n \cdot b_n &\geq \frac{1}{4} a_n \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{1}{4} a_n \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq \frac{1}{4} a_n \\ \text{و از آن‌جا که } \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n &> 1, \text{ پس } a_n < 4 \text{ یا } 1 > \frac{1}{4} a_n; \text{ یعنی دنباله‌ی } a_n \text{ از بالا کران‌دار است،} \\ \text{در نتیجه این دنباله همگراست.} \end{aligned}$$

تذکر: نقطه‌ی همگرایی این دنباله را با e نمایش می‌دهند و برابر است با:

$$e \cong 2/7182818284590452353602874713527...$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{پس داریم:}$$

تذکر: هرچند دنباله‌ی $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ در مجموعه‌ی عددهای طبیعی تعریف شده است ولی ثابت می‌شود

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

نقطه‌ی همگرایی دنباله‌ی $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ را مشخص کنید.

✓ فرض کنیم $m = -n$ در این صورت داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^n = \lim_{m \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-m} = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m} = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

نقطه‌ی همگرایی دنباله‌ی $a_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn}$ را پیدا کنید.

✓ فرض کنیم $\frac{a}{n} = \frac{1}{m}$ ، در نتیجه $n = am$ و در این صورت اگر $n \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه $m \rightarrow \pm\infty$.

اکنون داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn} = \lim_{m \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{abm} = \lim_{m \rightarrow \pm\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{ab} = e^{ab}$$

تذکر: نتیجه مثال ۴۷ را به‌خاطر بسپارید.

۲۹ - کدام گزینه درباره‌ی دنباله‌ی $\left\{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+1}\right\}$ درست است؟

(۱) به عدد e هم‌گراست.

(۳) به e^2 هم‌گراست.

۳۰ - دنباله‌ی $\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right\}$ به چه عددی هم‌گراست؟

(۱) به عدد e هم‌گراست.

(۳) به e^{-2} هم‌گراست.

۳۱ - دنباله‌ی $\left\{\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}^n\right\}$ به چه عددی هم‌گراست؟

(۱) $\sqrt{e}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ (۳) e^2 (۴) $\frac{1}{e^2}$

۳۲ - دنباله‌ی $\left\{\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$ به چه عددی هم‌گراست؟

(۱) e^4 (۲) e^2 (۳) $\sqrt{e}$ (۴) $\sqrt[4]{e}$

۶- هم‌ارزی در دنباله‌ها

هر چند در کتاب درسی بحث هم‌ارزی دنباله‌ها مطرح نشده است اما از آن‌جا که در سرعت بخشیدن به حل مسائل کمک شایانی می‌کند توصیه می‌شود این قسمت را در موقعیت مناسب مطالعه فرمایید.
گاهی محاسبه‌ی حد دنباله‌ها بسیار طولانی و مستلزم ابتکارهایی درخور حل مسئله می‌باشد. در این‌گونه موارد، استفاده از هم‌ارزی می‌تواند در سرعت محاسبه‌ی حد دنباله‌ها، بسیار مفید باشد.

۶-۱- تعریف هم‌ارزی دو دنباله

گوئیم دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هم‌ارزند، اگر داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ و آن را با نماد $a_n \sim b_n$ نمایش می‌دهیم.

در زیر، چند هم‌ارزی مهم ارائه شده‌اند. توصیه می‌شود که این هم‌ارزی‌ها را دقیقاً به‌خاطر بسپارید:

$$1) \quad an^k + bn^{k-1} + \dots \sim an^k \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$2) \quad \sqrt[k]{an^k + bn^{k-1} + \dots} \sim \sqrt[k]{a} \left(n + \frac{b}{ka}\right) \quad (k \in \mathbb{N}, a > 0)$$

اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ به صفر هم‌گرا باشد، آنگاه هم‌ارزی‌های زیر، برقرار هستند:

$$۳) \sin a_n \underset{a_n \rightarrow 0}{\sim} a_n$$

$$۴) \tan a_n \underset{a_n \rightarrow 0}{\sim} a_n$$

$$۵) \cos a_n \underset{a_n \rightarrow 0}{\sim} 1 - \frac{(a_n)^2}{2}$$

$$۶) a_n - \sin a_n \underset{a_n \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{6}(a_n)^3$$

$$۷) \tan a_n - a_n \underset{a_n \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{3}(a_n)^3$$

$$۸) \tan a_n - \sin a_n \underset{a_n \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}(a_n)^3$$

$$۹) \sin^{-1} a_n \underset{a_n \rightarrow 0}{\sim} a_n$$

$$۱۰) \tan^{-1} a_n \underset{a_n \rightarrow 0}{\sim} a_n$$

$$۱۱) a_n - \sin^{-1} a_n \underset{a_n \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{6}(a_n)^3$$

$$۱۲) \tan^{-1} a_n - a_n \underset{a_n \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{3}(a_n)^3$$

$$۱۳) \sqrt[k]{1+a_n} \underset{a_n \rightarrow 0}{\sim} 1 + \frac{1}{k}a_n \quad (\text{هم‌ارزی برنولی}) \quad ۱۴) \tan^{-1} a_n - \sin^{-1} a_n \underset{a_n \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}(a_n)^3$$

مثال ۱۴۸ نقطه‌ی هم‌گرایی دنباله‌ی $\left\{ \sqrt[3]{n^3 + 6n^2} + \sqrt{4n^2 + 8n - 3} - 3n \right\}$ را مشخص کنید.

$$\sqrt[3]{n^3 + 6n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{n^3 \left(1 + \frac{6}{n}\right)} = n + 2$$

بنابر هم‌ارزی (۲) داریم:

$$\text{و } \sqrt{4n^2 + 8n - 3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{4 \left(n + \frac{1}{2}\right)} = 2n + 2 \quad \text{پس:}$$

$$\left\{ \sqrt[3]{n^3 + 6n^2} + \sqrt{4n^2 + 8n - 3} - 3n \right\} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \{(n+2) + (2n+2) - 3n\} = \{4\} \rightarrow 4$$

مثال ۱۴۹ نقطه‌ی هم‌گرایی دنباله‌ی $\left\{ \frac{(n - \sqrt{n^2 + 6n + 2})(2n+1)}{3n - \sqrt[5]{n^5 - 15n^3 + 5n + 1}} \right\}$ را مشخص کنید.

$$\sqrt{n^2 + 6n + 2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{6}{n} + \frac{2}{n^2}\right)} = n + 3 \quad (\text{۲}) \quad \text{بنابر هم‌ارزی (۲) داریم:}$$

$$\text{و } \sqrt[5]{n^5 - 15n^3 + 5n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[5]{n^5 \left(1 - \frac{15}{n^2} + \frac{5}{n^4} + \frac{1}{n^5}\right)} = n \quad \text{پس:}$$

$$\left\{ \frac{(n - \sqrt{n^2 + 6n + 2})(2n+1)}{3n - \sqrt[5]{n^5 - 15n^3 + 5n + 1}} \right\} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left\{ \frac{(n - (n+3))(2n+1)}{3n - n} \right\} = \left\{ \frac{-6n-3}{2n} \right\}$$

در رابطه‌ی اخیر، بنابر هم‌ارزی (۱) داریم $\frac{-6n-3}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -3$ ، پس:

$$\left\{ \frac{(n - \sqrt{n^2 + 6n + 2})(2n+1)}{3n - \sqrt[5]{n^5 - 15n^3 + 5n + 1}} \right\} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left\{ \frac{-6n}{2n} \right\} = \{-3\} \rightarrow -3$$

مثال ۱۵۰ نقطه‌ی هم‌گرایی دنباله‌ی $\left\{ (n+1) \tan^{-1} \frac{2n-1}{n^2+2} \right\}$ را مشخص کنید.

$$\text{بنابر هم‌ارزی (۱) داریم } \frac{2n-1}{n^2+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \rightarrow 0 \quad \text{پس } (n+1) \tan^{-1} \frac{2n-1}{n^2+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n+1) \frac{2n-1}{n^2+2}$$

$$\text{اکنون بنابر هم‌ارزی ۱۰ داریم } \frac{2n-1}{n^2+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n} \quad \text{و بنابر هم‌ارزی (۱) داریم}$$

$$n+1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$$

$$\left\{ (n+1) \tan^{-1} \frac{2n-1}{n^2+2} \right\} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left\{ n \times \frac{2}{n} \right\} = \{2\} \rightarrow 2$$

مثال ۱۵۱ نقطه‌ی هم‌گرایی دنباله‌ی $\left\{ n^3 \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right) \right\}$ را مشخص کنید.

$$\text{چون } \frac{1}{n} \text{ به صفر هم‌گراست، بنابر هم‌ارزی (۶) داریم } \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n} \right)^3 = \frac{1}{6n^3}$$

در نتیجه:

$$\left\{ n^3 \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right) \right\} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left\{ n^3 \times \frac{1}{6n^3} \right\} = \left\{ \frac{1}{6} \right\} \rightarrow \frac{1}{6}$$

آقا! ما هم‌ارزی دومی رو به‌صورت زیر نوشتیم:

$$\sqrt[5]{n^5 - 15n^3 + 5n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[5]{n^5 \left(1 - \frac{15}{n^2} + \frac{5}{n^4} + \frac{1}{n^5}\right)}$$

$$= n - 3$$

ولی آخر سر، همون جواب -3 به‌دست اومد. من اشتباه کردم یا شما؟

بین عزیزم، در این هم‌ارزی، جمله‌ی بعد از n^5 باید n^4 باشد و در این رابطه، n^4 وجود ندارد، پس b در این‌جا صفر است و نه -15 .

نقطه‌ی هم‌گرایی دنباله‌ی $\left\{ \frac{\sqrt[n]{\frac{n-1}{n+2}} - 1}{\sin \frac{n^2+1}{n^3+7n}} \right\}$ را مشخص کنید.

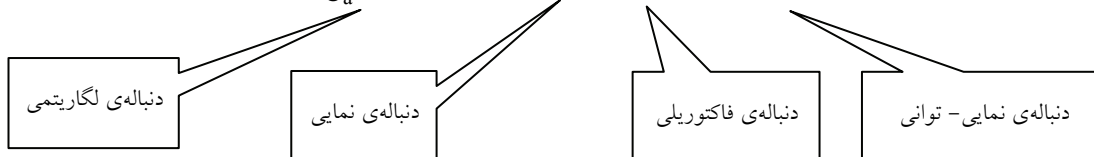
با توجه به هم‌ارزی برنولی داریم $\sqrt[n]{\frac{n-1}{n+2}} = \sqrt[n]{1 + \frac{-3}{n+2}} \sim 1 + \frac{1}{n} \times \frac{-3}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$ و چون $\sin \frac{n^2+1}{n^3+7n} \sim \frac{1}{n}$ پس $\frac{n^2+1}{n^3+7n} \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$ اکنون داریم:

$$\frac{\sqrt[n]{\frac{n-1}{n+2}} - 1}{\sin \frac{n^2+1}{n^3+7n}} \sim \frac{\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{-\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n}} = \frac{-n}{n+2} \rightarrow -1$$

۶-۲ - مقایسه‌ی سرعت رشد دنباله‌ها

اگر $f(n)$ و $g(n)$ دو چند جمله‌ای از هر درجه‌ی دلخواه باشند، طوری که ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی آن‌ها مثبت باشند، آن‌گاه عددی طبیعی مانند M وجود دارد طوری که اگر $n \geq M$ باشد، داشته باشیم $\log_a g(n) < f(n)$ و $(a > 1)$ ، به بیان دیگر، از شماره‌ای به بعد، سرعت رشد دنباله‌ی لگاریتمی از سرعت رشد دنباله‌ی چند جمله‌ای کم‌تر است. در حالت کلی، سرعت رشد دنباله‌ی نمایی از سرعت رشد چند جمله‌ای بیش‌تر است و سرعت رشد دنباله‌ی فاکتوریلی از سرعت رشد دنباله‌ی نمایی بیش‌تر است و سرعت رشد دنباله‌ی توانی بیش‌تر از سرعت رشد دنباله‌ی فاکتوریلی است؛ به بیان دیگر اگر $f(n)$ ، $g(n)$ ، $k(n)$ ، $h(n)$ و $p(n)$ چند جمله‌ای‌هایی از هر درجه‌ی دلخواه باشند، طوری که ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی آن‌ها مثبت باشند، آن‌گاه عددی طبیعی مانند M وجود دارد طوری که اگر $n \geq M$ باشد، خواهیم داشت:

$$\forall n \geq M \Rightarrow \log_a f(n) < g(n) < a^{k(n)} < [h(n)]! < [p(n)]^{t(n)} \quad (a > 1)$$



قضیه: اگر دنباله‌ای حاصل تقسیم دو دنباله‌ی ناهم‌سان باشد (مثلاً صورت آن لگاریتمی و مخرج آن فاکتوریلی باشد)، آن‌گاه:

(الف) اگر سرعت رشد صورت، بیش‌تر از مخرج باشد، آن دنباله، واگرا به $\pm\infty$ است.

(ب) اگر سرعت رشد صورت، کم‌تر از مخرج باشد، آن دنباله، هم‌گرا به صفر است.

نقطه‌ی هم‌گرایی دنباله‌ی $\left\{ \frac{5^{3n^4+2n^2-1}}{(n-1)!} \right\}$ را مشخص کنید.

صورت این دنباله، دنباله‌ی نمایی و مخرج آن، دنباله‌ی فاکتوریلی است، پس با توجه به مقایسه‌ی سرعت رشد دنباله‌ها، از شماره‌ای مشخص به بعد، رشد مخرج، سریع‌تر است و بنابر قضیه‌ی فوق، قسمت (ب) این دنباله به صفر هم‌گراست. (توجه کنید که تا شماره‌های نسبتاً بزرگ، رشد صورت از رشد مخرج، سریع‌تر است. اما سرانجام، از شماره‌ای به بعد، رشد مخرج، سریع‌تر خواهد بود.)

نقطه‌ی هم‌گرایی دنباله‌ی $\left\{ \frac{n^{n-10}}{(n^2+1)!} \right\}$ را مشخص کنید.

در این دنباله، صورت، دنباله‌ی نمایی - توانی و مخرج، دنباله‌ی فاکتوریلی است، پس از شماره‌ای مشخص به بعد، سرعت رشد صورت، بیش‌تر از سرعت رشد مخرج است و بنابر قضیه‌ی فوق، قسمت (الف)، این دنباله به بی‌نهایت واگراست.

۳۳ - چند تا از دنباله‌های زیر که جملات عمومی آن‌ها داده شده‌اند، یک‌نوا هستند؟

$$\left\{ \frac{1}{n^2-15} \right\} \quad \text{و} \quad \left\{ \sin \frac{(n+1)\pi}{2n} \right\} \quad \text{و} \quad \left\{ \cos \frac{\pi}{n+1} \right\} \quad \text{و} \quad \left\{ \tan \frac{(n+1)\pi}{n+2} \right\}$$

(۲) سه

(۱) چهار

(۴) یک

(۳) دو

۳۴ - چند تا از دنباله‌های زیر که جملات عمومی آن‌ها داده شده‌اند، هم‌گرا هستند؟

$$a_n = n \sin \frac{\pi}{n+1} \quad \text{و} \quad b_n = (n^2-1)(1-\cos \frac{1}{n}) \quad \text{و} \quad c_n = \frac{\log n}{n} \quad \text{و} \quad d_n = n \left[\tan \frac{(n+1)\pi}{n+2} \right]$$

(۲) دو

(۱) یک

(۴) چهار

(۳) سه

۳۵ - دنباله‌ی $\left\{ \sqrt[n^2]{n^2-8n^3+5n+1} + \sqrt[n^2]{-n^5+10n^3+7n+2} \right\}$ کدام ویژگی را دارد؟

(۲) به صفر هم‌گراست.

(۱) به ۴- هم‌گراست.

(۴) واگراست.

(۳) به ۲- هم‌گراست.

۳۶ - دنباله‌ی با جمله‌ی عمومی $a_n = \sqrt[n]{5 \sin n + \sqrt{2} \cos n} \times \sin^{-1} \frac{(-1)^n \times n + 1}{n^2 + 2n}$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

(۲) هم‌گرا به صفر است.

(۱) هم‌گرا به ۳ است.

(۴) واگراست.

(۳) هم‌گرا به ۱ است.

۳۷ - قدر مطلق تفاضل بزرگ‌ترین جمله‌ی دنباله‌ی $\left\{ \frac{4n-27}{3n-14} \right\}$ از نقطه‌ی هم‌گرایی آن کدام درست است؟

 $\frac{4}{3}$ (۲)

(۱) صفر

(۴) دارای بزرگ‌ترین جمله نیست.

(۳) $\frac{25}{6}$

۳۸ - چند تا از دنباله‌های زیر که جملات عمومی آن‌ها داده شده‌اند، یک‌نوا و بی‌کران هستند؟

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{و} \quad b_n = \left(\frac{1}{n} \right)^{-n} \quad \text{و} \quad c_n = \log_{\frac{1}{2}} n \quad \text{و} \quad d_n = \sin \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

(۲) یک

(۱) هیچ

(۴) سه

(۳) دو

۳۹ - چند تا از دنباله‌های زیر که جملات عمومی آن‌ها داده شده‌اند، هم‌گرا هستند؟

$$a_n = n^2 \left[\frac{1}{n} \right] \quad \text{و} \quad b_n = \left[\frac{\sqrt{\sin n + 1}}{n} \right] \quad \text{و} \quad c_n = \frac{\tan^{-1} n}{n} \quad \text{و} \quad d_n = (2n^2 + 1) \sin \frac{\pi}{n^2}$$

(۲) یک

(۱) هیچ

(۴) سه

(۳) دو

۴۰ - دنباله‌ی با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

(۲) نزولی - کران‌دار

(۱) صعودی - کران‌دار

(۴) نزولی - بی‌کران

(۳) صعودی - بی‌کران

۴۱ - از دنباله‌های زیر، چند دنباله که جملات عمومی آن‌ها در زیر، داده شده‌اند، نزولی هستند؟

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad \text{و} \quad b_n = \frac{2^n}{n!} \quad \text{و} \quad c_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{n! \times 2^n}$$

(۲) یک

(۱) هیچ

(۴) سه

(۳) دو

۴۲ - دنباله‌های $\{a_n\} = \left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ و $\{b_n\} = \left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$ به ترتیب در کدام گزینه صدق می‌کنند؟

- (۱) هر دو هم‌گرا هستند.
 (۲) هر دو واگرا هستند.
 (۳) اولی هم‌گرا و دومی واگراست.
 (۴) اولی واگرا و دومی هم‌گراست.

۴۳ - دنباله‌ی $\left\{\frac{3^{2n+1}}{(n-1)!}\right\}$ دنباله‌ی است.

- (۱) صعودی - هم‌گرا
 (۲) نزولی - هم‌گرا
 (۳) غیر یکنوا - واگرا
 (۴) غیر یکنوا - هم‌گرا

۴۴ - چندمین جمله‌ی دنباله‌ی $\left\{\frac{5^{3n+1}}{(n-1)!}\right\}$ بزرگ‌ترین جمله‌ی آن است؟

- (۱) جمله‌ی شماره‌ی ۱۲۴
 (۲) جمله‌ی شماره‌ی ۱۲۵
 (۳) جمله‌ی شماره‌ی ۱۲۶
 (۴) هر دو گزینه‌ی ۲ و ۳

۴۵ - دنباله‌ی $\left\{\frac{\cot \frac{\pi}{n}}{n+3}\right\}$ چگونه است؟

- (۱) هم‌گرا به π
 (۲) هم‌گرا به $\frac{1}{\pi}$
 (۳) هم‌گرا به صفر
 (۴) واگرا

۴۶ - کدام دنباله واگرا است؟

- (۱) $\left\{\frac{n + \sin n}{n - \sin n}\right\}$
 (۲) $\left\{(n^2)^{(-1)^{2n-1}}\right\}$
 (۳) $\left\{\sin\left(\frac{\pi}{4n+1}\right)\right\}$
 (۴) $\left\{\left[1 - \frac{(-1)^n}{n}\right]\right\}$

۴۷ - دنباله‌ی $\left\{\frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{n+1}\right\}$ قطعاً است.

- (۱) غیر یکنوا
 (۲) بی‌کران
 (۳) صعودی و کران‌دار
 (۴) نزولی و کران‌دار

بازسازی دنیا:

پدر روزنامه می‌خواند اما پسرکوچکش مدام مزاحمش می‌شود. حوصله‌ی پدر سر رفت و صفحه‌ای از روزنامه را که نقشه جهان را نمایش می‌داد جدا و قطعه قطعه کرد و به پسرش داد.

«بیا! کاری برایت دارم. یک نقشه‌ی دنیا به تو می‌دهم، ببینم می‌توانی آن را دقیقاً همان طور که هست بچینی؟»

و دوباره سراغ روزنامه اش رفت. می‌دانست پسرش تمام روز گرفتار این کار است. اما یک ربع ساعت بعد، پسرک با نقشه کامل برگشت.

پدر با تعجب پرسید: «مادرت به تو جغرافی یاد داده؟»

پسر جواب داد: «جغرافی دیگر چیست؟ پشت این صفحه تصویری از یک آدم بود. وقتی توانستم آن آدم را دوباره بسازم، دنیا را هم دوباره ساختم!!!»

آموزه‌های حکایت:

۱ - در طرح و حل مسئله باید به ابعاد مختلف مسئله توجه کرد

۲ - برخی اوقات حل یک مسئله به روش غیرمستقیم خیلی ساده‌تر است.

۳ - حل یک مسئله ساده‌تر ممکن است منجر به حل یک مسئله پیچیده‌تر شود.

۴ - اگر آدم‌ها درست شوند، دنیا درست خواهد شد.

پاسخ تست‌های پلکان آموزش

۱- ۴ اگر $n = 4k + 1$ باشد که در آن $k \in \mathbb{N}$ ، آن‌گاه:

$$\begin{aligned} n \sin \frac{n\pi}{4} + \frac{1}{n} \cos n\pi &= (4k+1) \sin(4k\pi + \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{4k+1} \cos(4k+1)\pi \\ &= 4k+1 - \frac{1}{4k+1} \end{aligned}$$

و در نتیجه از بالا کران‌دار نیست، زیرا اگر k بی‌نهایت افزایش یابد، این مقدار نیز بی‌نهایت افزایش می‌یابد.

اگر $n = 4k - 1$ ، آن‌گاه:

$$\begin{aligned} n \sin \frac{n\pi}{4} + \frac{1}{n} \cos n\pi &= (4k-1) \sin(4k\pi - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{4k-1} \cos(4k-1)\pi \\ &= -4k+1 - \frac{1}{4k-1} \end{aligned}$$

و در نتیجه از پایین هم کران‌دار نیست.

۲- ۱ کران‌دار است $\Rightarrow \left| \frac{1}{n} \right| \leq 1 \Rightarrow n \in \mathbb{Z} - \{0\} \Rightarrow |n| \geq 1$

۳- ۴ وقتی n عددی صحیح و ناصفر باشد، آن‌گاه $\left| \frac{1}{n^3} \right| \leq 1$ و در

نتیجه، مجموعه‌ی گزینه‌ی (۱) کران‌دار است. عضوهای مجموعه‌ی گزینه‌ی (۲) بین $-\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$ قرار دارند و این مجموعه نیز کران‌دار است. در گزینه‌ی (۳) داریم $n^2 + 2 < n|n|$ در نتیجه $\left| \frac{n|n|}{n^2 + 2} \right| < 1$ و کران‌دار است. در گزینه‌ی (۴) اگر صورت را بر مخرج، تقسیم کنیم، داریم $\frac{n^2}{n+10} = n - 10 + \frac{100}{n+10}$ و ملاحظه می‌شود که با افزایش n جملات مجموعه بی‌کران افزایش می‌یابند.

۴- ۴ همیشه مثبت

$$\begin{aligned} x^2 - |x| - 6 > 0 &\Rightarrow (|x| - 3)(|x| + 2) > 0 \\ \Rightarrow |x| > 3 &\Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -3 \end{cases} \end{aligned}$$

۱- ۲ داریم $\frac{n+1}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1}$ و چون $\frac{2}{n-1} > 0$ ، پس:

$$1 < 1 + \frac{2}{n-1} \leq 3$$

در نتیجه مجموعه کران‌دار است.

۲- ۳ داریم $\frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$ و چون $\frac{1}{n+2} > 0$ ، پس:

$$\frac{2}{3} \leq 1 - \frac{1}{n+2} < 1$$

در نتیجه مجموعه کران‌دار است.

۳- ۳ داریم $\frac{a^2+1}{a^2+2} = 1 - \frac{1}{a^2+2}$ و چون $\frac{1}{a^2+2} > 0$ ، پس:

$$\frac{2}{3} \leq 1 - \frac{1}{a^2+2} < 1$$

در نتیجه مجموعه کران‌دار است.

۵- ۱ اگر A یک مجموعه باشد، چنانچه عضوی مانند M در مجموعه‌ی A وجود داشته باشد، طوری که برای هر $x \in A$ داشته باشیم $x \leq M$ ، آن‌گاه M را عضو ماکزیمم مجموعه‌ی A نامند و چنانچه عضوی مانند m در مجموعه‌ی A وجود داشته باشد، طوری که برای هر $x \in A$ داشته باشیم $m \leq x$ ، آن‌گاه m را عضو می‌نیم مجموعه‌ی A نامند.

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \frac{1}{16}, \frac{-1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{-1}{49}, \dots \right\} \\ \Rightarrow \begin{cases} \inf(A) = -\frac{1}{25} \\ \sup(A) = \frac{1}{16} \end{cases} &\Rightarrow \sup(A) + \inf(A) = \frac{1}{16} - \frac{1}{25} = \frac{9}{16 \times 25} \end{aligned}$$

۶- ۲ عضوهای این مجموعه، عبارتند از:

$$A = \left\{ \frac{1}{37}, \frac{1}{26}, \frac{1}{17}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

این مجموعه دارای ماکزیممی برابر ۱ و دارای می‌نیممی برابر $\frac{1}{37}$ است و می‌دانیم ماکزیمم و می‌نیمم یک مجموعه، در صورت وجود همان کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران پایین مجموعه است، پس

$$\text{داریم } \max - \min = 1 - \frac{1}{37} = \frac{36}{37}$$

۷- ۳ جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ به صورت $\{-4, -1, 4, 4, 4, \dots\}$ هستند و این دنباله هم‌گرا به ۴ است. می‌خواهیم دنباله‌ی $\{a_n \sin n - k \sin n\}$ هم‌گرا باشد. اگر فرض کنیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sin n - k \sin n = L$ ، آن‌گاه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - k) \sin n = L$$

چون $\{\sin n\}$ واگرا ولی کران‌دار است و دنباله‌ی $\{a_n - k\}$ هم‌گراست، اگر نقطه‌ی هم‌گرایی آن صفر باشد، آن‌گاه دنباله‌ی موردنظر نیز به صفر هم‌گرا خواهد بود ولی اگر $\{a_n - k\}$ به عددی غیر از صفر هم‌گرا باشد، دنباله‌ی $\{(a_n - k) \sin n\}$ واگرا خواهد بود، پس k باید ۴ باشد تا دنباله‌ی $\{(a_n - k) \sin n\}$ هم‌گرا به صفر باشد.

۱۴- ۲ بررسی گزینه‌ها:

۱- درست نیست، زیرا به‌عنوان مثال، دنباله‌ی $\{\cos n\}$ واگراست ولی چون به‌ازای هر n طبیعی، داریم $-1 \leq \cos n \leq 1$ ، پس کران‌دار است.

۲- درست است، زیرا اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ کران‌دار باشد، آن‌گاه عددی حقیقی و مثبتی مانند k وجود دارد طوری که $|a_n| \leq k$ و در نتیجه $|a_n \cdot b_n| \leq k|b_n|$ و چون دنباله‌های $\{0\}$ و $\{|b_n|\}$ به صفر هم‌گرا هستند، پس دنباله‌ی $\{a_n \cdot b_n\}$ نیز به صفر هم‌گراست.

۳- درست نیست، زیرا به‌عنوان مثال، دنباله‌ی $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ یک‌نوا نیست (این دنباله، حول نقطه‌ی صفر، نوسان می‌کند) ولی هم‌گرا به صفر است.

۴- درست نیست، زیرا به‌عنوان مثال، دنباله‌ی $\{n\}$ واگراست ولی صعودی و در نتیجه یک‌نوا می‌باشد.

۱۵- ۲ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{n} - \cos \sqrt{n+1})$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} -2 \sin \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{2} \sin \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{2}$$

چون $-1 \leq \sin \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{2} \leq 1$ ، پس دنباله‌ی $\left\{\sin \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{2}\right\}$ کران‌دار است. از طرفی $\frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{2} = \frac{-1}{2(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}$ ، پس این دنباله به صفر هم‌گراست، از طرفی:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{-1}{2(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = \sin 0 = 0$
 در نتیجه، دنباله‌ی موردنظر نیز به صفر هم‌گراست.

۱۶- ۴ دنباله، واگراست:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4} - \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}}{(\sqrt{n+4} - \sqrt{n})(\sqrt{n+4} + \sqrt{n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}}{4} \rightarrow +\infty$$

۱۷- ۴

دنباله‌ی $\{a^n\}$ را در نظر می‌گیریم:(الف) اگر $|a| < 1$ باشد، دنباله به صفر هم‌گراست.(ب) اگر $|a| > 1$ باشد، دنباله واگرا به بی‌نهایت است.(پ) اگر $a = 1$ باشد، دنباله، هم‌گرا به ۱ است و اگر $a = -1$ باشد، دنباله، واگراست.

با توجه به بسته‌ی آموزشی فوق، اگر $|a| < 1$ باشد، دنباله‌ی $\{a^n\}$ به صفر هم‌گراست و اگر $a = 1$ باشد، دنباله به ۱ هم‌گراست و در غیر این دو صورت، دنباله واگراست، پس اگر $-1 < a \leq 1$ باشد، دنباله‌ی $\{a^n\}$ هم‌گراست.

۸- ۱ توجه کنید که دنباله‌های $\frac{2n}{2n^2-1}$ و $\frac{n^2}{(1-2n)(n^2+1)}$ به صفر هم‌گرا و دنباله‌های $\cos \frac{n+1}{2n-1}$ و $(-1)^n$ کران‌دار هستند، پس داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n^2-1} \cos \frac{n+1}{2n-1} - \frac{n^2}{(1-2n)(n^2+1)} (-1)^n = 0$$

۹- ۳ بررسی گزینه‌ها:

۱- درست است، زیرا اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ به L هم‌گرا باشد، آن‌گاه داریم:
 $\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \forall n > M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$
 یعنی دنباله‌ی $\{a_n\}$ کران‌دار است.

۲- درست است، زیرا به‌عنوان مثال، دنباله‌ی $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ یک‌نوا نیست ولی هم‌گرا به صفر است.

۳- نادرست است، زیرا مثلاً دنباله‌ی $\{(-1)^n\}$ کران‌دار است ولی واگرا می‌باشد.

۴- بنابر قضیه‌ی ویراشتراس، درست می‌باشد.

۱۰- ۴ اگر هر یک از پرانتزها را ساده کنیم، آن‌گاه:

$$a_n = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n}{n-1} \times \frac{n+1}{n} = n+1 > 0$$

و $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n+1} > 1$ ، در نتیجه دنباله‌ی $\{a_n\}$ اکیداً صعودی است. از طرفی از آن‌جا که:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$$

بنابراین، دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگراست.

۱۱- ۳ چون جملات دنباله، مثبت هستند و می‌خواهیم دنباله نزولی

باشد، پس باید داشته باشیم $\frac{250}{n+2} \leq \frac{(n+2)!}{250^n}$ و این، زمانی برقرار است که $n \geq 248$ باشد؛ یعنی از جمله‌ی ۲۴۸ به بعد، دنباله نزولی است.

۱۲- ۲ می‌دانیم رشد n^n از رشد دنباله‌های $n!$ و a^n در آن $a > 1$ می‌باشد، بیش‌تر است، پس داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n + 3^{2n} \times 3^5}{2^n \times n \times n! + 2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{n^n} \left(1 + \frac{3^{2n}}{\cancel{n^n}} \times 243 \right)}{\cancel{n^n} \left(2n + \frac{n!}{\cancel{n^n}} + \frac{2^n}{\cancel{n^n}} \right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

۱۳- ۲ می‌دانیم هر دنباله‌ی هم‌گرا، کران‌دار نیز می‌باشد، پس عددی حقیقی و مثبت مانند k وجود دارد که $|a_n| \leq k$ و در نتیجه $0 < \left| \frac{a_n}{n} \right| \leq \frac{k}{n}$ چون دنباله‌های $\{0\}$ و $\left\{\frac{k}{n}\right\}$ به صفر، هم‌گرا هستند، بنابر قضیه‌ی فشردگی، دنباله‌ی $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ نیز به صفر، هم‌گراست.

۲۲- ۶ واضح است که $|a_n - b_n|$ مثبت یا صفر است، پس $0 \leq |a_n - b_n| \leq \frac{|\cos n|}{2\sqrt{n}-1}$ و چون دنباله‌های $\left\{\frac{|\cos n|}{2\sqrt{n}-1}\right\}$ و $\{0\}$ به صفر هم‌گرا هستند، پس بنابر قضیه فشردگی، دنباله‌ی $\{a_n - b_n\}$ نیز به صفر هم‌گراست. اگر $\{a_n\}$ به L هم‌گرا باشد، آن‌گاه $\{b_n\}$ نیز به L هم‌گراست و چون مقدار L مشخص نشده است، پس گزینه‌های ۱ و ۳ در حالت کلی درست نیستند و ضمناً گزینه‌ی ۲ نیز نادرست است، چون دنباله‌ی $\{b_n\}$ هم‌گراست، لزوماً کران‌دار می‌باشد.

آقا! مگه رشد n سریع‌تر از $2\sqrt{n}-1$ نیست؟ پس چرا می‌گین دنباله‌ی طرف راست این نابرابری به صفر، هم‌گراست؟
بین عزیزم، در این‌جا، $n!$ جلوی کسینوس قرار گرفته، پس $\cos n!$ بین ۱ و -۱ قرار دارد، به بیان دیگر، این عبارت، کران‌دار است و چون بر عبارتی بی‌کران تقسیم شده، حد آن صفر است.

۲۳- ۲ واضح است که $\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{n+1} < 0$ ؛ یعنی این زاویه‌ها، همگی در ربع اول دایره‌ی مثلثاتی قرار دارند و ضمناً با افزایش n زاویه‌ی $\frac{\pi}{n+1}$ در نتیجه مقدار $\sin \frac{\pi}{n+1}$ کاهش می‌یابد، پس دنباله نزولی است و اگر n بی‌کران افزایش یابد، $\sin \frac{\pi}{n+1}$ به صفر هم‌گراست.

۲۴- ۶ $n = 3k \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{3} - \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{3} \right\rfloor = \frac{\sqrt{3k}}{3} - \left\lfloor \frac{\sqrt{3k}}{3} \right\rfloor = \sqrt{k} - \lfloor \sqrt{k} \rfloor = 0$
 $n = 3k+1 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{3} - \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{3} \right\rfloor = \frac{\sqrt{3k+1}}{3} - \left\lfloor \frac{\sqrt{3k+1}}{3} \right\rfloor$
 $= \sqrt{k} + \frac{\sqrt{1}}{3} - \left\lfloor \sqrt{k} + \frac{\sqrt{1}}{3} \right\rfloor = \frac{\sqrt{1}}{3} - \left\lfloor \frac{\sqrt{1}}{3} \right\rfloor = \frac{\sqrt{1}}{3} - 0 = \frac{1}{3}$
 $n = 3k+2 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{3} - \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{3} \right\rfloor = \frac{\sqrt{3k+2}}{3} - \left\lfloor \frac{\sqrt{3k+2}}{3} \right\rfloor$
 $= \sqrt{k} + \frac{\sqrt{2}}{3} - \left\lfloor \sqrt{k} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right\rfloor = \frac{\sqrt{2}}{3} - \left\lfloor \frac{\sqrt{2}}{3} \right\rfloor = \frac{\sqrt{2}}{3} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{3}$
پس این دنباله به صورت $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \dots\right\}$ است که دنباله‌ای غیر یک‌نوا می‌باشد. واضح است که این دنباله واگراست.

۲۵- ۲ چون کلیه جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ در بازه‌ی $(-3, 0)$ قرار دارند، پس این دنباله کران‌دار است. از طرفی چون $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ و کلیه جملات دنباله منفی می‌باشند، پس $a_{n+1} \leq a_n$ و در نتیجه، دنباله نزولی است. از آن‌جا که دنباله نزولی و کران‌دار است، بنابر قضیه وایراشتراس، دنباله هم‌گراست.

۲۶- ۶ چون $\{b_n\}$ کران‌دار است و $0 < a_n < b_n$ پس دنباله‌ی $\{a_n\}$ نیز کران‌دار است. از طرفی چون $1 = n^2(a_n - a_{n+1})$ ، در نتیجه $a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n^2}$ و از آن‌جا که $\frac{1}{n^2} > 0$ پس $a_n - a_{n+1} > 0$ ، بنابراین داریم $a_n > a_{n+1}$ یعنی دنباله، نزولی است.

۱۸- ۲ $\frac{2^{2n} + 3^n + 1}{2^n + 2^{n-1} + 2} = \frac{2^n + 3^n + 1}{2^n + \frac{1}{2} \times 2^n + 2}$
 $= \frac{2^n(1 + \frac{3^n}{2^n} + \frac{1}{2^n})}{2^n(\frac{2^n}{2^n} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^n})} = \frac{1 + (\frac{3}{2})^n + (\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{2})^n + \frac{1}{2} + 2 \times (\frac{1}{2})^n}$
دنباله‌های $\left\{(\frac{3}{2})^n\right\}$ ، $\left\{(\frac{1}{2})^n\right\}$ و $\left\{(\frac{1}{2})^n\right\}$ به صفر هم‌گرا هستند، پس داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n} + 3^n + 1}{2^n + 2^{n-1} + 2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + (\frac{3}{2})^n + (\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{2})^n + \frac{1}{2} + 2 \times (\frac{1}{2})^n} = 2$$

۱۹- ۲

مجموع n جمله‌ی اولیه‌ی یک تصاعد هندسی با قدرنسبت q ($q \neq 1$) که جمله‌ی اول آن a_1 است از رابطه‌ی $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ به دست می‌آید، به بیان دیگر، داریم:

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$a_n = 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{1}{8}} \times \dots \times 5^{\frac{1}{n}} = 5^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n}} = 5^{1 - \frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 5^{1 - \frac{1}{n}} = 5$$

۲۰- ۱ چون $n! = (n-1)! \times n$ و $(n+1)! = (n-1)! \times n(n+1)$ ، پس داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)! - n!}{n^2(n-1)! + 2n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)![n(n+1) - n]}{(n-1)!\left(n^2 + \frac{2n-1}{(n-1)!}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + \frac{2n-1}{(n-1)!}} = 1$$

۲۱- ۶

(A) اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای هم‌گرا به عددی غیر صفر و $\{b_n\}$ دنباله‌ای واگرا ولی کران‌دار باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\{a_n b_n\}$ نیز واگرا ولی کران‌دار است.
(B) اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای هم‌گرا به صفر و دنباله‌ی $\{b_n\}$ کران‌دار باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\{a_n b_n\}$ به صفر هم‌گراست.

چون $-1 \leq \sin n \leq 1$ ، پس کران‌دار است؛ اما دنباله‌ی $\{\sin n\}$ واگراست. از طرفی دنباله‌ی $\left\{\frac{2n+1}{3n+2}\right\}$ به $\frac{2}{3}$ هم‌گراست، در نتیجه، بنابر بسته‌ی آموزشی فوق، از بند (A)، دنباله‌ی $\left\{\frac{2n+1}{3n+2} \times \sin n\right\}$ واگرا ولی کران‌دار است.

۲۷- ۶

۳۳- ۲ به‌ازای $n < 4$ دنباله‌ی $\left\{\frac{1}{n^2-15}\right\}$ صعودی است ولی به‌ازای $n \geq 4$ دنباله، نزولی است، پس این دنباله یک‌نوا نیست.

با افزایش n دنباله‌ی $\frac{(n+1)\pi}{2n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\pi}{2}$ کاهش می‌یابد و از آن‌جا که $\frac{\pi}{2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\pi}{2} < \pi$ ؛ یعنی این زاویه‌ها در ربع دوم هستند و تابع $\sin$ در ربع دوم با کاهش زاویه، افزایش می‌یابد، پس دنباله‌ی $\left\{\sin\frac{(n+1)\pi}{2n}\right\}$ صعودی و در نتیجه یک‌نواست.

با افزایش n عبارت $\frac{\pi}{n+1}$ کاهش می‌یابد و چون $\frac{\pi}{n+1} \leq \frac{\pi}{2} < \pi$ و در ربع اول با کاهش زاویه، کسینوس آن افزایش می‌یابد، پس دنباله‌ی $\left\{\cos\frac{\pi}{n+1}\right\}$ صعودی و در نتیجه یک‌نواست.

با افزایش n عبارت $\frac{n\pi}{n+1}$ افزایش می‌یابد و چون $\frac{n\pi}{n+1} < \pi$ ؛ پس این زاویه‌ها در ربع دوم هستند و با افزایش زاویه، در ربع دوم، تانژانت آن نیز افزایش می‌یابد. در نتیجه دنباله‌ی $\left\{\tan\frac{n\pi}{n+1}\right\}$ صعودی و بنابراین، یک‌نواست.

۳۴- ۳ دنباله‌ی $\{a_n\}$ هم‌گراست:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \times \sin \frac{\sqrt{2}\pi}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \times \frac{\sqrt{2}\pi}{n+1} = \sqrt{2}\pi$$

دنباله‌ی $\{b_n\}$ هم‌گراست:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{\sqrt{2}} - 1)(1 - \cos \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{\sqrt{2}} - 1) \times \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

چون رشد دنباله‌ی $\{n\}$ سریع‌تر از رشد دنباله‌ی $\{\log n\}$ است، پس در دنباله‌ی $\{c_n\}$ رشد منفرجه سریع‌تر است و در نتیجه به صفر هم‌گراست.

از آن‌جا که به‌ازای هر n طبیعی داریم $\frac{\sqrt{2}\pi}{3} \leq \frac{(n+1)\pi}{n+2} < \pi$ ؛ پس این زوایا در ربع دوم قرار دارند و در نتیجه $\tan \frac{(n+1)\pi}{n+2} < 0$ و چون $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\tan \frac{(n+1)\pi}{n+2} \right] = -1$ ؛ پس $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan \frac{(n+1)\pi}{n+2} = \tan \pi^- = 0^-$ داریم $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$ ؛ یعنی دنباله‌ی $\{d_n\}$ واگراست.

۳۵- ۳ با توجه به هم‌ارزی‌ها، داریم:

$$\sqrt[3]{n^4 - 8n^3 + 5n + 1} \sim \sqrt[3]{1 + \frac{-8}{n} + \frac{5}{n^3} + \frac{1}{n^4}} = n - 2$$

و $\sqrt[5]{-n^5 + 10n^3 + 7n + 2} \sim \sqrt[5]{-1 + \frac{10}{n^2} + \frac{7}{n^4} + \frac{2}{n^5}} = -n$

در نتیجه داریم: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^4 - 8n^3 + 5n + 1} + \sqrt[5]{-n^5 + 10n^3 + 7n + 2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 2) + (-n) = -2$

۳۶- ۲

به‌ازای هر x حقیقی داریم:

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

۱- ۱ نادرست است، مثلاً دنباله‌ی $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ هم‌گراست ولی به صفر که هم‌گراست که اینفیم آن است.

۲- ۲ نادرست است، مثلاً دنباله‌ی $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ به صفر هم‌گراست ولی صفر نه سوپریم و نه اینفیم دنباله است.

۳- ۳ نادرست است، مثلاً دنباله‌ی $\{(-1)^n\}$ وگراست ولی کران‌دار می‌باشد.

۲۸- ۳ دنباله‌ی $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ یک‌نوا نیست (نوسانی است) ولی به صفر هم‌گراست.

۱- ۱ نادرست است، زیرا مثلاً دنباله $\{n\}$ صعودی و از پایین کران‌دار است ولی واگراست.

۲- ۲ نادرست است، زیرا مثلاً دنباله‌ی $\{-n\}$ نزولی و از بالا کران‌دار است ولی واگراست.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \times \left(1 + \frac{2}{n}\right) = e^2 \times 1$$

بنابر مثال ۴۳

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} = e^{-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= e^{\frac{1}{2}} \times 1 = \sqrt{e}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n-1}}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{\sqrt[3]{n-1}+2}{\sqrt[3]{n-1}}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{\sqrt[3]{n-1}}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}}$$

قرار می‌دهیم $\frac{2}{\sqrt[3]{n-1}} = \frac{1}{m}$ ؛ پس $n = m + \frac{1}{3}$ و اگر $n \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه $m \rightarrow +\infty$ پس داریم:

$$A = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{\frac{1}{2}} \times \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$= e^{\frac{1}{2}} \times 1 = \sqrt{e}$$

جملات این دنباله کاهشی است، پس این دنباله، در کل، یک‌نوا نیست، اما هم‌گرا به صفر است.

۳۹- ۴ به‌ازای n های طبیعی بزرگ‌تر از ۱ داریم $\left[\frac{1}{n}\right] = 0$ ؛ یعنی از

جمله‌ی دوم به بعد، تمام جمله‌های دنباله‌ی $a_n = n^3 \left[\frac{1}{n}\right]$ صفر هستند، پس این دنباله، هم‌گرا به صفر است. از طرفی $-1 \leq \sin n \leq 1$ ، پس $-1 \leq 2 \sin n + 1 \leq 3$ ، بنابراین، $\frac{-1}{n} \leq \frac{2 \sin n + 1}{n} \leq \frac{3}{n}$ و در نتیجه جمله‌های دنباله‌ی $b_n = \left[\frac{2 \sin n + 1}{n}\right]$ به‌ازای $n > 3$ گاهی صفر و گاهی -1 هستند، پس واگراست. از آن‌جا که به‌ازای هر n طبیعی داریم $-\frac{\pi}{4} < \tan^{-1} n < \frac{\pi}{4}$ ،

پس $c_n = \frac{\tan^{-1} n}{n} < \frac{\pi}{4n} < \frac{\pi}{2n}$ و بنابر قضیه‌ی فشردگی، دنباله‌ی $c_n = \frac{\tan^{-1} n}{n}$ به صفر هم‌گراست. چون $\frac{\pi}{2n} \sim \frac{\pi}{n}$ ، بنابراین:

$(2n^2 + 1) \sin \frac{\pi}{n} \sim \frac{(2n^2 + 1)\pi}{n^2}$
و از آن‌جاکه $\frac{(2n^2 + 1)\pi}{n^2}$ به 2π هم‌گراست، پس دنباله‌ی $d_n = (2n^2 + 1) \sin \frac{\pi}{n}$ نیز به 2π هم‌گرا خواهد بود.

۴۰- ۱ $a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$
 $= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$
پس این دنباله، دنباله‌ای صعودی است. از طرفی داریم:

$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ مرتبه}} = \frac{1}{2}$
و همچنین از آن‌جا که:

$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \leq \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+1}}_{n \text{ مرتبه}} = \frac{n}{n+1} < 1$
در نتیجه $1 > a_n \geq \frac{1}{2}$ ؛ یعنی دنباله کران‌دار است.

۴۱- ۳ تمام جملات این سه دنباله، مثبت هستند، بنابراین داریم:

دنباله‌ی $\{a_n\}$ صعودی است $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} > a_n$
 $= a_n$

دنباله‌ی $\{b_n\}$ نزولی است $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{n!}}{\frac{n!}{n!}} = \frac{2}{n+1} \leq 1$

دنباله‌ی $\{c_n\}$ نزولی است $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{(n+1)! \times 2^{n+1}}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}}{\frac{n! \times 2^n}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}} = \frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$

در نتیجه، دو تا از دنباله‌های داده شده، نزولی هستند.

چون $-\sqrt{5^2 + (\sqrt{2})^2} \leq 5 \sin n + \sqrt{2} \cos n \leq \sqrt{5^2 + (\sqrt{2})^2}$ ، پس عبارت $\frac{(-1)^n \times n + 1}{n^2 + 2n}$ کران‌دار است. از طرفی چون دنباله‌ی $\frac{(-1)^n \times n + 1}{n^2 + 2n}$ به صفر، هم‌گراست، پس بنابر هم‌ارزی ۳، داریم:

$\sin^{-1} \frac{(-1)^n \times n + 1}{n^2 + 2n} \sim \frac{(-1)^n \times n + 1}{n^2 + 2n} \rightarrow 0$
می‌دانیم حاصل ضرب دنباله‌ای کران‌دار در دنباله‌ای که به صفر، هم‌گراست، هم‌گرا به صفر است، پس این دنباله، به صفر، هم‌گراست.

۳۷- ۳

در دنباله‌هایی با فرم $\left\{ \frac{an+b}{cn+d} \right\}$ که صورت و مخرج، نسبت به n حداکثر از درجه‌ی یک هستند، اگر ریشه‌ی مخرج، بیش‌تر از ۱ باشد، دنباله یک‌نوا نیست و مقدار اکسترمم دنباله، به‌ازای $n = \left\lfloor \frac{-d}{c} \right\rfloor + 1$ یا $n = \left\lceil \frac{-d}{c} \right\rceil$ به‌دست می‌آید.

نقطه‌ی هم‌گرایی دنباله $\frac{4}{3}$ است. ریشه‌ی مخرج این دنباله، $\frac{14}{3}$ است و چون $\left\lfloor \frac{14}{3} \right\rfloor = 4$ ، پس بنابر بسته‌ی آموزشی فوق، جمله‌ی چهارم یا جمله‌ی پنجم این دنباله، جمله‌ی اکسترمم دنباله است. چون $a_4 = \frac{11}{4}$ و $a_5 = -7$ ، پس بزرگ‌ترین جمله‌ی دنباله، $a_4 = \frac{11}{4}$ است و در نتیجه قدرمطلق تفاضل بزرگ‌ترین جمله و نقطه‌ی هم‌گرایی آن عبارت است از $\left| \frac{11}{4} - \frac{4}{3} \right| = \frac{25}{6}$ است.

۳۸- ۲ دنباله‌ی $a_n = \frac{1}{n^2}$ هم‌گرا به صفر است، پس کران‌دار می‌باشد. دنباله‌ی $b_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{-n} = n^n$ اکیداً صعودی و بی‌کران است و این، یکی از گزینه‌های مطلوب می‌باشد. از طرفی دیگر چون:

$c_n = \log_{2n} 2^n = \log_{2n}^{\frac{1}{2} \times 2n} = \log_{2n}^{\frac{1}{2}} + \log_{2n} 2n = -\log_{2n} 2 + 1$
و از آن‌جاکه برای هر n طبیعی $2 > 2n$ ، پس $\log_{2n} 2 > \log_{2n} 2n$ که معادل با $\log_{2n} 2 > 1$ یا $-\log_{2n} 2 + 1 > 0$ است؛ یعنی $c_n = \log_{2n} 2^n > 0$ ، از طرفی چون $2 > 2n$ ، پس $\log_{2n} 2 > 0$ ، پس $-\log_{2n} 2 + 1 < 1$ یا $c_n = \log_{2n} 2^n < 1$ ؛ در نتیجه به‌ازای هر n طبیعی داریم $0 < c_n < 1$ ؛ یعنی این دنباله، کران‌دار است. به‌ازای $n=1$ داریم $\frac{3\pi}{4} < \frac{\sqrt{3n}}{n+1} = \frac{3}{2} < \frac{\sqrt{5}}{6} < \frac{\sqrt{5}}{6} < \pi$ که زاویه‌ای در ربع سوم ولی به‌ازای $n=5$ داریم $\frac{\sqrt{5}}{6} < \frac{\sqrt{5n}}{n+1} = \frac{\sqrt{25}}{6} < \frac{\pi}{4} < \frac{\sqrt{3n}}{n+1}$ که زاویه‌ای در ربع دوم است، پس جمله‌ی پنجم دنباله‌ی $d_n = \sin \frac{\sqrt{3n}}{n+1}$ بیش‌تر از جمله‌ی اول آن است ولی واضح است که به عنوان مثال، از جمله‌ی صدم به بعد،

۴۴- جمله‌ها ابتدا صعود می‌کنند، زیرا:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}} \geq 1 \Rightarrow \frac{5}{n+1} \geq 1 \Rightarrow n \leq 125$$

یعنی تا جمله صد و بیست و پنجم صعودی است و این جمله بیش‌ترین جمله می‌باشد. اما به سادگی معلوم می‌شود $a_{126} > a_{125}$ پس جمله‌های ۱۲۵ و ۱۲۶ بزرگ‌ترین جمله‌های دنباله هستند.

۴۵- چون $\cot \frac{\pi}{n} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{n}}$ پس کافی است که $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+3) \tan \frac{\pi}{n}}$

را محاسبه کنیم. اما $\tan \frac{\pi}{n}$ در بی‌نهایت دور، با $\frac{\pi}{n}$ هم‌ارز است، پس حد مخرج، برابر π است و در نتیجه، دنباله، هم‌گرا به $\frac{1}{\pi}$ است.

۴۶- ۱

چون $-1 \leq \sin n \leq 1$ ، پس داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sin n}{n - \sin n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1$

۲ $2n - 1$ عددی فرد است، پس $-1 = (-1)^{2n-1}$ و در نتیجه:

۳ $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

داریم $\sin(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}(2n+1)) = \sin(\frac{\pi}{4}) = 1$ و دنباله هم‌گرا به یک است.

۴ جملات دنباله به صورت... و ۱ و ۰ و ۱ و ۰ و ۲ می‌باشند که واگرا است.

۴۷- ۳ می‌دانیم $\sqrt{n^2 + 2n} \sim n+1$ پس $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+1} = 1$ ؛ یعنی دنباله، هم‌گرا به ۱ است و در نتیجه، کران‌دار است. از طرفی داریم:

$$\frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{n+1} = \frac{\sqrt{(n+1)^2 - 1}}{(n+1)} = \sqrt{\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{(n+1)^2}} < 1$$

می‌دانیم $n^2 < (n+1)^2$ ، پس $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2}$ ، بنابراین $-\frac{1}{n^2} < -\frac{1}{(n+1)^2}$ و

یعنی $-\frac{1}{n^2} < \sqrt{1 - \frac{1}{(n+1)^2}} < 1 - \frac{1}{n^2} \leq 0$ ؛ یعنی $\sqrt{1 - \frac{1}{(n+1)^2}} < 1 - \frac{1}{n^2}$ ، به بیان دیگر $a_{n-1} < a_n$ پس دنباله، صعودی است.

۴۲- ۱



(A) اگر دنباله‌ای صعودی و از بالا کران‌دار باشد، آن دنباله هم‌گراست.

(B) اگر دنباله‌ای نزولی و از پایین کران‌دار باشد، آن دنباله هم‌گراست.

دنباله‌ی $\{a_n\}$ نزولی است $\rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} \leq 1$

و چون $a_n > 0$ ، پس دنباله‌ی $\{a_n\}$ از پایین کران‌دار می‌باشد و در نتیجه، هم‌گراست.

پس $\{b_n\}$ نزولی است < 1 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n!}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$

و چون $b_n > 0$ ، پس دنباله‌ی $\{b_n\}$ از پایین کران‌دار می‌باشد و در نتیجه، هم‌گراست.

روش دوم: با روش مقایسه‌ی رشد دنباله‌ها در دنباله‌ی اول، صورت، دنباله‌ای نمایی و مخرج، دنباله‌ای فاکتوریلی است؛ یعنی رشد مخرج، سریع‌تر است، پس این دنباله به صفر هم‌گراست.

در دنباله‌ی دوم، صورت، دنباله‌ای فاکتوریلی و مخرج، دنباله‌ای نمایی - توانی است؛ یعنی رشد مخرج، سریع‌تر است، پس این دنباله نیز به صفر هم‌گراست.

۴۳- ۴ واضح است که $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{9^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{9^n}{n!}} = \frac{9}{n+1}$ اگر $n \leq 9$ باشد، این

نسبت، بزرگ‌تر از ۱ یا مساوی ۱ است؛ یعنی تا جمله‌ی نهم، دنباله صعودی است ولی اگر $n \geq 9$ باشد، این نسبت، کوچک‌تر از ۱ یا مساوی ۱ است؛ یعنی از جمله‌ی نهم به بعد، دنباله نزولی است، پس غیر یک‌نوا است و چون از شماره‌ای به بعد، رشد مخرج سریع‌تر است، این دنباله هم‌گرا به صفر است.

بایگ کتابت

روزی مردی در جاده‌ای کنار دریا مشغول تعمیر خودروی خویش بود که ناگهان ماهی‌گیری را دید که پشت سر هم ماهی می‌گرفت. ماهی‌گیر، ماهی‌های کوچک را نگه می‌داشت و ماهی‌های بزرگ را به آب بازمی‌گرداند. کنجکاو بر او غالب شد و از ماهی‌گیر پرسید «چرا ماهی‌های بزرگ را در آب می‌اندازی؟» مرد ماهی‌گیر پاسخ داد «واقعاً دلم نمی‌خواهد چنین کاری بکنم ولی چاره‌ای ندارم، زیرا ماهی‌تابه‌ی من کوچک است!!!» اگر فنجانی کوچک را زیر باران نگاه دارید، به اندازه‌ی همان فنجان به شما می‌رسد. اگر کاسه‌ای بزرگ نگاه دارید، به اندازه‌ی حجم کاسه در آن آب جمع می‌شود. چه ظرفی در زیر باران رحمت الهی قرار داده‌اید؟

پلکان آزمون

آزمون

۵ دقیقه

۱ - دنباله‌ی $a_n = \frac{\sqrt[n]{n^2 \cos n!}}{n+2}$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

- (۱) یک‌نوا - هم‌گرا (۲) یک‌نوا - واگرا (۳) غیر یک‌نوا - هم‌گرا (۴) غیر یک‌نوا - واگرا

۲ - دنباله‌ی $\left\{ \left(\frac{3n-1}{4n+1} \right)^n \right\}$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

- (۱) هم‌گرا - نزولی (۲) هم‌گرا - صعودی (۳) واگرا - نزولی (۴) واگرا - صعودی

۳ - دنباله‌ی $\left\{ \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} \right\}$.

- (۱) نوسانی و واگراست. (۲) واگرا و کران‌دار است. (۳) واگرا و نزولی است. (۴) هم‌گراست.

۴ - اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله با جمله‌های مثبت و $\{a_n\}$ نزولی و $\{b_n\}$ صعودی باشد، دنباله‌ی $\left\{ \frac{b_n}{a_n} \right\}$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

- (۱) صعودی است. (۲) نزولی است. (۳) غیر یک‌نواست. (۴) می‌تواند صعودی یا نزولی باشد.

۵ - کدام دنباله‌ی زیر کران‌دار نیست؟

- (۱) $1 - \cos \frac{\pi}{n}$ (۲) $n \cot^{-1} n$ (۳) $n \tan^{-1} n$ (۴) گزینه‌های ۲ و ۳

۶ - دنباله‌ی $a_n = \sqrt{10 + 3\sqrt{10 + 3\sqrt{10 + \dots + 3\sqrt{10}}}}$ به چه عددی هم‌گراست؟

- (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۳

۷ - دنباله‌ی $a_n = \sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt[3]{n^3 + 6n - 1}$ به چه عددی هم‌گراست؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) واگراست.

۸ - دنباله‌های $\left\{ \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right\}$ و $\{(-1)^n \sqrt{n}\}$ به ترتیب، از راست به چپ، چگونه‌اند؟

- (۱) کران‌دار - کران‌دار (۲) کران‌دار - بی‌کران (۳) بی‌کران - کران‌دار (۴) بی‌کران - بی‌کران

۹ - دنباله‌ی $\left\{ \frac{\cot \frac{\pi}{n}}{n+3} \right\}$ چگونه است؟

- (۱) هم‌گرا به π (۲) هم‌گرا به $\frac{1}{\pi}$ (۳) هم‌گرا به صفر (۴) واگرا

۱۰ - کدام گزینه در مورد دنباله‌ی $a_n = n \sin \frac{\pi n!}{3}$ درست است؟

- (۱) دنباله‌ی $\{a_n\}$ هم‌گرا و نزولی است. (۲) دنباله‌ی $\{a_n\}$ هم‌گرا و غیر یک‌نواست.

- (۳) دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگرا و نزولی است. (۴) دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگرا و غیر یک‌نواست.

۱۱ - دنباله‌ی $a_n = \sqrt{n^2 + 4n + 5} - n$

- (۱) صعودی و هم‌گراست. (۲) صعودی و واگراست.

- (۳) نزولی و هم‌گراست. (۴) نزولی و واگراست.

۱۲ - کدام دنباله بی کران است؟

$$(۱) \left\{ \frac{n \sin n}{n+1} \right\} \quad (۲) \left\{ \frac{1}{n^2} + (-1)^n \right\} \quad (۳) \left\{ \frac{n + (-1)^n}{2n+1} \right\} \quad (۴) \left\{ \frac{n + \sin n}{\sqrt{2n+1}} \right\}$$

۱۳ - دنباله‌ی $\{a_n\}$ که $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \frac{2(a_n+1)}{3}$ دنباله‌ای است

(۱) کران دار و صعودی (۲) کران دار و نزولی (۳) غیر یکنوا (۴) واگرا

۱۴ - دنباله‌ی $\{a_n\}$ با رابطه‌ی بازگشتی، به صورت روبه‌رو تعریف شده است:

کدام گزینه درباره‌ی این دنباله درست است؟

(۱) هم گرا و نزولی (۲) هم گرا و صعودی (۳) واگرا و نزولی (۴) واگرا و صعودی

۱۵ - دنباله‌ی $\{a_n\}$ با رابطه‌ی بازگشتی، به صورت روبه‌رو تعریف شده است:

کدام گزینه درباره‌ی این دنباله درست است؟

(۱) هم گرا به $\sqrt{2}+1$ است. (۲) هم گرا به $\sqrt{2}-1$ است. (۳) هم گرا به $1-\sqrt{2}$ است. (۴) واگرا است.

۱۶ - کدام دنباله بی کران است؟

$$(۱) \left\{ (-1)^n + \frac{n}{n+1} \right\} \quad (۲) \left\{ \frac{n \cos n}{2n+1} \right\} \quad (۳) \left\{ n^2 \sin \frac{1}{n+2} \right\} \quad (۴) \left\{ 1 + \frac{\sin n}{n} \right\}$$

۱۷ - دنباله‌ی $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

(۱) هم گرا - صعودی (۲) هم گرا - نزولی (۳) واگرا - صعودی (۴) واگرا - نزولی

۱۸ - هرگاه $a_1 > 1$ و برای هر n طبیعی $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{1+a_n}$ برقرار باشد، دنباله‌ی $\{a_n\}$ دارای کدام ویژگی است؟

(۱) نزولی و هم گرا (۲) صعودی و هم گرا (۳) نزولی و واگرا (۴) صعودی و واگرا

بازگشت

داستان مرد خوش بخت

پادشاهی پس از این که بیمار شد، گفت: «نصف قلمرو پادشاهی‌ام را به کسی می‌دهم که بتواند مرا معالجه کند.» تمام آدم‌های دانا دور هم جمع شدند تا ببینند چه‌طور می‌شود شاه را معالجه کرد، اما هیچ‌یک ندانست. تنها یکی از مردان دانا گفت که فکر می‌کند می‌تواند شاه را معالجه کند. اگر یک آدم خوش بخت را پیدا کنید، پیراهنش را بردارید و تن شاه کنید، شاه معالجه می‌شود. شاه پیک‌هایش را برای پیدا کردن یک آدم خوش بخت فرستاد. آن‌ها در سرتاسر مملکت سفر کردند، ولی نتوانستند آدم خوش بختی پیدا کنند. حتی یک نفر پیدا نشد که کاملاً راضی باشد. آن که ثروت داشت، بیمار بود. آن که سالم بود در فقر دست و پا می‌زد، یا اگر سالم و ثروتمند بود، زندگی بدی داشت، یا اگر فرزندی داشت، فرزندان‌ش بد بودند؛ خلاصه هر آدمی چیزی داشت که از آن گله و شکایت کند. آخرهای یک شب، پسر شاه از کنار کلبه‌ای محقر و فقیرانه رد می‌شد که شنید یک نفر دارد چیزهایی می‌گوید: «شکر خدا که کارم را تمام کرده‌ام. سیر و پر، غذا خورده‌ام و می‌توانم دراز بکشم و بخوابم! چه چیز دیگری می‌توانم بخوام؟» پسر شاه خوش حال شد و دستور داد که پیراهن مرد را بگیرند، پیش شاه بیاورند و به مرد هم هر چه قدر بخواید، بدهند. پیک‌ها برای بیرون آوردن پیراهن مرد توی کلبه رفتند، اما مرد خوش بخت آن قدر فقیر بود که پیراهن نداشت!!!

پاسخ‌های پلکان آزمون

پاسخ آزمون

و چون دنباله هم‌گراست، کران‌دار نیز می‌باشد.
اگر $n \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه $\tan^{-1} n$ به $\frac{\pi}{4}$ هم‌گراست، پس $n \times \tan^{-1} n \rightarrow +\infty$ در نتیجه، این دنباله بی‌کران است.

۶- واضح است که جمله‌ی عمومی این دنباله به صورت $a_n = \sqrt{1 + 3a_{n-1}}$ است. به سادگی ثابت می‌شود این دنباله، صعودی و کران‌دار است، پس هم‌گراست. اگر دو طرف را به توان ۲ برسانیم، داریم $a_n^2 = 1 + 3a_{n-1}$. چنان‌چه $a_n \rightarrow L$ ، آن‌گاه $a_{n-1} \rightarrow L$ و در نتیجه $L^2 = 1 + 3L$ و بنابراین $L = 5$ یا $L = -2$ و چون $a_n > 0$ است، پس باید $L \geq 0$ و در نتیجه $L = 5$.

۷- می‌دانیم $\sqrt{n^2 + 2n} - 1 \sim n+1$ و $\sqrt{n^3 + 6n} - 1 \sim n$ در نتیجه $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [(n+1) - n] = 1$.

۸- در اولین دنباله، چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$ ، پس هم‌گرا است و در نتیجه کران‌دار است.

در دنباله‌ی دوم، چون $\sqrt{n}$ زوج $(-1)^n \sqrt{n}$ ؛ یعنی جملات زوج عبارت‌اند از $\sqrt{2}, \sqrt{4}, \sqrt{6}, \dots$ و جملات فرد عبارت‌اند از: $-\sqrt{1}, -\sqrt{3}, -\sqrt{5}, \dots$ بی‌کران است.

۹- چون $\cot \frac{\pi}{n} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{n}}$ و $\tan \frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n}$ به‌ازای $n \rightarrow +\infty$ ، پس:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cot \frac{\pi}{n}}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+3) \tan \frac{\pi}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+3) \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n+3)}{n}} = \frac{1}{\pi}$$

۱۰- اگر $n \geq 3$ باشد، آن‌گاه $n!$ ، مضرب ۶ است و در نتیجه، به‌ازای $n \geq 3$ ، عبارت $\frac{n!}{3}$ مضرب زوج π است، پس به‌ازای $n \geq 3$ داریم $\sin \frac{\pi n!}{3} = 0$ ، پس جملات این دنباله، به‌صورت $\sqrt{3}, 0, 0, 0, \dots$ هستند. این دنباله هم‌گرا به صفر است ولی غیر یک‌نوا می‌باشد.

۱- چون $\cos n!$ گاهی مثبت و گاهی منفی می‌شود و $\frac{\sqrt{n^2}}{n+2}$ همواره مثبت است، پس دنباله‌ی موردنظر، تناوبی و غیر یک‌نوا است. چون $\cos n!$ کران‌دار و $\frac{\sqrt{n^2}}{n+2}$ به صفر میل می‌کند (درجه‌ی صورت، کم‌تر از درجه‌ی مخرج است)، پس دنباله‌ی موردنظر، به صفر هم‌گراست.

۲- چون دنباله‌های $\left\{ \left(\frac{3}{4} \right)^n \right\}$ و $\{0\}$ به صفر هم‌گرا هستند، بنابر قضیه‌ی فشرده‌گی، دنباله‌ی مفروض نیز به صفر هم‌گراست. از آن‌جا که دنباله‌ی همواره کوچک‌تر از ۱ است، هر چه قدر توانش بیش‌تر شود، مقدار حاصل، کوچک‌تر خواهد شد و در نتیجه، دنباله‌ی مذکور، نزولی خواهد بود.

۳- دنباله نزولی است. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) \times (2n+1)} = \frac{n+1}{2n+1} < 1$. چون تمام جملات این دنباله مثبت هستند، پس از پایین کران‌دار است و بنابراین، دنباله هم‌گراست.

۴- چون $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی با جمله‌های مثبت است، پس $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ و در نتیجه $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$ و چون $\{b_n\}$ دنباله‌ای صعودی با جمله‌های مثبت است، پس $\frac{b_{n+1}}{b_n} \geq 1$. اگر فرض کنیم $c_n = \frac{b_n}{a_n}$ ، آن‌گاه

داریم $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \times \frac{b_{n+1}}{b_n} \geq 1$ و در نتیجه دنباله‌ی $\left\{ \frac{b_n}{a_n} \right\}$ صعودی است.

۵- چون $-1 \leq \cos \frac{\pi}{n} \leq 1$ ، پس $1 - \cos \frac{\pi}{n} \leq 2$ و $0 \leq 1 - \cos \frac{\pi}{n}$ ، پس $1 - \cos \frac{\pi}{n}$ کران‌دار است.

اگر $\cot^{-1} n = u$ ، آن‌گاه $\cot u = n$ و اگر $n \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه $u \rightarrow 0^+$.

اکنون داریم: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cot^{-1} n = \lim_{u \rightarrow 0^+} \cot u \times u = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u}{\tan u} = 1$

۱۶- ۳

۱- داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{n+1}\right) = 2$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{n}{n+1}\right) = 0$ برای n های زوج و فرد. چون این دنباله، به دو عدد متمایز هم‌گراست، پس این دنباله واگراست ولی چون هیچ‌یک از زیر دنباله‌ها بی‌نهایت نشده‌اند، کران‌دار است.

۲- می‌دانیم $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ از طرفی $-1 \leq \cos n \leq 1$ و چون دنباله‌ی $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ هم‌گراست، پس کران‌دار می‌باشد از طرفی دنباله‌ی $\{\cos n\}$ نیز کران‌دار است، در نتیجه حاصل ضرب دو دنباله نیز کران‌دار است.

۳- چون $\sin \frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n+2}$ پس:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin \frac{1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+2} = \infty$$

و چون حد دنباله ∞ شده است، بنابراین بی‌کران است.

۴- چون $-1 \leq \sin n \leq 1$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ پس $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ در نتیجه $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin n}{n}\right) = 1$ یعنی دنباله هم‌گرا و در نتیجه، کران‌دار است.

۱۷- ۱

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(n+1-n)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

در نتیجه دنباله هم‌گرا به $\frac{1}{2}$ است. از طرفی چون $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ پس $a_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$ برای هر n طبیعی داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 + n} &< \sqrt{n^2 + 2n+1} + \sqrt{n^2 + n} \\ \Rightarrow \sqrt{n}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}) &< \sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} &< \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \Rightarrow a_n < a_{n+1} \end{aligned}$$

پس دنباله صعودی است.

۱۸- ۱

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{a_n} \text{ یا } a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \frac{1}{a_n}} = \frac{a_n}{1 + \frac{1}{a_n}}$$

بازنویسی می‌کنیم. در نتیجه $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$ و چون همه‌ی جملات دنباله بزرگ‌تر از صفر هستند، از پایین کران‌دار است، در نتیجه هم‌گراست. در نتیجه $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ و چون $a_n > 0$ ، پس دنباله نزولی است. از طرفی اگر دنباله به L هم‌گرا باشد، آن‌گاه داریم $L = \frac{L^2}{1+L}$ یا $L = 0$ در نتیجه، دنباله به صفر هم‌گراست.

۱۱- ۳ می‌دانیم $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 4n + 5} - n = \lim_{n \rightarrow \infty} n + 2 - n = 2$ پس

دنباله هم‌گرا است. از طرفی واضح است که $n^2 + 4n + 5 > n^2 + 4n + 4$ ، پس $\sqrt{n^2 + 4n + 5} > n + 2$ یا $\sqrt{n^2 + 4n + 5} - n > 2$ ؛ یعنی تمام جملات دنباله، بزرگ‌تر از ۲ هستند ولی به ۲ هم‌گراست، پس اگر یک‌نوا باشد، نزولی است.

توجه کنید که چون در گزینه‌ها عبارت «غیریک‌نوا» وجود نداشت به این صورت استدلال کردیم؛ در غیر این صورت باید نسبت $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ را مشخص می‌کردیم.

۱۲- ۴ توجه کنید که $\frac{n \sin n}{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)(\sin n)$ چون $-1 \leq \sin n \leq 1$ و $0 < \frac{n}{n+1} < 1$ پس دنباله‌ی گزینه‌ی ۱، کران‌دار است.

دنباله‌ی $\frac{1}{n}$ هم‌گرا به صفر است، پس کران‌دار می‌باشد و $(-1)^n$ نیز تنها دو مقدار ۱ و -۱ را دارد، در نتیجه $\frac{1}{n} + (-1)^n$ نیز کران‌دار است.

چون زوج: $\frac{n+1}{2n+1}$ و فرد: $\frac{n-1}{2n+1}$ و حد هر دو زیردنباله، برابر $\frac{1}{2}$ است، پس حد دنباله $\frac{1}{2}$ است و چون هم‌گرا است، پس دنباله‌ی گزینه‌ی ۳ نیز

کران‌دار می‌باشد. چون $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \sin n}{\sqrt{4n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{4n}} = +\infty$ پس گزینه‌ی ۴، کران‌دار نیست.

۱۳- ۱ با استقرای ریاضی به سادگی ثابت می‌شود برای هر n طبیعی $0 < a_n < 2$ ، پس دنباله کران‌دار است. از طرفی دنباله صعودی است، زیرا $a_{n+1} - a_n = \frac{2(a_n+1)}{3} - a_n = \frac{2-a_n}{3} > 0$.

۱۴- ۱ با توجه به ضابطه‌ی دنباله نتیجه می‌شود که به‌ازای هر n طبیعی، $a_n > 0$ و با توجه به این‌که $\frac{a_n}{1+a_n} < 1$ و $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$ بنابراین $a_n \leq 1$ ، پس به‌ازای هر n طبیعی، داریم $0 < a_n \leq 1$ ، یعنی دنباله کران‌دار است. از طرفی داریم:

دنباله نزولی است $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1+a_n} < 1 \Rightarrow$ چون دنباله‌ی موردنظر، نزولی و کران‌دار است، دنباله‌ای هم‌گراست.

۱۵- ۲ همانند تست قبل، ثابت می‌شود این دنباله هم‌گراست؛ اگر فرض کنیم $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ ، آن‌گاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = L$ داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} &= \frac{1}{2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n} \Rightarrow L = \frac{1}{2+L} \Rightarrow L^2 + 2L - 1 = 0 \\ &\Rightarrow L = -1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

و چون به‌ازای هر n طبیعی، $a_n > 0$ ، باید $L \geq 0$ باشد، در نتیجه $L = -1 + \sqrt{2}$.